wmptm 1897

H. STEINHAUS (Wrocław)

O trójkątach

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W planimetrii szkolnej mówi się o trójkątach równoramiennych i równobocznych, o ostrokątnych i rozwartokątnych, słowem klasyfikuje się je według kształtu. Celem niniejszego artykułu jest unaocznienie tej klasyfikacji.

Mamy na myśli trójkąty leżące na wspólnej płaszczyźnie i jeżeli będzie mowa o ich przesuwaniu, to będzie to ruch po tej płaszczyźnie zasadniczej. Ponieważ klasyfikacja będzie dotyczyła kształtu, a nie wielkości, więc ograniczymy się do trójkątów o obwodzie 1 — to zastrzeżenie obowiązuje aż do odwołania. Wszystkie takie trójkąty można podzielić na klasy, zaliczając do jednej i tej samej klasy wszystkie trójkąty wzajemnie przystające; tak więc mówiąc o trójkącie o bokach $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{12}$ będziemy mieli na myśli nie jakiś jeden trójkąt o tych bokach, lecz całą klasę złożoną z tego trójkąta i z wszystkich do niego przystających. Zgodnie ze zwyczajem elementarnej planimetrii nie będziemy uznawali za przystające dwa trójkąty, które nie dadzą się nasunąć jeden na drugi, choć są symetryczne, to znaczy dadzą się nałożyć jeden na drugi ruchem poprzez przestrzeń.

Podamy za chwilę warunki, którym trzeba poddać liczby rzeczywiste x,y,z, ażeby trójkę (x,y,z) można było uważać za trójkę długości boków trójkąta. Biorąc wszelkie możliwe trójki (x,y,z) otrzymamy wszystkie trójkąty, ale nie każda trójka da trójkąt.

Niech trójka (x,y,z) składa się z samych różnych liczb i niech będzie możliwe zbudowanie trójkąta, w którym boki x,y,z następują po sobie tak jak cyfry I, V i IX na zegarku — umawiamy się rozumieć (x,y,z) jako symbol tego właśnie trójkąta. Wobec tego symbol $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12})$ oznacza to samo, co symbol $(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3})$, ale co innego niż symbol $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12})$; ten ostatni symbol oznacza mianowicie trójkąt symetryczny do trójkąta oznaczonego symbolem $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12})$, a te dwa trójkąty nie są przystające. Jeżeli dwa trójkąty są symetryczne, ale nie przystające (jak w przykładzie właśnie podanym), to rysując je tak, żeby kolejność boków według ich wielkości malejącej dawała obieg wskazany przez cyfry I, V, IX na zegarku, pozostaniemy w jednym przypadku

w zgodzie z regułą czytania symbolu (x,y,z), w drugim przypadku nie. Trójkąt zgodny nazwiemy *prawoskrętnym*, niezgodny *lewoskrętnym*.

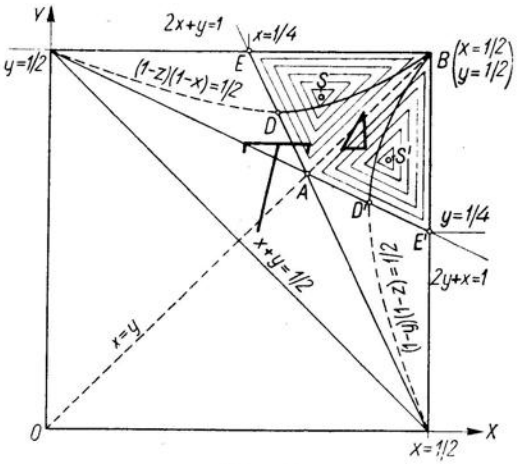
Teraz spiszemy warunki, którym poddamy symbole (x,y,z):

(1) $0 \leqslant x, \quad 0 \leqslant y, \quad 0 \leqslant z,$

(2) $y+z \geqslant x, \quad z+x \geqslant y, \quad x+y \geqslant z,$

(3) $x+y+z=1.$

Będziemy mówili wyłącznie o trójkach (x,y,z) spełniających warunki (1), (2) i (3) i każdy geometryczny odpowiednik takiej trójki uznamy za trójkąt, interpretując symbol (x,y,z) w sposób poprzednio opisany. Tak otrzymamy zupełny przegląd kształtów trójkątów w planimetrii, gdyż trójki (x,y,z) dostarczą nam wszystkich trójkątów o obwodach jednostkowych, z postaciami granicznymi, czyli z trójkątami zdegenerowanymi włącznie.



Rys. 1

Wprowadzimy teraz płaszczyznę pomocniczą, czyli płaszczyznę rysunku zaopatrzoną w osi OX i OY. Na tej płaszczyźnie każdy trójkąt (x,y,z) otrzyma obraz (x,y), to jest punkt o współrzędnych (x,y). Z tego obrazu można znaleźć trójkąt (x,y,z), bo (3) daje $z=1-x-y$, co pozwala obliczyć z, gdy znamy x i y.

Z (1), (2) i (3) wynika, że obrazy trójkątów wypełniają obszar trójkątny T o wierzchołkach $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2},)$, $(\frac{1}{2}, 0)$. Środek ciężkości (będziemy mówili krócej „środek") A tego obszaru ma współrzędne $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ — punkt A jest więc obrazem trójkąta $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ — obliczyliśmy z z warunku (3), jak poprzednio wyjaśniono. Zatem A jest obrazem trójkąta równobocznego.

Obrazy trójkątów równoramiennych leżą na liniach odpowiadających warunkom $y=z$ lub $z=x$, lub $x=y$. Wobec (3) równania tych linii na płaszczyźnie pomocniczej są następujące:

(4) $$2y+x=1, \quad 2x+y=1, \quad x=y.$$

Linie (4) dzielą obszar T na 6 trójkątów. Dwa z nich składają się na deltoid Δ o przekątni AB: punkt B ma współrzędne $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i jest obrazem trójkąta $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$; jest to trójkąt zdegenerowany o dwóch kątach prostych i jest zarazem równoramienny (o podstawie punktowej) i pro-

stokątny. Dwa inne wierzchołki deltoidu Δ — nazwiemy je E i E' — są dwoma różnymi obrazami jednego trójkąta zdegenerowanego $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$; jest on też równoramienny o zerowych kątach przy podstawach.

Odcinek AB składa się z obrazów trójkątów równoramiennych; dzieli on wnętrze deltoidu Δ na dwa obszary trójkątne, AEB i $AE'B$. Pierwszy z nich zawiera obrazy trójkątów lewoskrętnych, a drugi obrazy prawoskrętnych. Punkty odcinka AE (i AE') odpowiadają trójkątom równoramiennym o kącie wierzchołkowym co najmniej 60°; ten kąt osiąga w A minimum 60°, a w E (i w E') maksimum 180°. Odcinek EB (i $E'B$) składa się z obrazów trójkątów zdegenerowanych, to jest takich, których wierzchołki leżą na jednej prostej (trójkąty o polu zerowym).

Zauważmy, że trójkąt pomocniczy T jest rzutem prostopadłym na płaszczyznę pomocniczą trójkąta R leżącego w przestrzeni. Gdy w O wystawimy oś OZ prostopadłą do płaszczyzny OXY i przypiszemy trójkom (x,y,z) spełniającym (1), (2) i (3) punkty (x,y,z) przestrzeni kartezjańskiej XYZ, wtedy te punkty wypełnią trójkąt równoboczny R; powstaje on z przecięcia płaszczyzny $x+y+z=1$, na której leży, płaszczyznami $y+z=\frac{1}{2}$, $z+x=\frac{1}{2}$ i $x+y=\frac{1}{2}$. Trójkąt R można podzielić na trzy deltoidy prostokątne kreśląc z jego środka prostopadłe do jego boków; deltoid Δ jest rzutem prostopadłym na płaszczyznę pomocniczą jednego z tych trzech deltoidów.

To rozważanie pokazuje równouprawnienie deltoidów składowych trójkąta R, które odpowiada równouprawnieniu osi X, Y, Z oraz równouprawnieniu liczb x,y,z w warunkach (1), (2) i (3). Z niego wynika, że w każdym deltoidzie znajdziemy obrazy wszystkich możliwych trójkątów. Wracając do rysunku stwierdzamy, że w Δ mamy już obrazy wszystkich trójkątów.

Jak już wiemy, na bokach EB i EB' leżą obrazy samych i wszystkich trójkątów zdegenerowanych; przy tym punktom symetrycznym względem przekątni AB odpowiadają te same trójkąty zdegenerowane — pamiętajmy, że wśród tych trójkątów nie można odróżnić lewoskrętnych od prawoskrętnych.

Obrazy trójkątów równoramiennych znajdujemy na AB, na AE i na AE' — tutaj znowu każdej parze punktów, z których jeden leży na AE a drugi na AE' symetrycznie względem AB, odpowiada jeden i ten sam trójkąt równoramienny — tu także nie ma odróżnienia skrętów.

Trójkąty prostokątne spełniają co najmniej jeden z warunków

$$(5) \qquad y^2+z^2=x^2, \quad z^2+x^2=y^2, \quad x^2+y^2=z^2.$$

Po wyrugowaniu zmiennej z ze związków (3) i (5) otrzymamy trzy równania

$$(6) \quad (1-x)(1-y)=\tfrac{1}{2}, \quad (y+x)(1-x)=\tfrac{1}{2}, \quad (x+y)(1-y)=\tfrac{1}{2}.$$

Każde z równań (6) daje hiperbolę na płaszczyźnie rysunku. Hiperbola $(1-x)(1-y)=\frac{1}{2}$ nigdzie nie przecina deltoidu Δ. Dwie pozostałe są symetryczne względem AB; jedna z nich przecina EA w D, druga $E'A$ w D' — każdy z punktów D i D' jest obrazem tego samego trójkąta równoramiennego i prostokątnego. Część deltoidu Δ zawarta między hiperbolami odpowiada trójkątom ostrokątnym, reszta — rozwartokątnym.

Tak więc deltoid Δ jest jak gdyby mapą wszelkich trójkątów, a raczej wszelkich kształtów trójkątnych, bo każdemu kształtowi odpowiada jakiś punkt lub dwa punkty należące do deltoidu. To odwzorowanie jest ciągłe, gdyż małym zmianom kształtu (to jest małym zmianom liczb x,y,z) odpowiadają małe przesunięcia punktów-obrazów na mapie. Nie jest ono jednak jednoznaczne, bo niektóre kształty mają dwa obrazy na mapie. Chcąc usunąć tę wadę musimy skleić brzeg AEB deltoidu z brzegiem $AE'B$ tak, żeby z każdej pary punktów położonych symetrycznie względem AB na obu brzegach zrobić jeden punkt — przy tym wnętrze trójkąta AEB ma nadal pozostać odróżnialne od wnętrza trójkąta $AE'B$. Papierowy model tak zdefiniowanego tworu otrzymuje się przez sklejenie wzdłuż boków dwóch trójkątów przystających i położonych na sobie. Gdyby model był gumowy, wtedy moglibyśmy nim opiąć kulę; dlatego mówimy, że jest to twór homeomorficzny ze sferą (czyli powierzchnią kulistą).

Tym sposobem uzyskaliśmy jednoznaczną i ciągłą mapę wszystkich kształtów trójkątnych. Można na tej mapie umieścić punkt E deltoidu w biegunie północnym globusa, punkt A w południowym, łuki hiperbol (6) na równiku, na którym znajdzie się punkt B w długości geograficznej 0°, a punkt D (i D') w długości 180°, tak że cały brzeg $AEBE'A$ deltoidu znajdzie się na południku Greenwich (pełnym, tj. złożonym ze wszystkich punktów o długości geograficznej 0°, o długości 180° i z obu biegunów). Tak więc półkula północna odpowie trójkątom rozwartokątnym, a południowa ostrokątnym, wschodnia lewo-, a zachodnia prawoskrętnym, równik prostokątnym, a południk główny równoramiennym i zdegenerowanym (tym ostatnim odpowie europejska ćwiartka tego południka).

Jak wiadomo, każdy punkt na sferze ma swoją antypodę, czyli punkt od niego najdalszy. Można określić relację „punkt Q jest antypodą punktu P" i pisać to w skróceniu PrQ. Ta relacja, czyli związek, jest wzajemna *(inwolucyjna)*, bo z PrQ wynika QrP, jak czytelnik bez trudności sprawdzi. Przy tym jest zawsze $P \neq Q$, gdy jest PrQ. Związek PrQ jest ciągły, to znaczy taki, że gdy punkt P jest blisko punktu P', a ich antypodami są Q i Q', to Q jest blisko Q'. Umieszczając obrazy kształtów trójkątnych na sferycznym globusie ustanowiliśmy *antypodyzm* w zbiorze tych kształtów, to jest związek wzajemny, ciągły i mający tę własność, że żaden kształt nie jest związany sam ze sobą. Jednak to zasadnicze rozwiązanie

zagadnienia antypodyzmu kształtów trójkątnych jest nieprzejrzyste, bo model sferyczny prowadzi do przykrych rachunków, gdy trzeba naprawdę danemu trójkątowi przypisać punkt na globusie, co jest konieczne, gdy chcemy wyzyskać antypodyzm sferyczny. Dlatego wrócimy do deltoidu i pokażemy, jak można bezpośrednio na tym modelu ustalić antypodyzm (który wcale nie będzie zgodny z antypodyzmem znalezionym poprzez mapę na globusie).

Trójkąt ABE ma środek S. Można wypełnić wnętrze trójkąta ABE trójkątami podobnymi do niego i położonymi podobnie, to jest tak, żeby każdy bok był równoległy do odpowiedniego boku trójkąta ABE; co więcej, można to zrobić tak, żeby wszystkie te trójkąty t miały wspólny środek w S. Sam trójkąt ABE też zaliczymy do gromady trójkątów t, a także punkt S możemy uważać za trójkąt t o bokach zerowych (trójkąty t leżą na płaszczyźnie pomocniczej — nie odnoszą się do nich przepisy (1), (2) i (3)). Każdy punkt P położony we wnętrzu lub na bokach trójkąta ABE leży na jakimś trójkącie t i tylko na jednym z nich. Prostą PS przedłużamy aż do drugiego przecięcia z owym trójkątem t i otrzymujemy punkt Q; w przypadku, gdy $P=S$, uznamy punkt S za szukane przecięcie i będzie $Q=P$. Oznaczamy literą Q' punkt symetryczny do Q względem AB; każdemu P będzie odpowiadał jednoznacznie jakiś punkt Q' i ta odpowiedniość będzie ciągła. Jak wiemy, każdy punkt Z deltoidu Δ jest obrazem jakiegoś trójkąta (ściślej mówiąc, kształtu trójkątnego) — oznaczymy ten trójkąt „Z". Określimy teraz odpowiedniość (czyli odwzorowanie) przypisując każdemu trójkątowi „P" jakiś trójkąt „Q'", a mianowicie tak, żeby punktowi P odpowiadał punkt Q' w sposób przed chwilą opisany. To jest szukany antypodyzm w zbiorze kształtów trójkątnych. Zacznijmy od dowodu, że zawsze trójkąt „P" jest różny od trójkąta „Q'". Jest to widoczne od razu dla punktów P leżących we wnętrzu ABE (lub ABE'), bo wtedy Q' leży we wnętrzu ABE' (lub ABE), a więc antypodyzm przypisuje trójkątom lewoskrętnym prawoskrętne i na odwrót. Gdy P leży na brzegu trójkąta pomocniczego ABE (lub ABE'), Q znajdzie się na brzegu ABE (lub ABE'), a wtedy „Q'" będzie identyczne z „Q", tak że antypodą trójkąta „P" będzie „Q". Ale punkty P i Q są różne i leżą obydwa na bokach tego samego trójkąta pomocniczego (ABE lub ABE'), są przeto obrazami różnych trójkątów „P" i „Q", więc teraz także „P" jest różne od „Q'".

Teraz wykażemy, że jeżeli punktowi P odpowiada Q', to punktowi Q' odpowiada P. Wynika to z symetrii względem AB: wystarczy nazwać literą P' punkt symetryczny do P, t' trójkąt (na płaszczyźnie rysunku) symetryczny do t i S' punkt symetryczny do S i sprawdzić, że konstrukcja punktu odpowiadającego punktowi Q' prowadzi przez P' do P, czego należało dowieść.

W końcu zauważmy, że znaleziona odpowiedniość kształtów trójkątnych jest ciągła. Rzeczywiście, odpowiedniość między kształtem „P" a jego obrazem P jest ciągła, jak stwierdziliśmy po skonstruowaniu mapy Δ kształtów; odpowiedniość $P \to Q'$ jest też ciągła; wobec jednoznaczności jest ciągła także odpowiedniość między Q' a „Q" — złożona z tych trzech odpowiedniości „P"$\to P \to Q' \to$„Q" odpowiedniość „P"$\to$„Q" jest zatem także ciągła. Udowodniliśmy, że ma ona też i dwie inne cechy antypodyzmu, a mianowicie wzajemność i tę własność, iż żaden kształt nie odpowiada samemu sobie. Jest więc antypodyzmem.

Jaki więc trójkąt jest antypodą równobocznego? Punktowi A odpowiada środek C odcinka EB, C ma współrzędne $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{1}{8}$, stąd $z = \frac{1}{2}$. Szukana antypoda ma kształt zdegenerowany $(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2})$, bo jest odcinkiem podzielonym w stosunku 3:4.

Znaleziony antypodyzm nie jest jedynym możliwym, ale nie widzimy prostszego — pozostawiamy czytelnikowi nieszablonowe zadanie określenia go przez wzory.

Chcąc uwolnić się od warunku (3) możemy zamiast jednej sfery o promieniu 1, na której leżą — jak widzieliśmy — obrazy trójkątów o obwodzie 1, wprowadzić wszystkie sfery koncentryczne z pierwotną; każdy trójkąt o obwodzie s otrzyma jako obraz punkt na sferze o promieniu s — umieścimy go na promieniu wiodącym ze wspólnego środka M przez obraz trójkąta podobnego do danego i spełniającego (3) — ten obraz leży na pierwotnej sferze. Tak otrzymamy obrazy wszystkich trójkątów (M będzie obrazem trójkąta o bokach 0,0,0), a ich zbiór wypełni całą przestrzeń trójwymiarową. Pamiętajmy, że są to obrazy wszystkich trójkątów leżących na wspólnej płaszczyźnie zasadniczej, przy czym utożsamia się trójkąty jednej klasy w myśl wywodu wstępnego i odróżnia się trójkąty o różnych skrętach; odwołujemy jednak teraz zastrzeżenie eliminujące wielkość. Okazuje się, że zbiór różnych trójkątów płaskich, to jest parami nieprzystających, da się odwzorować jednoznacznie i w sposób ciągły na przestrzeń trójwymiarową. Wprowadzenie antypodyzmu wymaga odrzucenia punktu M, to jest trójkąta punktowego.

Niech ostatnia nasza uwaga dotyczy innej definicji kształtu trójkątnego: mamy na myśli definicję podobieństwa przez równość odpowiednich kątów w trójkątach podobnych. Ta definicja utożsamia wszystkie kształty, które mają na rysunku obrazy na odcinku EB lub $E'B$, ale z wyjątkiem kształtu mającego obraz w B — to uniemożliwia użycie rysunku 1 do analogicznych badań przy nowej definicji. Pozostawiamy czytelnikowi to zagadnienie, w szczególności zbadanie, czy nowa definicja dopuszcza antypodyzm kształtów.