wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W. Ślebodziński (Wrocław)

O definicji geometrii

W 1935 r. dwaj wybitni matematycy holenderscy J. A. Schouten i D. van Dantzig ogłosili w Rozprawach jednego z Seminariów Uniwersytetu Moskiewskiego [1] interesujący artykuł pt. *Was ist Geometrie?* (Co to jest geometria?). Na czele swej pracy, jako motto, autorowie zamieścili następujące zdanie wyjęte z książki dwóch innych, również wybitnych matematyków, O. Veblena i J. H. C. Whiteheada [4]: „Pewne gałęzie matematyki nazywamy geometrią, ponieważ taką nazwę uważa za odpowiednią, ze względów emocjonalnych lub tradycyjnych, dostateczna liczba ludzi kompetentnych". Dalszy ciąg artykułu zawiera rozważania, których celem jest precyzyjne określenie przedmiotu współczesnych teorii geometrycznych i charakteru ich zagadnień. Nie możemy tutaj streszczać interesujących myśli obu autorów, ponieważ zrozumienie ich wywodów wymaga znajomości wielu współczesnych teorii geometrycznych. Ograniczymy się tylko do stwierdzenia, że konkluzją tych wywodów jest ich punkt wyjścia, tj. przytoczone poprzednio zdanie z książki Veblena i Whiteheada. Niestety, zdania tego nie możemy uznać za zadowalającą definicję geometrii. Nie mówi nam ona nic o przedmiocie i o metodzie badań geometrycznych, gdybyśmy więc chcieli się dowiedzieć, czy pewien dział matematyki należy zaliczyć do geometrii, musielibyśmy rozpisać ankietę wśród „ludzi kompetentnych": tutaj jednak napotykamy nową trudność, nie wiadomo bowiem, kogo mamy zaliczyć do kompetentnych i jaką liczbę takich ludzi należy uznać za decydującą.

Oczywiście nie ulega wątpliwości, że wszyscy czterej wymienieni matematycy zdawali sobie dobrze sprawę ze słabych stron ich definicji geometrii, a zacytowanym zdaniem w żartobliwej formie chcieli wyrazić przekonanie, iż jest rzeczą niemożliwą skonstruowanie definicji, która by po wieczne czasy ściśle odgraniczała od innych te działy matematyki, które mamy zaliczyć do geometrii. Musimy tu dodać, że tym czterem uczonym geometria zawdzięcza wiele nowych a ważnych wyników i teorii, nie można im więc odmówić prawa do uważania się za kompetentnych znawców przedmiotu. Przekonanie ich podzielam w zupeł-

ności i dlatego w dalszym ciągu nie będę się silił na sformułowanie definicji geometrii, bo taka definicja na pewno spotkałaby się z uzasadnioną krytyką. Wytknę sobie natomiast cel skromniejszy, a mianowicie wskażę podstawowe pojęcie, na którym opierają się współczesne teorie geometryczne. Pojęciem tym, leżącym u podstaw wszelkich dotychczasowych teorii geometrycznych, jest pojęcie ruchu rozumianego w sensie, który w dalszym ciągu postaram się dokładniej określić.

Całą matematykę dzielimy w potocznym języku na dwa wielkie działy; jednym z nich jest właśnie geometria. Należałoby tu użyć raczej liczby mnogiej i powiedzieć geometrie, albowiem oprócz tzw. geometrii euklidesowej, tzn. zwykłej geometrii, którą poznajemy w nauce szkolnej i która ma najobszerniejsze zastosowania, istnieją jeszcze inne rodzaje geometrii, jak np. geometria rzutowa, konformiczna, afiniczna oraz ich uogólnienia w najróżniejszych kierunkach. Pozostałe działy matematyki, jak arytmetyka, algebra, rachunek różniczkowy, całkowy itd. obejmujemy zwykle terminem *analizy*, wprowadzonym przez sławnego szwajcarskiego matematyka L. Eulera. Cały ten wielki dział oparty jest na pojęciu liczby jako pojęciu podstawowym. Liczby zaś rozpadają się, jak wiadomo, na różne klasy, z których najprostszą jest klasa liczb naturalnych $1,2,3,\ldots$; z nich konstruujemy za pomocą definicji inne klasy liczb, jak np. liczby ułamkowe, niewymierne itd.

W teorii liczb naturalnych tworzymy różne definicje, określające nowe pojęcia za pomocą znanych pojęć, oraz wypowiadamy twierdzenia, których dowodzimy sprowadzając je rozumowaniem logicznym do poprzednio poznanych twierdzeń. Jasną jest rzeczą, że zarówno konstrukcja definicji, jak i dowodzenia twierdzeń muszą się opierać na pewnych podstawowych pojęciach, które wprowadzamy bez definicji, i na pewnych podstawowych twierdzeniach, zwanych aksjomatami, które przyjmujemy bez dowodu. Układ takich podstawowych pojęć i aksjomatów dla liczb naturalnych podał między innymi matematyk włoski G. Peano. Przytoczymy tutaj cztery aksjomaty jego systemu, oto one:

I. 1 *jest liczbą.*

II. *Jeżeli a jest liczbą, to* $a+1$ *jest liczbą, którą nazywamy następnikiem liczby a.*

III. *Jeżeli następniki dwóch liczb są równe, to same liczby są także równe.*

IV. *Liczba* 1 *nie jest następnikiem żadnej innej liczby.*

(System Peano zawiera jeszcze jeden ważny aksjomat; pomijamy go tutaj, ponieważ do dalszych rozważań nie będzie on potrzebny).

Podobnie każda z geometrii, które poprzednio wymieniliśmy, ma swój własny system podstawowych pojęć i aksjomatów. Dla geometrii zwykłej

(euklidesowej) ustalił taki system matematyk niemiecki D. Hilbert[1]). Jego system zawiera obok innych trzy zasadnicze pojęcia: punkt, prostą i płaszczyznę oraz kilkanaście aksjomatów, z których dla przykładu wystarczy przytoczyć następujące:

I. *Jeżeli A i B są różnymi punktami, to istnieje jedna i tylko jedna prosta przechodząca przez A i B.*

II. *Jeżeli dwa punkty pewnej prostej a leżą na tej samej płaszczyźnie π, to wszystkie punkty prostej a leżą na płaszczyźnie π.*

III. *Jeżeli A i B są punktami pewnej prostej a, to na każdej prostej a' przechodzącej przez dowolny punkt A', na każdej jej stronie istnieje taki punkt B', że odcinki AB i A'B' są równe.*

IV. *Jeżeli prosta a i punkt A leżą na tej samej płaszczyźnie i prosta nie przechodzi przez punkt A, to istnieje najwyżej jedna prosta przechodząca przez punkt A i nie przecinająca prostej a.*

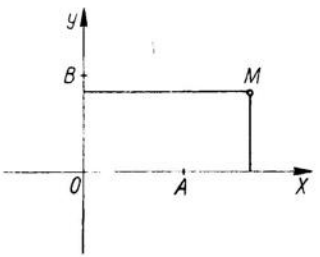
Opierając się na systemie Hilberta można rozumowaniem logicznym uzasadnić wszystkie twierdzenia geometrii euklidesowej. Podobnie układ aksjomatów Peano pozwala w analogiczny sposób uzasadnić wszystkie twierdzenia teorii liczb naturalnych, a następnie teorii innych klas liczb.

Porównajmy teraz przytoczone próbki obu systemów. Pierwszy i czwarty z aksjomatów Peano mają postać zdań kategorycznych, wyróżniających liczbę 1 spośród innych liczb naturalnych: innymi słowy liczba 1 została przedstawiona jako ściśle określone indywiduum w społeczeństwie liczb. Tym samym podobnych cech nabrał jej następnik $1+1=2$ oraz wszystkie inne liczby naturalne, a przez to także i pozostałe liczby. Na próżno szukalibyśmy podobnych aksjomatów w układzie Hilberta; nie ma ich ani w przykładowo przytoczonych próbkach, ani w pozostałych aksjomatach; wszystkie te aksjomaty, z jednym wyjątkiem, mają postać zdań warunkowych, które mówią, że jeżeli prawdą jest poprzednik zdania, to prawdą jest także i jego następnik. Wspomniany wyjątkowy aksjomat *(Vollständigkeitsaxiom)* ma wprawdzie postać zdania kategorycznego, ale zdanie to wyraża pewną właściwość całego świata punktów, prostych i płaszczyzn, a nic nie mówi o żadnym z poszczególnych indywiduów tego świata. Inaczej mówiąc, np. punkty nie mają zupełnie osobistych cech, po których można by je odróżnić od siebie, tak jak odróżniamy liczby. Jeśli więc ktoś chce studiować np. geometrię na

[1]) Przytaczamy tutaj układ aksjomatów Hilberta jako najpowszechniej znany; inny system, lepiej nadający się do rozważań artykułu, można znaleźć w książce W. Kostina [3]. Należy nadmienić, że konstrukcja układu Hilberta została umożliwiona przez liczne prace poświęcone aksjomatyzacji geometrii rozpoczęte jeszcze w starożytności (Euklides), a zakończone w pierwszej połowie XIX wieku (Łobaczewski, Gauss, Bolyai, Beltrami).

jednej z płaszczyzn przestrzeni euklidesowej opisanej aksjomatami Hilberta, to musi sam wybrać dowolnie jakiś punkt na tej płaszczyźnie i dać mu jakieś nazwisko, oznaczyć go np. literą O. Przez punkt O może następnie poprowadzić dwie proste OX i OY prostopadłe i obrać na nich odpowiednio po jednym punkcie A i B tak, żeby odcinki OA i OB były równe (rys. 1).

Jeżeli odcinek OA przyjmiemy za jednostkę, to każdy punkt M płaszczyzny można będzie określić dwiema liczbami, mierzącymi jego odległości od prostych OX i OY i zaopatrzonymi odpowiednio znakami $+$ albo $-$, zależnie od jego położenia w jednej z ćwiartek płaszczyzny. Figurę, która nam posłużyła do ocechowania punktów płaszczyzny, nazywamy *układem odniesienia*. Aksjomaty Hilberta gwarantują, że wszystkie opisane konstrukcje można wykonać i że w ten sposób wszystkie punkty płaszczyzny, a pośrednio i proste, zostaną oznaczone w sposób pozwalający je odróżniać. Dzięki temu jesteśmy obecnie w takiej samej sytuacji jak studiujący teorię liczb. Należy jednak zauważyć, że przyjęty sposób cechowania punktów płaszczyzny zawiera sporo elementów dowolnych: wybór punktu O, wybór jednej z prostych OX i OY, a następnie wybór punktów A i B. Układ odniesienia można więc wybrać nieskończenie wielu sposobami i każdym z nich posługiwać się przy studiowaniu geometrii na płaszczyźnie. Skutkiem tego otrzymujemy nieskończenie wiele geometrii zależnych od wyboru układu. W geometrii płaszczyzny euklidesowej konstatujemy więc pewien relatywizm wynikający z faktu, że punkty nie zostały indywidualnie określone. Jak sobie teraz wyjaśnić fakt, że mimo tego relatywizmu wyniki uzyskane przy użyciu dowolnego układu odniesienia mają obiektywny sens, niezależny od wyboru tego układu? Jest tak dlatego, że mając na płaszczyźnie dwa dowolne układy możemy jeden z nich otrzymać z drugiego wykonując na nim pewien ruch tak, ażeby oba układy pokryły się. Dzięki temu ze sposobu cechowania punktów za pomocą jednego z układów otrzymujemy oznaczenia dokonane za pomocą drugiego: ruch ten jest więc jak gdyby słownikiem, który pozwala przetłumaczyć twierdzenia jednej z wielu geometrii na język drugiej.



Rys. 1

Zanalizujmy ten ruch, odgrywający tak ważną rolę w geometrii płaszczyzny euklidesowej. Zauważmy przede wszystkim, że za pomocą takiego ruchu można każdy punkt M płaszczyzny przenieść do dowolnego innego punktu M'. Dogodną rzeczą tutaj będzie wprowadzić pojęcie *ruchu zerowego*: terminem tym będziemy oznaczali po prostu spoczynek.

Możemy teraz powiedzieć, że istnieje także i taki ruch, który punkt M przenosi do punktu M. Zauważmy dalej, że do każdego ruchu, który punkt M przenosi do punktu M', można dobrać ruch odwrotny, który M' przenosi do M. Jeżeli wreszcie za pomocą ruchu punkt M przeniesiemy do punktu M', a ten znowu za pomocą innego ruchu do punktu M'', to będziemy mogli dobrać taki ruch, który przeniesie M bezpośrednio do M''.

Zamiast mówić o ruchu płaszczyzny, będziemy w dalszym ciągu używali także terminu przekształcenie płaszczyzny; powiemy więc np., że punkt M został przekształcony w punkt M' albo że prosta a została przekształcona w prostą a'. Opisane przed chwilą cechy ruchów możemy obecnie wyrazić w następujący sposób. Ruchy płaszczyzny są przekształceniami mającymi trzy właściwości:

1^0 przekształcenie tożsamościowe (pozostawiające punkty w spoczynku) jest ruchem (zerowym);

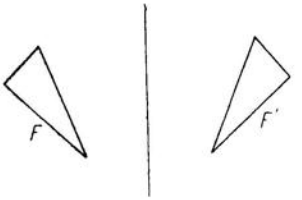
2^0 przekształcenie odwrotne do ruchu jest ruchem;

3^0 przekształcenie, które powstało z kolejnego wykonania dwóch ruchów, jest ruchem.

Właściwości te wyraża się krócej, mówiąc, że ruchy płaszczyzny tworzą grupę przekształceń[2]). Grup przekształceń płaszczyzny można sobie pomyśleć nieskończenie wiele; w dalszym ciągu znajdziemy przykłady innych takich grup. Grupa przekształceń utworzona z ruchów płaszczyzny ma pewne dodatkowe właściwości, które ją wyróżniają spośród innych grup przekształceń płaszczyzny. Jej przekształcenia mianowicie zachowują bez zmiany zarówno długości odcinków, jak i kąty między prostymi. Z tego wynika, że każdą figurę utworzoną z punktów ruch przekształca w figurę przystającą do niej. Skutkiem tego wszystkie twierdzenia, które udowodnimy o figurach geometrycznych posługując się pewnym układem odniesienia, pozostają prawdziwe także i wtedy, gdy zmienimy układ odniesienia. Odnosi się to do twierdzeń, w których nie interweniuje sam układ odniesienia, np. twierdzenie, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. To wszystko np., co udowodnimy o pewnym trójkącie w jednym układzie, jest prawdą także dla tego trójkąta drugiego układu, który powstaje z pierwotnego trójkąta przez ruch (przekształcenie) nakrywający jeden układ drugim. Można także powiedzieć, że geometrię interesują tylko takie własności figur geometrycznych, które pozostają zachowane przy wszelkich przekształceniach grupy ruchów, i badania takich własności uważa za swój cel, bo mają one sens niezależny od wyboru układu. Widzimy więc, że zgodnie z tezą artykułu pojęcie ruchu odgrywa podstawową rolę w geometrii eukli-

[2]) O grupach przekształceń zobacz interesujący artykuł S. Gołąba [2].

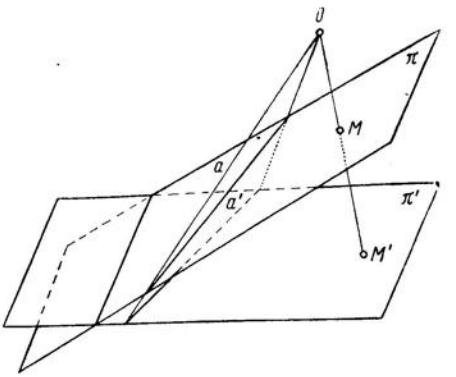
desowej płaszczyzny. Łatwo rozszerzyć ten wynik na przypadek całej przestrzeni euklidesowej. Zauważmy jeszcze, że ruchy płaszczyzny euklidesowej można podzielić na ciągłe i nieciągłe. W pierwszym przypadku przechodzimy od pewnej figury F do figury przystającej, przenosząc figurę F tak, że każdy jej punkt opisuje krzywą ciągłą, w drugim przypadku ruch odbywa się jak gdyby skokiem; zachodzi to wtedy, gdy dwie figury są symetryczne względem pewnej prostej tak jak przedmiot i jego obraz w zwierciadle (rys. 2).



Rys. 2

Poprzednie rozważania można uogólnić także w innym kierunku. Możemy mianowicie oświadczyć: nas nie interesują wyłącznie tylko takie ruchy, które zachowują długości odcinków i kąty, obojętne nam jest także, czy te ruchy przekształcają proste równoległe w równoległe; żądamy tylko, ażeby punkty przechodziły w punkty, proste w proste, punkt i przechodząca przez niego prosta w podobną parę elementów i chcemy studiować tylko takie własności figur geometrycznych, które zachowują się przy wszelkich przekształceniach spełniających wymienione warunki. Stojąc na takim stanowisku możemy skreślić pewne aksjomaty Hilberta lub zastąpić je nowymi.

Skreślimy np. III i IV z przytoczonych poprzednio aksjomatów, a zachowamy I i II. Musimy najpierw zbadać, czy takie ruchy, o jakie nam teraz chodzi, ogólniejsze od ruchów płaszczyzny euklidesowej, istnieją i czy tworzą również grupę przekształceń mającą trzy wymienione poprzednio własności. Łatwo się przekonać, że odpowiedź na ostatnie pytanie jest pozytywna. Mianowicie wyobraźmy sobie dwie różne płaszczyzny π, π' i pewien punkt O leżący poza nimi (rys. 3). Obierzmy następnie na płaszczyźnie π dowolny punkt M i poprowadźmy z punktu O prostą przez punkt M; prosta ta przecina płaszczyznę π' w pewnym punkcie M'. Oczywiście może się zdarzyć, że prosta OM będzie równoległa do płaszczyzny π'; wtedy uzupełnimy tę płaszczyznę tzw. *punktem w nieskończoności* i przyjmiemy go za punkt przecięcia prostej OM z płaszczyzną π'. Każdemu punktowi jednej płaszczyzny będzie w ten sposób odpowiadał oznaczony punkt drugiej, a także każdej prostej jednej



Rys. 3

z płaszczyzn będzie odpowiadała oznaczona prosta drugiej; prostej a na rysunku będzie odpowiadała prosta a' na płaszczyźnie π'. Wykonaną konstrukcję nazywamy, jak wiadomo, *rzutowaniem*. Kołu leżącemu na płaszczyźnie π będzie odpowiadała elipsa na płaszczyźnie π'.

Obróćmy teraz jedną z płaszczyzn tak, ażeby nakryła drugą. Punkty M i M' znajdą się wówczas na jednej i tej samej płaszczyźnie, a opisana konstrukcja, rzutowanie połączone z obrotem, da w rezultacie ruch (przekształcenie) na płaszczyźnie, przeprowadzający punkt M w M'. Jeżeli będziemy zmieniali dowolnie wzajemne położenie płaszczyzn π i π' oraz położenie punktu O, otrzymamy całą rodzinę takich ruchów; łatwo się przekonać, że rodzina ta spełnia wszystkie trzy warunki, których wymagamy od grupy przekształceń. Każdy z ruchów tej nowej grupy przekształca prostą w prostą, odległość jednak dwóch punktów prostej nie pozostaje niezmieniona, lecz ulega powiększeniu lub zmniejszeniu; prosta zostaje jak sznurek gumowy rozciągnięta lub ścieśniona, pozostając nadal prostą. W ten sposób otrzymujemy nowy rodzaj geometrii zwanej *geometrią rzutową płaszczyzny*. Geometria ta jest oparta również na pojęciu pewnej grupy ruchów (przekształceń), ogólniejszej od grupy ruchów euklidesowych a zwanej *grupą przekształceń rzutowych*. Podobnie jak w poprzednim przypadku interesują nas w studium geometrii rzutowej tylko te własności, które są zachowane przy przekształceniach (ruchach) grupy rzutowej. Geometria rzutowa jest uboższa w twierdzenia niż geometria euklidesowa; nie ma w niej np. twierdzenia o sumie kątów trójkąta, albowiem wielkość kąta pomiędzy dwoma prostymi nie zachowuje się w ogólności przy rzutowaniu, co łatwo sprawdzić za pomocą rysunku 3. Matematyka studiującego geometrię rzutową nie interesują także specjalne własności koła, koło bowiem przechodzi za pomocą rzutowania np. w elipsę. Pojęcie koła wobec tego nie ma sensu dla takiego matematyka. Przedmiotem jego zainteresowań są wyłącznie własności tzw. *krzywych stożkowych*, wśród których geometria euklidesowa rozróżnia koła, elipsy, hiperbole i parabole. Każde dwie stożkowe mają co najwyżej cztery (rzeczywiste) punkty wspólne; własność ta jest twierdzeniem prawdziwym w geometrii rzutowej, ponieważ nie ulega zmianie w przekształceniach rzutowych.

Geometria rzutowa ma również ważne zastosowania praktyczne, aczkolwiek mniej rozległe niż zwykła (euklidesowa) geometria. Na jej pojęciach i metodach opiera się geometria wykreślna, mająca doniosłe znaczenie dla techniki, oraz teoria perspektywy malarskiej; studium tej ostatniej teorii było właśnie źródłem, z którego powstała geometria rzutowa jako samodzielna dyscyplina matematyczna.

Zarówno w geometrii euklidesowej, jak i w geometrii rzutowej jako podstawowy element przyjmuje się punkt; nie jest to jednak wspólna

cecha wszystkich teorii geometrycznych. Można np. w przestrzeni euklidesowej lub w rzutowej jako podstawowy element przyjąć prostą, opierając się w dalszym ciągu na grupie ruchów euklidesowych lub rzutowych. Otrzymujemy w ten sposób pewne warianty tych geometrii. Można dalej jako podstawowy element przyjąć kulę i oprzeć się na innej grupie przekształceń, które kulę przekształcają w kulę, niekoniecznie o tym samym promieniu; geometria w ten sposób zdefiniowana nosi nazwę *geometrii konformicznej*. Podobnych uogólnień, prowadzących do konstrukcji różnych geometrii jest wielka rozmaitość — wielka jest także rozmaitość w wyborze elementu podstawowego i w charakterze zagadnień. Jedna tylko cecha jest wspólna: w każdej geometrii jest dana pewna podstawowa grupa przekształceń (ruchów) i w każdej interesują nas tylko te własności figur, które nie ulegają zmianie przy przekształceniach jej podstawowej grupy. Struktura jakiejś geometrii, jej istotne własności zależą wyłącznie od jej podstawowej grupy przekształceń.

Jeżeli wszystkie przekształcenia grupy pewnej geometrii G_1 wchodzą w skład obszerniejszej grupy pewnej innej geometrii G_2, to jest jasne, że każde twierdzenie udowodnione w geometrii G_2 będzie także prawdziwe w geometrii G_1, albowiem wyraża ono własność pewnej figury, pozostającą bez zmiany, gdy figurę poddajemy przekształceniom właściwym geometrii G_2, a więc tym samym także przekształceniom właściwym G_1. Oczywiście nie zawsze jest na odwrót. Jeżeli więc za podstawową dla pewnej geometrii przyjmiemy grupę tak obszerną, ażeby zawierała w sobie przekształcenia wszystkich grup innych geometrii, to otrzymamy geometrię najogólniejszą w tym znaczeniu, że każde z jej twierdzeń będzie prawdziwe we wszystkich innych geometriach. Geometria taka nazywa się *topologią*. Pewne, aczkolwiek niezupełnie dokładne, wyobrażenie o przekształceniach jej grupy podstawowej może dać ruch płynącej wody; jeżeli na takiej wodzie umieścimy związaną nitkę, mającą początkowo kształt koła, to podczas ruchu przyjmie ona kształt najrozmaitszych krzywych, nigdy jednak nie powstanie z niej krzywa otwarta (o dwóch końcach) ani też krzywa z węzłami. Topologia ustala wspólne własności wszystkich krzywych, które przez opisany ruch powstają z koła.

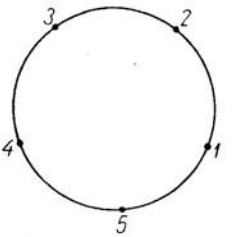
Poprzednie uwagi nasuwają pomysł następującej definicji: Geometria składa się z tych gałęzi matematyki, w których operują grupy ruchów (przekształceń) wykonywanych na pewnych obiektach, a zadaniem geometrii jest odkrycie i zbadanie tych własności obiektów, które nie ulegają zmianie przy ruchach odpowiedniej grupy. Definicja taka spotkałaby się jednak ze sprzeciwem, są bowiem takie działy matematyki, w których wykonujemy przekształcenia na pewnych przedmiotach, a których mimo to do geometrii się nie zalicza. Przykładem takiej gałęzi

matematyki jest nauka o równaniach algebraicznych. Weźmy sobie np. równanie stopnia piątego

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Wiadomo, że równanie takie ma zawsze pięć pierwiastków (rzeczywistych lub urojonych), przez długi czas nie było jednak wiadomo, czy pierwiastki tego równania można zawsze obliczyć za pomocą wzorów podobnych do dobrze znanych wzorów na pierwiastki równania stopnia drugiego lub inaczej, czy rozwiązanie równania stopnia piątego da się sprowadzić do rozwiązania równań stopni niższych, dla których takie wzory istnieją. Odpowiedź na to pytanie wypadła negatywnie a uzyskano ją następującą metodą:

Przedstawmy sobie pierwiastki równania jako punkty umieszczone na kole (rys. 4). W zagadnieniu rozważanym nie chodzi nam o ten lub inny pierwiastek, dlatego jest rzeczą obojętną, jak te pierwiastki umieścimy na kole; możemy np. przesunąć je o jedno lub dwa miejsca w kierunku od 1 do 2, 3 itd. lub na przykład zamienić miejsca drugiego i trzeciego pierwiastka. Inaczej mówiąc, pierwiastki nie mają tutaj żadnych indywidualnych cech tak jak punkty przestrzeni euklidesowej i tak jak na punktach wykonujemy na nich pewne ruchy, które odbywają się skokami, a zwane są *permutacjami pierwiastków*. Permutacje te tworzą grupę, mają bowiem trzy cechy, za pomocą których scharakteryzowaliśmy poprzednio grupę przekształceń; liczba ogółu permutacji wynosi 120. Otóż bliższe zbadanie tej grupy ruchów pozwoliło dać odpowiedź na postawione poprzednio pytanie. Istnieje więc w każdym razie pewne podobieństwo między geometrią np. płaszczyzny euklidesowej a teorią równań algebraicznych. Podobieństwo to polega na tym, że w obu naukach występują pewne przedmioty bez cech indywidualnych (punkty, pierwiastki) i że w obu wykonujemy na tych przedmiotach ruchy pewnej grupy. Druga z tych nauk nie jest mimo to geometrią; jednak dzięki temu, że istnieje w niej pewien relatywizm tak jak w geometrii euklidesowej, możemy ją zgeometryzować, tzn. sprowadzić jej zagadnienia do rozwiązania pewnego zagadnienia geometrycznego.



Rys. 4

Znany i wybitny matematyk niemiecki F. Klein napisał przed kilkudziesięciu laty książkę pt. *Dwudziestościan i równanie piątego stopnia*. Dwudziestościanem nazywamy, jak wiadomo, bryłę foremną ograniczoną dwudziestoma przystającymi trójkątami równobocznymi. Bryłę taką możemy obracać na 60 sposobów tak, ażeby zajmowała stale to samo miejsce w przestrzeni; ktoś, nie obserwujący ruchu, nie może więc poznać, czy ruch

się odbył czy nie. Ruchy te tworzą również grupę związaną ściśle z grupą permutacji, o których poprzednio była mowa. Otóż Klein w książce swej wykazał, że badanie równania stopnia piątego sprowadza się do badania grupy obrotów dwudziestościanu i w ten sposób zgeometryzował zagadnienie algebraiczne.

Podobną uwagę można uczynić o wielu innych działach matematyki, w których operujemy grupą przekształceń na pewnych przedmiotach; w nich także można zgeometryzować odpowiednią dziedzinę, a geometryzacja taka często ułatwia rozwiązanie zagadnienia.

Chociaż więc proponowana definicja geometrii może się spotkać ze sprzeciwem „ludzi kompetentnych", to jednak można, zdaje się, powiedzieć, że nie odgraniczając ściśle geometrii od innych działów matematyki obejmuje te z nich, które w ten lub w inny sposób dają się zgeometryzować.

Prace cytowane

[1] D. van Dantzig, J. A. Schouten, *Was ist Geometrie?* Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis samt Anwendungen aus Geometrie, Mechanik und Physik, 2-3 (1935), str. 15-50.

[2] S. Gołąb, *O pojęciu przekształcenia w matematyce*, Matematyka 2 (14) (1951), str. 1-12.

[3] W. Kostin, *Podstawy geometrii*, Warszawa 1952.

[4] O. Veblen and J. H. C. Whitehead, *The foundations of differential Geometry*, Cambridge Tracts in Mathem. and Math. Phys. 29, Cambridge 1932.