ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE III (1959)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

B. W. GNIEDENKO i I. B. POGRIEBYSSKI

O historii matematyki i jej znaczeniu dla matematyki i innych nauk (1)

Co do historii matematyki i jej znaczenia dla samej matematyki nie ma ustalonego zdania wśród przedstawicieli naszej nauki. Często spotyka się uczonych, których punkt widzenia w tej sprawie można by nazwać *nihilistycznym*. Niemal całkowicie negują oni znaczenie historii matematyki dla współczesnego rozwoju tej nauki. Przytaczane przez nich argumenty sprowadzają się z grubsza do następujących. Oczywiście, historia nauki w ogóle, a historia matematyki w szczególności, są niezbędne dla badań rozwoju społeczeństwa, dla filozofii, dla ogólnego wykształcenia, ale nauka postępuje naprzód, wzbogacając się ciągle o nowe fakty, których dawniej nawet nie przypuszczano, a przy tym stare poglądy i tezy, które okazały się fałszywe lub niewystarczające, zostają odrzucone. Dlatego znajomość przeszłości nauki nie może odegrać istotnej roli w jej dalszym rozwoju. Co więcej, ciężar przeszłości może nawet wywrzeć wpływ hamujący, przeszkadzając w pojawianiu się nowych idei.

Podkreśla się przy tym stale, że historia matematyki jest nauką historyczną. Tej ostatniej tezy nie można negować, należy ją jednak sprecyzować, a nawet rozszerzyć. Rzecz jasna, że bez gruntownej znajomości odpowiedniej epoki historycznej, nie można zajmować się tym czy innym zagadnieniem z historii matematyki. Ten, kto zajmuje się matematyką grecką z czasów Euklidesa, Archimedesa, Apoloniusza, musi znać dostatecznie szczegółowo ustrój społeczny, poziom techniki, kulturę, osobliwości życia starożytnej Grecji i jej sąsiadów. Aleksandria, Perga, Syrakuzy, Ateny nie powinny pozostawać dla niego tylko pojęciami geograficznymi. Nie można badać matematyki Newtona, Leibniza, Bernoulliego, nie znając historii Europy w wiekach XVII-XVIII, nie

(1) Podstawą tego artykułu był referat wygłoszony przez autorów w Sekcji matematyczno-fizycznej Narodowego Zjednoczenia Historyków Nauk Przyrodniczych i Techniki Związku Radzieckiego. Później, w nieco zmienionej postaci, referat ten został powtórzony przez jednego z autorów na posiedzeniach Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Krakowie i Warszawie. Do przygotowania artykułu do druku zostały wykorzystane materiały z dyskusji nad referatem.

znając stosunków społecznych owych czasów, rozwoju techniki, a zwłaszcza kultury Anglii, Francji, Niemiec, a także innych krajów Europy. Czy można badać twórczość Łobaczewskiego czy Ostrogradskiego, nie znając ogólnego obrazu historycznego Rosji i Ukrainy w pierwszej połowie XIX wieku? Można to uważać za oczywiste, co wcale nie znaczy, że łatwo jest spełnić te warunki i że są one rzeczywiście spełnione. Powierzchowność i niezupełność niemałej liczby prac z historii matematyki jest często spowodowana właśnie tym, że są one opracowane bez dostatecznej znajomości epoki, bez należytego zgłębienia jej kultury i nauki.

Tak więc historia matematyki jest nauką historyczną, chociaż i nie tylko historyczną, ale o tym będzie mowa później. Jeśli jednak matematycy odżegnują się od niej i chcą ją całkowicie włączyć w historię ogólną, to tam stosunek do niej wcale nie jest lepszy. Zarówno w ogólnych kursach historii, jak i w specjalnych studiach historycznych zazwyczaj o rozwoju nauk matematycznych nie mówi się wcale, a tylko w wyjątkowych przypadkach krótko się o tym wspomina. Chodzi, rzecz jasna, nie o to, że autorzy historycy boją się specjalnych wiadomości matematycznych, które mogłyby być niezrozumiałe dla niematematyków. Przecież ostatecznie prawie wszystko, co ludzkość stworzyła w dziedzinie matematyki do wieku XVII, jest dobrze znane uczniom szkoły średniej. Postęp w tej dziedzinie wiedzy nie jest jednak w żaden sposób powiązany z historią ogólną. Dla ucznia pozostają niejasne zarówno rola matematyki w rozwoju kultury ludzkiej, jak i wpływ przesunięć społecznych na udoskonalenie matematyki. Nikt nie będzie negował znaczenia Homera i Ajschylosa, Arystotelesa i Demokryta, Mirona i Praksytelesa w kształtowaniu kultury ludzkiej, ale nie ulega wątpliwości, że duże znaczenie dla niej mieli także Euklides, Archimedes i Ptolomeusz, Apoloniusz, Diofantos i Pitagoras. Jeśli jednak w szkolnych podręcznikach historii można jeszcze znaleźć pierwszą grupę nazwisk, to daremnym trudem byłoby szukanie drugiej grupy. Powstaje paradoksalna sytuacja. W życiu współczesnego społeczeństwa we wszystkich jego przejawach matematyka, fizyka i ścisłe nauki przyrodnicze odgrywają wyjątkową rolę, a nasze kursy historii nic nie mówią o tym, w jaki sposób i dlaczego do tego doszło. Widocznie przejawia się tutaj nie tyle nawet niewiedza, co tradycja, która panuje nad umysłami historyków i usuwa na dalszy plan tę okoliczność, że rozwój nauk ścisłych nie tylko był uwarunkowany przez stosunki społeczne, ale z kolei sam wywierał wpływ na historię społeczeństwa. Niestety, w opisanej sytuacji rozwój matematyki jest odrywany od ogólnego procesu historycznego, staje się czymś zewnętrznym względem społeczeństwa i jego kultury.

Zaznaczywszy, że historia matematyki jest nauką historyczną, należy tezę tę uzupełnić dodając, że jest ona także nauką matematyczną. Chcemy przy tym od razu podkreślić, że znaczenie jej dla innych działów matematyki może się z czasem tylko zwiększać. W znacznym stopniu tłumaczy się to tym, że zadaniem historii matematyki jest nie tylko opisanie drogi, jaką matematyka przeszła, lecz głównie uświadomienie sobie i zrozumienie tej drogi. Jak i każdy żywy dział nauki, historia matematyki zmienia z czasem swe oblicze, znajduje nowe podejście do stojących przed nią zadań. Tak więc w pierwszym etapie jej rozwoju główną treść dzieł historyczno-matematycznych stanowiła część opisowa — życiorysy wybitnych uczonych, zreferowanie uzyskanych przez nich wyników i ich ocena porównawcza. Ale zbieranie i opisywanie faktów jest tylko początkowym stadium rozwoju każdej nauki. Teraz historia matematyki nie może ograniczać się tylko do tego. W naszych czasach za podstawowe jej zadanie należy uważać naświetlenie prawidłowości powstawania i rozwoju idei matematycznych. Jasne jest, że przy takim postawieniu sprawy historią matematyki z powodzeniem mogą się zajmować osoby, mające oprócz specjalnego przygotowania matematycznego, także pewne doświadczenie w samodzielnej pracy naukowej. W pewnym stopniu potwierdziło to już życie, a oto przykłady: F. Klein ze swym interesującym, choć nieco subiektywnym przeglądem matematyki XIX wieku, Neugebauer ze swymi doskonałymi badaniami matematyki świata starożytnego, Struik z małym, lecz zajmującym i doskonałym pod względem ideowym, krótkim kursem historii matematyki, A. N. Kołmogorow z dużym i głębokim przeglądem historii matematyki (*O matematyce,* Warszawa 1955), Van der Waerden ze swą książką *Science Awakening.*

Tak więc doszliśmy do wniosku, że historia matematyki zgodnie ze swą nazwą jest jednocześnie nauką historyczną i nauką matematyczną. Ten wniosek wymaga z kolei sprecyzowania. Przy badaniu prawidłowości rozwoju matematyki w różnych epokach element historyczny i element czysto matematyczny występują w różnym stosunku. Z grubsza mówiąc, w miarę zbliżania się do współczesności wzmaga się drugi z nich, a w miarę oddalania się od niej wzrasta pierwszy. Dla ilustracji zatrzymamy się na kilku zagadnieniach z historii matematyki.

Matematyka należy do tych niewielu nauk, których elementy zaczęły się kształtować u samej kolebki społeczeństwa ludzkiego. Elementy rachunków i wyobrażeń geometrycznych kształtowały się pod wpływem codziennego doświadczenia, początkowo u myśliwego i wojownika, potem u hodowcy i rolnika. Oczywiście w tym stadium rozwoju nie było jeszcze żadnej matematyki w naszym zrozumieniu. Człowiek był we władzy jak naj-

bardziej naiwnych wyobrażeń, ale już one były podstawą takich pojęć, jak odcinek prostej jako najkrótsza odległość między dwoma punktami, relacja większy i mniejszy między wielkościami, liczba całkowita w zakresie pierwszej dziesiątki itd. Tutaj chciałoby się wyrazić przekonanie, że pierwotne wiadomości matematyczne nie tylko były świadectwem stosunkowo wysokiego stopnia rozwoju wyższych czynności nerwowych, lecz same też sprzyjały temu rozwojowi. Odpowiada to w zupełności znanej tezie ogólnej, że praca będąca podstawą rozwoju świadomości myślenia sama komplikowała się pod wpływem myśli, a złożoność pracy i narzędzi dostarczała nowych impulsów do rozwoju wyższych czynności nerwowych.

Rzecz jasna, trudno jest wydać sąd o tym, w jaki sposób rozwijały się u ludzi pojęcia abstrakcyjne, ponieważ pomniki kultury materialnej nie zachowały historii ich kształtowania. Jednakowoż jesteśmy przekonani, że na równi z niektórymi hipotetycznymi stwierdzeniami, dotyczącymi innych stron historii kultury, należy na ogólnym tle odpowiednich faktów przedstawiać także i hipotezy dotyczące powstawania pierwszych wyobrażeń matematycznych. Można mieć nadzieję, że w przyszłości, kiedy ludzkość nauczy się lepiej odczytywać historię przeszłości, uda się znaleźć pewne drogi do wyjaśnienia takiego początkowego stadium nauki. Jest w każdym razie jasne, że rola samych matematyków w badaniu tej kwestii, mającej dla historii matematyki niewątpliwe znaczenie, jest stosunkowo niewielka i rozwiązania należy tu szukać biorąc do pomocy dane innych nauk.

Przejdźmy teraz do innego zagadnienia, jednego z najbardziej zajmujących, do zagadnienia powstania matematyki jako nauki dedukcyjnej, a nie jako zbioru recept na rozwiązywanie poszczególnych zadań. Zwyczajny schemat, za którym podążano przez wiele lat, był następujący. Wyjątkowe uzdolnienie starożytnych Greków we wszystkich dziedzinach nauki i sztuki doprowadziło do rozumienia matematyki jako systemu wniosków logicznych z pierwotnych zasad. Przed starożytnymi Grekami nie było właściwie matematyki w naszym rozumieniu. Były tylko rozproszone recepty na rozwiązywanie poszczególnych zadań, związanych z praktyką rolnictwa, budownictwa, rachunków handlowych, organizacji gospodarki, pobierania podatków, wojskowości.

Obecnie zdajemy sobie sprawę z tego, że przejście od znajomości recept do nauki dedukcyjnej było krokiem o zasadniczym znaczeniu dla całej historii kultury. Charakteryzowało to w pewnym sensie nowy okres rozwoju myśli ludzkiej. Istnieje wiele podstaw do konkluzji, że dojrzewanie matematyki jako nauki dedukcyjnej było wynikiem długotrwałej ewolucji. W każdym razie wkład w ten proces narodów Mezopotamii

i Egiptu nie można uważać za dostatecznie wyświetlony. Nie ulega wątpliwości, że przyszłe odkrycia archeologiczne pozwolą znaleźć zalążki wniosków dedukcyjnych w matematyce nie tylko w starożytnej Grecji, lecz także u narodów Bliskiego Wschodu. Idea ta znajduje teraz wielu zwolenników. Rozszyfrowanie tekstów klinowych pozwala już teraz stwierdzić, że w starożytnej Babilonii nie tylko twierdzenie Pitagorasa było znane, lecz także znano o wiele głębsze fakty algebraiczne. Na przykład wzór, dający wszystkie trójkąty prostokątne o bokach całkowitoliczbowych, znano o tysiąc lat wcześniej niż w Grecji(2). Wiadomości matematyczne uzyskane w starożytnej Babilonii wywarły o wiele większy wpływ na kształtowanie matematyki greckiej, niż uważano do niedawna.

Jednakże korzystanie od czasu do czasu z wniosków dedukcyjnych nie oznacza jeszcze zbudowania systematycznej nauki dedukcyjnej. Nie ma podstaw do zaprzeczenia, że taka konstrukcja została po raz pierwszy zrealizowana właśnie w starożytnej Grecji. Jakie były tego przyczyny? Dlaczego w starożytnej Grecji były przesłanki ku temu? Dlaczego nie stało się to w innych państwach świata starożytnego? Przecież ostatecznie zarówno siły produkcyjne, jak i stosunki produkcyjne u prawie wszystkich narodów Małej Azji i południowej części półwyspu Bałkańskiego były w tym czasie mniej więcej jednakowe. Przyjęciu natomiast objaśnienia, opartego na jakimś szczególnym obliczu duchowym starożytnych Greków, sprzeciwia się nawet elementarne myślenie krytyczne. Jasne jest, że systematycznym, logicznym umysłem nie wszyscy starożytni Grecy byli obdarzeni, że również inne narody tego czasu także miały licznych przedstawicieli obdarzonych tymi wspaniałymi zaletami. Gdybyśmy jednak nawet przyjęli to objaśnienie, pozostaje niezrozumiała i wymaga wyjaśnienia kwestia, co wywołało tę szczególną mentalność starożytnych Greków, co nauczyło ich logicznego i systematycznego myślenia i dlaczego te osobliwości o wiele słabiej przejawiały się później. Rzecz jasna, tego rodzaju objaśnienia niczego nie wyjaśniają w historii matematyki zarówno świata starożytnego, jak i epok późniejszych.

Chcemy w związku z tym zauważyć, że istotne znaczenie dla formowania nauki dedukcyjnej musiały mieć osobliwości stosunków społecznych w miastach-państwach starożytnej Grecji. Rozstrzyganie spraw publicznych w wyniku dysput, kiedy to trzeba było przekonać uczestników zebrań o prawdziwości swych sądów, wymagało przemyślanych logicznych uzasadnień. Takie same wymagania nasuwała praktyka sądownictwa, w szczególności rozstrzyganie przez sąd przysięgłych zagadnień spornych. To z kolei stwarzało przyzwyczajenie do wyciągania wnio3

(2) R. I. Gillis, *The oriental influence in Greek mathematics*, Math. Gazette 29 (1955), str. 187-190.

sków na podstawie przekonywujących argumentów, rozbijając rozumowanie na części elementarne i sprowadzając je do pewnych pierwotnych prawd, które wydawały się bezsprzeczne. Takie podejście do przekonywania słuchaczy o prawdziwości wysuwanych tez przechodziło naturalnie ze sfery stosunków społecznych do sfery rozumowań naukowych. Entuzjazm dla takiego podejścia był nawet zbyt wielki i na tej drodze próbowano otrzymać nie tylko wyniki matematyczne, lecz także i przyrodnicze — powołamy się tu na dobrze znane próby Arystotelesa rozwijania w ten sposób fizyki([3]).

Wypowiedziane wyżej rozważania o powstaniu matematyki dedukcyjnej są na razie raczej prawdopodobną hipotezą, niż udokumentowanym twierdzeniem. Na to, by rozważania te uzasadnić, konieczne jest skrupulatne zbadanie źródeł historycznych, włączając w to przemówienia sądowe i przemówienia działaczy państwowych starożytnej Grecji na zebraniach publicznych. Wobec ogromnego znaczenia zagadnienia powstania nauki dedukcyjnej dla historii nauki i kultury w ogóle, praca ta tym bardziej wydaje nam się zasługiwać na wielkie wysiłki, które muszą być z nią związane.

Aby uniknąć nieporozumień, należy podkreślić tutaj tę okoliczność, że dla rozwoju matematyki jako nauki dedukcyjnej wcale nie było konieczne, by uprzednio osiągnięty został wysoki poziom rozwoju logiki formalnej, i żeby dyskusje publiczne były prowadzone na wyjątkowym poziomie logicznym. Rozwój ten odbywał się równolegle i nie wątpimy, że wiele matematycznych twierdzeń otrzymano za pomocą logicznych rozumowań wtedy, gdy same prawa logiki nie były jeszcze sformułowane w postaci wyraźnych twierdzeń.

W związku z powyższym należy wspomnieć, że podobny do naszego pogląd wypowiadało szereg uczonych: A. N. Kołmogorow w 1937 r.([4]), Gigon w 1945 r.([5]), Alexits i Fenyö w 1948 r.([6]), a w latach późniejszych E. Kohlman i A. P. Juszkiewicz. Niedawno węgierski hellenista A. Szabó([7]) poddał krytyce poglądy Gigona, Alexitsa i Fenyö. Nam się jednak wydaje, że słusznie wytykając niedociągnięcia w pracach wskazanych

---

([3]) Oczywiście przyczyny oderwania fizyki Arystotelesa od świata rzeczywistego mają także swe źródło w charakterystycznym dla nauki greckiej oderwaniu teorii od praktyki technicznej i od doświadczenia. Jednakże również i ta osobliwość była związana z warunkami życia społecznego.

([4]) Wielka Encyklopedia Radziecka, wyd. I, t. 38.

([5]) O. Gigon, *Der Ursprung der griechischen Philosophie*, Basel 1945.

([6]) Alexits i Fenyö, *Matematika és dialektikus materializmus*, Budapest 1948.

([7]) A. Szabó, *Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden*, Acta Antiqua Ac. Sc. Hung. 4 (1956), fasc. 1-4, str. 109-152; patrz także inne prace tego autora w Acta Antiqua z lat 1953-1956.

autorów, w szczególności dopuszczane przez nich pomieszanie epok historycznych, Szabó wpadł w drugą skrajność. Mianowicie w swych uwagach krytycznych wychodzi w znacznej mierze z następującego schematu. Najpierw dochodzi do wysokiego rozwoju logiki, następnie wysoki poziom osiąga sztuka prowadzenia dyskusji, a dopiero potem zaczyna się matematyka jako nauka dedukcyjna. Z tym schematem nie można się zgodzić ze względu na jego wyraźną sztuczność.

W związku z ostatnim problemem zajęliśmy się takimi szczegółami po to, by pokazać w jakim stopniu jego rozwiązanie jest związane z powołaniem na pomoc materiału niematematycznego. Matematykowi nie trzeba podkreślać, że zagadnienie to wymaga także przestudiowania wielu źródeł matematycznych, ich skrupulatnej analizy, opanowania precyzyjnych metod geometrycznych. Zagadnienie to jest o wiele bardziej „matematyczne" od pierwszego, ale czy poświęcone mu wysiłki dadzą coś dla matematyki współczesnej? Myślimy, że badania takie, przynajmniej pośrednio, są wartościowe także i pod tym względem. Nie można w każdym razie zaprzeczyć, że są one istotne dla historycznego badania myślenia. Sprecyzowanie i skonkretyzowanie praw myślenia jest aktualnym zadaniem właśnie w naszej epoce — epoce potężnych maszyn matematycznych i głębokich studiów nad techniką myślenia.

W studiach historii matematyki ostatnich stuleci, jak już mówiliśmy, ciężar gatunkowy części matematycznej pracy badacza wyraźnie wzrasta. Ci historycy matematyki, którzy nie znają marksizmu lub go odrzucają, wciąż uważali za zadanie swej nauki badanie i porównywanie dzieł matematycznych tej lub innej epoki, tego lub innego uczonego. Nawet przy tak zwężonym, i w widoczny sposób metodologicznie niezadowalającym, podejściu prace historyków matematyki mogą przynieść korzyść matematyce przez to, że ujawniają one charakterystyczne osobliwości metodyki wybitnych badaczy w przeszłości. Na tę stronę sprawy zwrócił jeszcze uwagę Leibniz. Pisał on w dziele nieopublikowanym za życia: „Bardzo pożytecznie jest poznać rzeczywiste pochodzenie znakomitych odkryć, zwłaszcza tych, których nie dokonano przypadkowo, lecz siłą myśli. Przynosi to pożytek nie tyle dlatego, że historia odda każdemu należne i pobudzi innych do ubiegania się o takie same pochwały, ile dlatego, że poznanie metody na wybitnych przykładach prowadzi do rozwoju sztuki odkrywania"(8).

(8) Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu, sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia litteraria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis (Leibniz, *Historia et origo Calculi differentialis*, napisana po 1712 r., Gesammelte Mathematische Schriften, t. V, Halle 1858, str. 392).

Jak widać z powyższego, charakteryzując wzajemne stosunki matematyki i historii matematyki, poruszamy naturalnie kwestię znaczenia tej ostatniej dla matematyki. Przejdziemy teraz do szczegółowego rozpatrzenia tych stosunków i zaczniemy od tego, że także i tutaj konieczne jest podejście historyczne — na różnych etapach wysuwały się na pierwszy plan różne aspekty wzajemnych stosunków matematyki i historii matematyki.

Historia matematyki zaczęła się kształtować jako samodzielna dyscyplina naukowa dopiero w czasach nowożytnych w wieku XVIII. Już uczeni starożytnej Grecji odczuli jednak potrzebę historii nauki i co najmniej poczynając od epoki hellenizmu dość dużo się nią zajmowali. Niestety, do nas doszło bardzo mało z tej części spuścizny naukowej świata starożytnego. To nieliczne, co do nas dotarło, jest bezcennym i niezastąpionym źródłem dla współczesnej historii nauki. Nie zaszkodzi tu zauważyć, że nawet fragmenty starożytnych historyków nauki miały wielkie znaczenie dla zachowania tradycji naukowej. Uczeni średniowiecza na Wschodzie i na Zachodzie zarówno w krajach posługujących się w nauce językiem arabskim, jak i w krajach posługujących się łaciną dowiadywali się z tych fragmentów o tym, czego nie mogli wydobyć z *Elementów* Euklidesa. Widzieli oni, choćby nawet w zniekształconej perspektywie, długą drogę rozwoju nauki starożytnej, dowiadywali się o jej nierozwiązanych i aktualnych zagadnieniach, uzyskiwali pewne informacje o metodach i wynikach całkowicie lub częściowo zaginionych prac Archimedesa, Apoloniusza, Euklidesa i innych.

Nie ulega wątpliwości, że komentatorzy, którzy z reguły byli historykami nauki świata starożytnego, wiele zniekształcili. Gdyby jednak nic nie zachowało się z ich prac, byłaby to strata nie tylko dla historii nauki. Niewątpliwie zmniejszyłaby się znacznie efektywność wpływu matematyki antycznej na późniejsze epoki.

Zwróćmy się teraz do bliższych nam czasów. Od czasu gdy zaczęły się pojawiać zrzeszenia naukowe — instytucje państwowe typu akademii i takie organizacje, jak towarzystwa miłośników nauki, popierania nauki itd. — zaczęto w nich uprawiać przeglądy tego lub innego działu nauki za krótszy lub dłuższy okres. Podobne przeglądy są badaniami historycznymi. Oczywiście wiele z nich miało przeważnie charakter opisowy i ujmowało temat dość wąsko. W wielu przypadkach jednak przeglądy takie miały wielkie znaczenie dla rozwoju odpowiedniego działu nauki. Popularyzowały one osiągnięcia, wysuwały aktualne zagadnienia, ułatwiały opanowanie metodyki badań. Taką samą rolę odgrywały też historyczne dygresje, które stanowią ważną część składową szeregu klasycznych dzieł naukowych. Wszystko to dotyczy rzecz jasna nie tylko matematyki.

Aby przytoczyć przykłady z zakresu naszej nauki, można się powołać na historyczne rozdziały *Mechaniki analitycznej* Lagrange'a, na analizę prac o całkach eliptycznych i funkcjach Poissona, podaną w związku z analizą *Fundamenta nova*... Jacobiego, na referaty przeglądowe wygłaszane na zjazdach angielskiego zrzeszenia popierania nauk, np. przegląd Cayley'a (1854 r.) osiągnięć mechaniki analitycznej w ciągu mniej więcej 100 lat (od połowy XVIII w.), na historię nauki o funkcjach algebraicznych, która została przedstawiona w Niemieckim Towarzystwie Matematycznym przez Brilla i Noetera (1894 r.) itd.

Teraz zaś znaczenie historii matematyki dla rozwoju matematyki jest większe niż kiedykolwiek przedtem i jak zauważyliśmy wyżej może z czasem tylko wzrastać. Aby to uzasadnić, zauważymy co następuje.

Powszechnie wiadomo, że tempo rozwoju wszystkich nauk wzrasta, zasób nagromadzonych wiadomości rozszerza się bardzo szybko, metody badań stają się precyzyjniejsze i bardziej różnorodne. Dlatego już na przełomie XX wieku zabrakło uczonych-encyklopedystów, a w naszych czasach nie można wskazać matematyka, fizyka czy chemika, który opanowałby chociażby tylko swoją naukę w pełnej objętości i pracował we wszystkich jej działach.

Specjalizacja uczonych staje się coraz bardziej zróżnicowana. Jest to nieuniknione i jest jednym z elementów szybkiego postępu nauki; równocześnie jednak ma to niewątpliwie swoje ujemne strony. Historia nauki może osłabić szkodliwe działanie wąskiej specjalizacji, dając ogólniejszy pogląd na podstawowe kierunki badań, na tendencje rozwojowe nauki i wysuwane przez nią zagadnienia.

Oczywiście takie zadania będzie mogła spełnić historia naszej nauki, jeśli na równi z badaniem dalekich epok, będzie też intensywnie opracowywać problematykę ostatnich dziesięcioleci. Należy sprowadzić do minimum lukę między współczesnością a tą granicą, do której historia matematyki zdążyła (w mniejszym lub większym stopniu), objąć materiał podlegający jej badaniom. Obecnie luka ta jest zbyt duża i w różnych działach matematyki i dla różnych krajów waha się od pół wieku do całego stulecia i więcej.

W ścisłym związku z powiedzianym przed chwilą pozostaje następująca okoliczność. Do niedawna badania matematyczne nie były związane ze znaczniejszymi inwestycjami materialnymi. Dlatego w matematyce, w odróżnieniu od nauk doświadczalnych, w znacznym stopniu możliwa była praca „na wyrost" nad zagadnieniami wysuwanymi przez rozwój nauki nawet wtedy, gdy nie miały one bezpośrednich zastosowań. Stąd bierze się ta charakterystyczna cecha matematyki, że jej spiżarnia jest przeładowana ponad przeciętne normy. Toteż nieraz się zda-

rzało, że ci, którzy zwracali się tam po narzędzia, znajdowali potrzebne środki z wywołującą zdumienie etykietą — opracowane tyle i tyle dziesięcioleci temu. Tak na przykład teoria grup, pozostająca w XIX wieku w ramach algebry, została wykorzystana przez fizykę w XX wieku. Rachunek tensorowy, opracowany w ramach geometrii różniczkowej na jej użytek, dostał się po upływie kilku dziesięcioleci w gotowej postaci do arsenału teorii względności. Podobnie można by wskazać geometrię nieeuklidesową i teorię spinorów. Czy jednak wydobyto już ze spiżarni matematyki wszystko, co może być już teraz wykorzystane? Wątpliwe. Można przypuszczać, że dobrze opracowana, a obecnie zupełnie niepopularna, teoria niezmienników przysłuży się jeszcze innym naukom. Nie jest wykluczone, że w pracach z kombinatoryki z XVIII i początku XIX wieku, gałęzi prawie całkowicie zarzuconej, znajdzie się coś cennego dla współczesnej dyskretnej matematyki. Takie poszukiwania stały się obecnie bardzo aktualne w związku z pojawieniem się elektronowych automatów cyfrowych. Spuścizna Eulera i innych matematyków XVIII--XIX wieków przestudiowana z tego punktu widzenia może doprowadzić do ważnych metod i idei właściwych raczej naszym czasom niż tamtym. Dobrze opracowana historia matematyki powinna znacznie ułatwić orientację w tym ogromnym materiale nagromadzonym przez naukę. Przez to samo może ona współdziałać w racjonalnym wykorzystaniu go.

Historia matematyki, odkrywając ogólne prawidłowości jej rozwoju, powinna dawać słuszny pogląd na matematykę jako całość i na perspektywy jej postępu. Chcielibyśmy zilustrować to jednym przykładem. W różnych czasach było stawiane niepokojące pytanie, jakie są przyczyny tego, że matematyka ma ogromne możliwości zastosowań praktycznych. Poczyniono wiele prób, w przytłaczającej większości niezadowalających, by dać odpowiedź na to pytanie. Nie będziemy tu przytaczać dobrze znanych rozwiązań Platona i Leibniza, pożyteczniej będzie zatrzymać się na innych, bliższych nam w czasie. Zgodnie ze zdaniem grupy wybitnych uczonych francuskich występujących pod pseudonimem Nicolas Bourbaki „jest niezrozumiałe i być może pozostanie na zawsze nierozwiązaną zagadką, w jaki sposób wyniki matematyki znajdują zastosowanie w praktyce"(9).

Istnieje jeszcze inny pogląd, według którego możliwość zastosowania matematyki objaśnia się przez przypadek. Wspomnę tu słowa Piotra Boutroux wypowiedziane przezeń jeszcze w 1920 r.: „Jeśli matematyka prawie dokładnie zgadza się z danymi doświadczalnymi, to nie jest to skutkiem jej właściwości wewnętrznych, lecz tylko okoliczności zew-

(9) Nicolas Bourbaki, *L'architecture de mathématiques*, w zbiorze Les grands courants de la pensée mathématique, 1948, str. 46.

nętrznych. Okazało się, że stosunkowo prosta nauka jest zdolna wyjaśnić prawa przyrody. Jest to szczęśliwy przypadek, który nie koniecznie musiał nastąpić"([10]).

Sam wniosek, że możliwość zastosowania matematyki do zadań praktyki jest szczęśliwym przypadkiem, nie jest przypadkowy. Jest on logiczną kontynuacją bardzo rozpowszechnionego poglądu na formowanie się pojęć matematycznych. Według tego poglądu, wypowiadanego przez szereg wielkich matematyków, pojęcia te są swobodnie tworzone przez umysł ludzki. Są one określone przez te własności, które w sposób dowolny przypisuje im uczony. Błędność takiego poglądu wychodzi na jaw, gdy mamy przed oczyma nie ostatecznie sformalizowany dział matematyki, lecz całą historyczną drogę jego rozwoju. Udaje się przy tym prześledzić powstawanie i ustalanie się pojęć prawie że od intuicyjnych wyobrażeń, podsuniętych przez praktykę lub przez szczegółowe zadania innej dziedziny wiedzy. Jeśli natomiast zamkniemy się w granicach ukształtowanego już i sformalizowanego schematu matematycznego i poza nimi nie zechcemy niczego widzieć, to związek matematyki z praktyką, z zagadnieniami stojącymi przed społeczeństwem, zatraca się. Zniekształca się przy tym sam proces powstawania i rozwoju podstawowych pojęć nauki. Nie od rzeczy będzie teraz podkreślić, że z tego punktu widzenia zagadnienie powstania pierwotnych pojęć matematycznych, o którym była mowa wyżej, okazuje się w dostatecznym stopniu aktualne.

Historia matematyki stawia dość często w związku z opracowywanymi przez nią kwestiami także i czysto matematyczne zadania. Ten aspekt sprawy pozostaje zwykle w cieniu, dlatego przytoczymy kilka przykładów.

Wyżej zatrzymaliśmy się dość szczegółowo na jednym z podstawowych zagadnień historii matematyki — wyjaśnieniu przyczyn i warunków, dzięki którym stała się ona w starożytnej Grecji nauką dedukcyjną. W zagadnieniu tym poważne miejsce zajmuje zadanie kwadratury koła wysunięte przez dość pilne potrzeby owego czasu i ważne jest dla nas prześledzenie, jak zagadnienie to było stawiane i rozwiązywane z pokolenia na pokolenie od stulecia do stulecia. W związku z tym zasadnicze znaczenie ma ocena wyników Hipokratesa z Chios (V wiek p. n. e.) otrzymanych przezeń w zadaniu kwadratury księżyców. Matematycy czasów nowożytnych, aż do połowy XIX w., wiedzieli, że Hipokrates znalazł za pomocą cyrkla i linijki jeden przypadek księżyców kwadrowalnych. (We współczesnych oznaczeniach rzecz sprowadza się do rozwiązania

([10]) P. Boutroux, *L'idéal scientifique des mathematiques*, 1920, str. 200.

równania $\sin mx = \sqrt{m}\sin x$ przez sprowadzenie go do równania kwadratowego lub łańcucha równań kwadratowych; wspomniany przypadek odpowiada wartości $m = 2$.) W 1776 r. Wallen, a w 1840 r. Clausen znaleźli jeszcze cztery przypadki kwadrowalnych księżyców ($m = 3$, $3/2$, 5, $5/3$). Wyniki te są ciekawe same dla siebie. Równocześnie powstaje pytanie, czy mogły one być uzyskane przez starożytnych Greków i czy można je rozwinąć dalej. Takie pytanie jest poważnym zadaniem dla matematyki, a jednocześnie jest istotne dla historii matematyki. Wspomnimy tu, że z jednej strony już po ukazaniu się pracy Clausena stwierdzono na podstawie nowych źródeł, że pierwsze dwa przypadki dodane przez niego i Wallena zostały już też znalezione przez Hipokratesa. Z drugiej strony, badanie kwadrowalnych księżyców zostało należycie posunięte naprzód dopiero w pracach N. G. Czebotariowa i A. I. Dorodnego, ale już metodami współczesnej algebry.

Wróćmy teraz do bliższej przeszłości. W 1951 r. E. J. Remez i B. W. Gniedenko, w związku z jubileuszem M. W. Ostrogradskiego, zajęli się z polecenia Instytutu Matematyki Akademii Nauk USRR zbadaniem archiwum Ostrogradskiego. W wyniku tych czysto historyczno-archiwalnych prac udało się Remezowi znaleźć na świstkach papieru szkice dwóch algorytmów, służących do aproksymacji liczb niewymiernych liczbami wymiernymi. Szkice te naprowadziły Remeza na ciekawe badania własności tych algorytmów. Okazało się w szczególności, że obydwa algorytmy Ostrogradskiego są bardzo szybko zbieżne.

Ostatni przykład pokazuje naocznie, że historia matematyki może się dobrze przysłużyć matematyce współczesnej, wydobywając z zapomnienia, z pyłu wieków, istotne dla nauki, a pozostające w cieniu, idee i wyniki. Oczywiście jest mało prawdopodobne, by coś takiego znaleziono u uczonych odległych epok. Niewątpliwie jednak, gdy zostanie należycie opracowana historia matematyki XIX wieku, odkryć takich będzie niemało.

Znaczenie historii matematyki dla procesu twórczego poszczególnych uczonych nie sprowadza się, oczywiście, do naprowadzenia go na temat zasługujący na opracowanie. Każdy badacz studiuje zazwyczaj dzieje tego zagadnienia, którym się zajmuje. Jest to „lokalna" znajomość historii nauki. Ale wiele prac wielkich, które pozostawiły głęboki ślad, mogło powstać tylko na gruncie szerokiego poglądu na naukę poprzedniej epoki. Trudno sobie na przykład wyobrazić, aby teoria mnogości G. Cantora mogła zostać stworzona przez człowieka, który nie przemyślał gruntownie całego procesu rozwoju analizy matematycznej, w szczególności pojęcia nieskończoności. Historyczne podejście odegrało też pewną rolę w nadaniu kierunku tym badaniom, które doprowadziły F. Kleina

do programu erlangeńskiego, H. Lebesgue'a — do jego teorii miary i całki, D. Hilberta — do analizy nieskończenie wielu zmiennych i prac z logiki matematycznej. Sądzimy, że teraz, bardziej jeszcze niż kiedykolwiek przedtem, każdy zasadniczo nowy krok w matematyce wymaga takiego historycznego podejścia (11).

* *
*

Jedną ze znacznych osobliwości rozwoju nauki w naszych czasach jest to, że obok burzliwego przenikania wyników nauki i metod naukowych do praktycznego życia społeczeństwa i do bytu ludzi, same nauki stają się coraz bardziej zmatematyzowane. Co więcej, matematyka wdziera się bezpośrednio do zagadnień techniki, produkcji, ekonomiki. Równocześnie istnieją takie dziedziny wiedzy, których przedstawiciele wznoszą potężne barykady przeciwko przeniknięciu matematyki do ich nauki. Zwykły argument, jaki wysuwają przy tym jako zupełnie nieodparty, sprowadza się do następującego. Zjawiska badane przez ich naukę są tak skomplikowane, że nie można ich objąć za pomocą ogólnych abstrakcyjnych tez matematyki. Samego życia, czyli według słów Goethego „wiecznej zieleni złotodajnego drzewa przyrody", nie da się wcisnąć w ramy sztucznych określeń i karykaturalnie prostych tez, na których opiera się matematyka. Zjawiska świata nie pozostają niezmienne, zmieniają się stale, i ilościowo, i jakościowo, jakże więc je objąć wzorami matematyki. Taka jest mniej więcej treść argumentacji takich specjalistów antymatematyków.

Historia matematyki może tu właśnie posłużyć jako niezbity dowód, że matematyzacja wielu działów nauki nie przebiegała gładko. Każde zjawisko przyrodnicze wymagało zmiany metod matematycznych, przystosowania ich do tych zadań, które zajmowały przyrodnika. Potrzebny jest pewien czas, aby matematyk i przyrodnik znaleźli wspólny język, aby obydwaj znaleźli ten właściwy sposób postawienia zadania, który w zadowalający sposób opisuje badane zjawiska, by nie podciągać zjawisk przyrodniczych pod istniejące już schematy matematyczne, ale tworzyć nowe schematy i pojęcia, które by mogły pełniej i wierniej oddać prawdziwy stan rzeczy. Proces ten jest bardzo złożony i długotrwały, proces, który nigdy nie może się zakończyć, im więcej bowiem badamy przyrodę, tym więcej znajdujemy w niej osobliwości, tym szczegółowiej musimy wnikać w jej zjawiska. To zaś znaczy, że aparat matematyczny, który okazał się przydatny w pewnym okresie badania tych czy innych

(11) Tezy ostatniego ustępu wysunął w dyskusji nad referatem A. P. Juszkiewicz.

zjawisk, może się okazać niewystarczający w następnych stadiach. Historia matematyki ma w swym arsenale wiele takich przykładów. Prawidłowości, które mogą być przez nią wykryte przy badaniu takich zagadnień, powinny być istotne dla wielu innych nauk.

Mówiąc o roli historii matematyki, nie można pominąć milczeniem jednego z zagadnień stojących teraz przed nauką jako całością, a w rozwiązaniu którego udział historii matematyki powinien być szczególnie wielki. Mamy właściwie na myśli cały kompleks zagadnień dotyczących nauki o myśleniu.

W spisie dyscyplin naukowych nie ma bodajże na razie specjalnej nauki o myśleniu. Różne strony powstających tu zagadnień opisują i badają fizjologia, psychologia, logika, antropologia i filologia. Ale w chwili obecnej na porządku dziennym stanęły takie zagadnienia, na które wymienione wyżej nauki nie dają gotowych odpowiedzi. Wiadomo na przykład jak wielkie znaczenie w nauce i technice ma dobrze zorganizowana informacja (w najszerszym znaczeniu tego słowa). W tej chwili jedną z jej najważniejszych części składowych jest praca nad przekładami z jednego języka na drugi([12]). Dlatego mechanizacja przekładu stała się zadaniem pierwszorzędnej wagi. Ale już pierwsze próby jego rozwiązania pokazują, że uprzednio trzeba przeprowadzić głęboką analizę logiczną języka, zbudować na nowych podstawach jego gramatykę, a do tego potrzebne jest znacznie pełniejsze i głębsze zanalizowanie procesów myślenia, niż robiono to dotychczas.

Takie pogłębione studia procesów myślenia są jednak ważne nie tylko w tym przypadku. Wszystko, co jest ustalone w postaci pewnych reguł i stosunków, można zasadniczo zrealizować konstrukcyjnie na podstawie pewnej interpretacji. Współczesne możliwości techniczne są takie, że konstrukcje tego rodzaju mogą mieć wartość praktyczną. Dobrze na przykład wiadomo, że najprostszy dział logiki — dwuwartościowy rachunek zdań — można interpretować jako algebrę Boole'a. Dlatego konstrukcje przekaźnikowo-stykowe i elektronowe maszyny rachunkowe mogą służyć jako maszyny logiczne. Takie maszyny logiczne odciążą mózg ludzki od wykonywania jednostajnych operacji logicznych i wnioskowań, podobnie jak maszyny do liczenia uwalniają nas od przeprowadzania działań na liczbach według ustalonych reguł. Oczywiście także

([12]) W wiekach średnich nauka posługiwała się zasadniczo dwoma językami: łacińskim i arabskim. W wieku XVIII wystarczała znajomość trzech, czterech języków, by móc śledzić za głównymi wynikami, a na początku naszego stulecia liczba języków, którymi posługiwali się uczeni, wzrosła kilkakrotnie. Obecnie zaś, w czasach rozkładu systemu kolonialnego i przyspieszonego rozwoju wielu dawniej uciśnionych i zacofanych krajów, wielojęzyczność nauki daje się jeszcze wyraźniej odczuć.

i tu ludzie będą podawali maszynie program działań, a maszyna będzie je wykonywała tyle razy ile potrzeba.

Jeśli uznamy aktualność i ważność wskazanych przed chwilą zadań, stojących przed nauką o myśleniu, to już one okazują się wystarczające, by wysnuć wniosek o konieczności wzmożonego rozwoju tej nauki. Wówczas zaś trzeba zrobić i następny krok. Aby nauka o myśleniu mogła rozwiązywać swoje zadania, potrzeba w miarę możności dokładnie zbadać, jak historycznie rozwijało się myślenie. Tymczasem do dziś dnia w nauce najczęściej badano myślenie albo w jego dzisiejszym stanie, albo w okresie poprzedzającym powstanie nauki w dzisiejszym rozumieniu. Należy przypuszczać, że w badaniu metod i sposobów myślenia w okresie historii pisanej poważne miejsce powinna zająć historia nauki. Dotychczas była ona zasadniczo historią osiągnięć myśli, jak się wydaje, musi się stać także historią rozwoju myślenia. I tutaj wkład historii matematyki winien być bardzo wielki, gdyż ze względu na swą specyfikę nauki matematyczne dostarczają szczególnie wiele materiału do badania historii myślenia. Przypuszczalnie przy takim podejściu nawet dobrze zbadane epoki będą wymagały dodatkowych wysiłków ze strony historyków matematyki.

W chwili obecnej szereg uczonych postawiło sobie następujące zadanie. Ponieważ wiele rodzajów czynności umysłowych można w zasadzie zrealizować za pomocą maszyn, czy nie można by spróbować dokonać w pewnym stopniu automatyzacji procesu twórczego. Czy nie można na przykład w pewnych, niech będzie nawet wąskich, działach matematyki zautomatyzować proces poszukiwania nowych twierdzeń i ich dowodów. Myśl badań tego rodzaju jest prosta. Szukając dowodu tego czy innego twierdzenia, człowiek operuje pewną liczbą znanych mu faktów wyrażonych w postaci definicji, aksjomatów, udowodnionych już twierdzeń. Fakty te powiązane są ze sobą według pewnych reguł. Niektóre spośród tych powiązań dają potrzebny dowód. Można zaszyfrować zarówno znane twierdzenia, jak i reguły, za pomocą których łączą się one powiedzmy w łańcuchy. Potem programuje się proces tworzenia takich łańcuchów, najpierw krótkich, a potem dłuższych. W toku takiego chaotycznego poszukiwania powinno się prędzej czy później znaleźć szukany dowód. Przy takim postępowaniu maszyna ma nad człowiekiem w pewnym stopniu wyższość, gdyż szybkość działania maszyny jest bez porównania większa niż u człowieka. Maszyna powinna jednak mieć jeszcze urządzenia, które dokonywałyby automatycznie selekcji łańcuchów poprawnych rozumowań. Ponadto człowiek nie postępuje nigdy przy dowodzie nowych twierdzeń w sposób tak chaotyczny i nie przerzuca w swej świadomości wszystkich możliwych do pomyślenia łańcuchów.

W rzeczywistości, posługując się analogiami i uprzednim doświadczeniem, odrzuca on od samego początku ogromną większość rozumowań, które nie mogą prowadzić do celu. I tu znowu dochodzimy do konieczności przeanalizowania procesu myślenia, wykrycia tej, że tak powiem, strategii badacza, która pozwala mu działać w sposób nie tak rozrzutny, jak opisana wyżej (nie istniejąca jeszcze) maszyna.

Wspomnimy przy sposobności, że istnieje wiele prób zanalizowania i opisania procesu twórczości matematycznej, na przykład w pracach H. Poincarégo i J. Hadamarda. W ramach historii matematyki istnieją możliwości przeprowadzenia takiej analizy pełniej i głębiej.