wmptm 1897

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

O trójkątach pitagorejskich mających jednakowe pola

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Trójkątem pitagorejskim nazywamy trójkąt prostokątny o bokach, których długości są liczbami naturalnymi.

Jak wiadomo, P. Fermat dowiódł, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n nieprzystających trójkątów pitagorejskich o jednakowych polach.

Udowodnimy tu sposobem elementarnym twierdzenie, z którego natychmiast wynika twierdzenie Fermata.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli spośród $n\geqslant 1$ trójkątów pitagorejskich o różnych przeciwprostokątnych i jednakowym polu co najmniej jeden ma przeciwprostokątną nieparzystą, to istnieje $n+1$ trójkątów pitagorejskich o różnych przeciwprostokątnych i jednakowym polu, z których jeden ma przeciwprostokątną nieparzystą.*

Dowód. Trójkąt pitagorejski o bokach a,b,c będziemy oznaczali symbolem (a,b,c).

Niech n oznacza liczbę naturalną $\geqslant 1$. Niech będzie n trójkątów pitagorejskich (a_k,b_k,c_k), gdzie $a_k<b_k<c_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$, o różnych przeciwprostokątnych c_k i jednakowych polach Δ. Przypuśćmy, że liczba c_1 jest nieparzysta.

Wprowadźmy oznaczenia

$$(1)\qquad a'_k=2(b_1^2-a_1^2)c_1a_k,\quad b'_k=2(b_1^2-a_1^2)c_1b_k,\quad c'_k=2(b_1^2-a_1^2)c_1c_k \qquad \text{dla}\quad k=1,2,\ldots,n,$$

$$(2)\qquad a'_{n+1}=(b_1^2-a_1^2)^2,\quad b'_{n+1}=4a_1b_1c_1^2,\quad c'_{n+1}=4a_1^2b_1^2+c_1^4.$$

Wykażemy, że trójkąty (a'_k,b'_k,c'_k) $(k=1,2,\ldots,n+1)$ spełniają warunki twierdzenia 1.

Rzeczywiście, z założenia o trójkątach (a_k,b_k,c_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ wynika, że $a_kb_k=2\Delta$ dla $k=1,2,\ldots,n$. Ponieważ pole trójkąta (a'_k,b'_k,c'_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ w myśl (1) jest równe

$$\tfrac{1}{2}a'_kb'_k=2(b_1^2-a_1^2)^2c_1^2a_kb_k=[2(b_1^2-a_1^2)c_1]^2\Delta,$$

pole zaś trójkąta $(a'_{n+1}, b'_{n+1}, c'_{n+1})$ wobec (2) jest równe

$$\tfrac{1}{2} a'_{n+1} b'_{n+1} = 2(b_1^2 - a_1^2)^2 c_1^2 a_1 b_1 = [2(b_1^2 - a_1^2) c_1]^2 \Delta,$$

więc trójkąty (a'_k, b'_k, c'_k) $(k=1,2,\ldots,n+1)$ mają jednakowe pola.

Ze wzorów (1) wynika bezpośrednio, że trójkąty (a'_k, b'_k, c'_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ mają różne przeciwprostokątne, gdyż w myśl założenia o trójkątach (a_k, b_k, c_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ wszystkie liczby $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są różne. Ze wzorów (1) wynika nadto, że wszystkie liczby c'_k $(k=1,2,\ldots,n)$ są parzyste, natomiast ze wzorów (2) wynika, że liczba c'_{n+1} jest nieparzysta, gdyż liczba c_1 jest nieparzysta.

Wszystkie liczby c'_k $(k=1,2,\ldots,n+1)$ są więc różne i jedna z nich, c'_{n+1}, jest nieparzysta.

Twierdzenie 1 zostało zatem udowodnione.

Rozpatrzmy bliżej najprostszy szczególny przypadek twierdzenia 1, gdy $n=1$. Najmniejszym trójkątem pitagorejskim, do którego możemy zastosować twierdzenie 1, jest trójkąt $(a_1, b_1, c_1) = (3,4,5)$ (którego przeciwprostokątna c_1 jest nieparzysta i dlatego spełnia warunek twierdzenia 1). Stosując twierdzenie 1, otrzymamy dwa trójkąty pitagorejskie (a'_1, b'_1, c'_1) i (a'_2, b'_2, c'_2) o jednakowym polu. W myśl wzorów (1) i wobec równości $2(b_1^2 - a_1^2) c_1 = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$ mamy równości $a'_1 = 70 \cdot 3 = 210$, $b'_1 = 70 \cdot 4 = 280$, $c'_1 = 70 \cdot 5 = 350$, a wobec wzorów (2) znajdujemy $a'_2 = (4^2 - 3^2)^2 = 49$, $b'_2 = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^2 = 1200$, $c'_2 = 4 \cdot 3^2 \cdot 4^2 + 5^4 = 1201$. Otrzymaliśmy więc dwa trójkąty pitagorejskie (210, 280, 350) oraz (49, 1200, 1201) o różnych przeciwprostokątnych (z których jedna jest nieparzysta) i o jednakowych polach $(2 \cdot 7 \cdot 5)^2 6 = 70^2 \cdot 6 = 29400$. Jeżeli do tych trójkątów zastosujemy twierdzenie 1 (dla $n=2$), otrzymamy trzy trójkąty pitagorejskie o różnych przeciwprostokątnych i jednakowych polach

$$\left(2(1200^2 - 49^2) \cdot 1202\right)^2 \cdot 70^2 \cdot 6;$$

wszystkie boki tych trójkątów mają po więcej niż 10 cyfr.

Nasuwa się pytanie, jakie są najmniejsze dwa trójkąty pitagorejskie o różnych przeciwprostokątnych i o jednakowym polu. Pytanie to daje się rozwiązać w następujący sposób:

Jak wiadomo, wszystkie tak zwane *właściwe rozwiązania* równania $x^2 + y^2 = z^2$ w liczbach naturalnych x, y, z (tj. takie, w których x, y i z nie mają wspólnego dzielnika większego od 1), w których y jest liczbą parzystą, otrzymujemy ze wzorów

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

gdzie m i n są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, $m > n$; jedna z liczb m, n jest parzysta, a druga nieparzysta (zob. [5], str. 232). Wszyst-

kie więc właściwe rozwiązania równania $x^2+y^2=z^2$, gdzie y jest liczbą parzystą, możemy ustawić w ciąg nieskończony porządkując je według rosnących m, a dla jednakowych m — według rosnących n. W ten sposób możemy utworzyć następującą tablicę:

TABLICA 1

m	n	x	y	z	pole	m	n	x	y	z	pole
2	1	3	4	5	6	7	4	33	56	63	924
3	2	5	12	13	30	7	6	13	84	85	546
4	1	15	8	17	60	8	1	63	16	65	1008
4	3	7	24	25	84	8	3	55	48	73	1320
5	2	21	20	29	210	8	5	39	80	89	1560
5	4	9	40	41	180	8	7	15	112	113	840
6	1	35	12	37	210	9	2	79	36	83	1422
6	5	11	60	61	330	9	4	65	72	97	2340
7	2	45	28	53	530	9	6	45	108	117	2430

Z tablicy 1 widzimy, że już trójkąty (21, 20, 29) i (35, 12, 37) mają jednakowe pola równe 210 oraz że mniejszych pierwotnych trójkątów pitagorejskich, tj. dających rozwiązanie właściwe równania $x^2+y^2=z^2$, o różnych przeciwprostokątnych i jednakowym polu, nie ma.

Gdybyśmy chcieli uwzględnić również niepierwotne trójkąty pitagorejskie o przeciwprostokątnych mniejszych niż 37, to należałoby jeszcze wziąć pod uwagę trójkąty z tablicy 2.

TABLICA 2

x	y	z	pole
6	8	10	24
9	12	15	54
12	16	20	96
15	20	25	150
16	24	30	216
21	28	35	294
10	24	26	120
30	16	34	240

Ale uwzględniając jeszcze i te trójkąty, prócz wypisanych poprzednio, widzimy, że nie ma trójkątów pitagorejskich o różnych przeciwprostokątnych mniejszych niż 37 (ani też o polach mniejszych niż 210), mających równe pola. Najmniejszą zatem parą trójkątów pitagorejskich o różnych przeciwprostokątnych i jednakowym polu jest para trójkątów (21, 20, 29) i (35, 12, 37).

Z tablicy 1 wynika, że trójkąt (15, 112, 113) ma pole $840=4\cdot 210$, a więc cztery razy większe niż każdy z trójkątów (21, 20, 29) i (35, 12, 37), a zatem pole równe polu każdego z trójkątów (42, 40, 58) i (70, 24, 74) (otrzymanych z poprzednich przez podwojenie wszystkich boków). Mamy więc trzy trójkąty pitagorejskie o różnych przeciwprostokątnych i jednakowym polu: (15, 112, 113), (42, 40, 58) i (70, 24, 74). Boki tych trójkątów są liczbami co najwyżej trzycyfrowymi, a więc są znacznie mniejsze niż boki trzech trójkątów pitagorejskich o jednakowym polu, otrzymanych poprzednio za pomocą twierdzenia 1.

Nie każdy z tych trzech trójkątów jest pierwotny (por. str. 165). Udowodniono, że najmniejsze pole wspólne trzem pierwotnym trójkątom jest równe 13123220, a odpowiadające temu polu trójkąty pierwotne są (4485, 5852, 7373), (19019, 1380, 19069) i (3059, 8580, 9190). Znaleziono też cztery trójkąty pitagorejskie o różnych przeciwprostokątnych i jednakowych polach wynoszących 314880: (518, 1320, 1418), (280, 2442, 2458), (231, 2960, 2969), (111, 6160, 6161), oraz następujących pięć trójkątów pitagorejskich o polu 73513440: (2805, 52416, 52491), (3168, 46410, 46518), (5236, 28028, 28564), (6006, 24480, 25206), (8580, 17136, 19164).

Zauważmy, że trójkąty prostokątne o jednakowym polu i jednakowych przeciwprostokątnych muszą być przystające. Rzeczywiście, jeżeli (x_1, y_1, z) i (x_2, y_2, z) są takimi trójkątami oraz $x_1 \geqslant y_1$, $x_2 \geqslant y_2$, to $x_1 y_1 = x_2 y_2$ oraz $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$; stąd $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$ oraz $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$, co daje $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ oraz $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$; mamy zatem $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$, co dowodzi, że trójkąty są przystające. Nie ma więc nieprzystających trójkątów prostokątnych o jednakowym polu i jednakowych przeciwprostokątnych.

Istnieje oczywiście tylko skończona liczba trójkątów pitagorejskich o danym polu Δ, gdyż przyprostokątne takich trójkątów muszą być dzielnikami liczby 2Δ. Natomiast z przesłanek dowodu twierdzenia 1 łatwo wywnioskować, że na przykład istnieje nieskończenie wiele nieprzystających trójkątów prostokątnych o bokach wymiernych i o polu równym 6.

Istotnie, z przesłanek tych wynika, że dla wszelkich $n \geqslant 1$ trójkątów pitagorejskich o polu Δ i o różnych przeciwprostokątnych, z których jedna jest nieparzysta, istnieje $n+1$ trójkątów pitagorejskich o polu Δd^2, gdzie d jest liczbą naturalną, i o różnych przeciwprostokątnych, z których jedna jest nieparzysta. Stosując $n-1$ razy twierdzenie 1 do trójkąta (3, 4, 5), otrzymamy n trójkątów pitagorejskich o różnych przeciwprostokątnych i o polu $6m^2$, gdzie m jest liczbą naturalną. Zmniejszając boki każdego z tych trójkątów m razy, otrzymamy n nieprzystających trójkątów prostokątnych o bokach wymiernych i o polu 6. Ponieważ liczba naturalna n jest dowolna, więc istnieje nieskończenie wiele nieprzystających trójkątów prostokątnych o bokach wymiernych i o polu 6.

Fermat dowiódł, że nie istnieje żaden trójkąt pitagorejski, którego pole wyraża się kwadratem liczby naturalnej [1]).

Łatwo jest dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje n nieprzystających trójkątów pitagorejskich o równych obwodach. Rzeczywiście, łatwo spostrzec, że dwa różne pierwotne trójkąty pitagorejskie

[1]) Dowód elementarny tego twierdzenia podałem w pracy [7].

nie są podobne, a jest ich nieskończenie wiele. Weźmy n różnych takich trójkątów (a_k, b_k, c_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ i oznaczmy $a_k+b_k+c_k=s_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Niech $s=s_1 s_2 \ldots s_n$, $a'_k=a_k s/s_k$, $b'_k=b_k s/s_k$, $c'_k=c_k s/s_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Mamy $a'_k+b'_k+c'_k=s$ $(k=1,2,\ldots,n)$ i żadne dwa spośród trójkątów pitagorejskich (a'_k, b'_k, c'_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ nie są podobne, a więc tym bardziej nie są przystające.

Tak na przykład trójkąty (15, 20, 25) i (10, 24, 26) mają jednakowe obwody. Również trójkąty (30, 40, 50), (20, 48, 52) i (45, 24, 51) mają jednakowe obwody. Znaleziono też trzy pierwotne trójkąty pitagorejskie o tym samym obwodzie: są to trójkąty (3255, 5032, 5993), (7055, 168, 7057) i (119, 7080, 7081) (zob. [1]).

Łatwo dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n nieprzystających trójkątów pitagorejskich o tej samej przeciwprostokątnej.

Rzeczywiście, niech dla liczby naturalnej n będzie

$$c = \prod_{k=3}^{n+2} (k^2+1).$$

Liczby $c/(k^2+1)$ są więc naturalne dla $k=3,4,\ldots,n+2$, a więc też i liczby

$$a_k = \frac{2kc}{k^2+1}, \qquad b_k = \frac{k^2-1}{k^2+1}c, \qquad (k=3,4,\ldots,n+2)$$

są naturalne. Wobec tożsamości

$$c^2 = \left(\frac{2kc}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}c\right)^2$$

jest

$$a_k^2+b_k^2 = c^2 \qquad (k=3,4,\ldots,n+2).$$

Mamy $b_k = c-2c/(k^2+1)$, skąd $b_3<b_4<\ldots<b_{n+2}$. Nadto

$$b_k - a_k = \frac{(k-1)^2-2}{k^2+1}c > 0 \qquad (k=3,4,\ldots,n+2).$$

A więc w trójkątach pitagorejskich (a_k, b_k, c) $(k=3,4,\ldots,n+2)$ większe przyprostokątne rosną, skąd wnosimy, że żadne dwa z tych trójkątów nie mogą przystawać do siebie.

Nieco inną, mniej elementarną metodą, Ch. I. Shedd [8] w 1949 r. wyznaczył 64 nieprzystające trójkąty pitagorejskie o tej samej przeciwprostokątnej $2576450045 = 5\cdot 13\cdot 17\cdot 29\cdot 37\cdot 41\cdot 53$.

Łatwo wreszcie dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n nieprzystających trójkątów pitagorejskich o tej samej przyprostokątnej.

Istotnie, niech n oznacza liczbę naturalną i niech

$$b_k = 2^k(2^{2n-2k}-1), \quad c_k = 2^k(2^{2n-2k}+1) \quad (k = 0,1,2,\ldots,n-1).$$

Liczby $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ są oczywiście różne oraz

$$c_k^2 - b_k^2 = (2^{n+1})^2 \quad (k = 0,1,2,\ldots,n-1).$$

Podstawiając $a = 2^{n+1}$ otrzymujemy więc n trójkątów pitagorejskich (a, b_k, c_k) $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ o tej samej przyprostokątnej a i o różnych przeciwprostokątnych, z których zatem żadne dwie nie są przystające.

Prace cytowane

[1] A. S. Anema, *Pythagorean triangles with equal perimeters*, Scripta Mathematica 15 (1949), str. 89.

[2] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. 2, New York 1934.

[3] W. Douglas, *Problem E 283, solution*, The American Mathematical Monthly 45 (1945), str. 118.

[4] D. L. Mac Kay, *Problem E 327, solution*, The American Mathematical Monthly 46 (1949), str. 169-170.

[5] W. Sierpiński, *Teoria liczb*, wyd. III, Warszawa-Wrocław 1950.

[6] — *Trójkąty pitagorejskie*, Monografie Popularnonaukowe, Matematyka, Warszawa 1954.

[7] — *Elementarny dowód pewnego twierdzenia Fermata*, Matematyka VII.4 (1954), str. 3-5.

[8] Ch. L. Shedd, *Another triplet of equiareal triangles*, Scripta Mathematica 11 (1945), str. 273.

[9] — *A hypotenuse common to 64 primitive right tringles*, Scripta Mathematica 15 (1949), str. 132.

[10] W. P. Whitlock, Jr., *Rational right triangles with equals areas*, Scripta Mathematica 9 (1943), str. 154-161.