wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Z. Moroń (Wrocław)

O prawie-doskonałych rozkładach prostokątów

Rozkład prostokąta na kwadraty nazywa się *doskonały*, gdy występują w nim wyłącznie nieprzystające kwadraty. Gdy niektóre z kwadratów rozkładu są jednakowe, ale stykają się z sobą tylko różne kwadraty, wówczas rozkład nosi nazwę *prawie doskonałego pierwszego rodzaju*. Ilość wszystkich kwadratów rozkładu nazywa się *rzędem*, ilość różnych kwadratów — *stopniem* rozkładu.

W rozkładach doskonałych oczywiście rząd równy jest stopniowi. Mówimy, że rozkład prostokąta jest *prawie doskonały drugiego rodzaju*, gdy jednakowe kwadraty mogą się stykać tylko wierzchołkami; wreszcie, rozkład jest *prawie doskonały trzeciego rodzaju*, gdy przystające kwadraty mogą graniczyć wzdłuż części boków; ale nie wzdłuż całych boków. Podane wyżej pojęcia rzędu i stopnia rozciąga się na te nowe rodzaje rozkładów.

Skończony zbiór różnych kwadratów nazywa się *bazą*, gdy można z niego zbudować w sposób prawie doskonały, ewentualnie iterując niektóre kwadraty, prostokąt o dowolnym stosunku boków $m:n$ (m i n całkowite).

Ilość kwadratów możliwie najmniej licznej bazy nazywa się *liczbą bazową*. Oczywiście nie istnieje baza w dziedzinie rozkładów doskonałych, ponieważ z n różnych kwadratów daje się zbudować tylko skończona liczba niepodobnych wzajemnie prostokątów o bokach współmiernych. Natomiast istnieją bazy w dziedzinie rozkładów prawie doskonałych nawet pierwszego rodzaju. Np. taką bazą może być zbiór 9 kwadratów w znanym (zob. [1]) doskonałym rozkładzie o bokach 33 i 32, ponieważ dowolny prostokąt o bokach współmiernych da się rozłożyć na skończoną ilość prostokątów o stosunku boków 33:32, a następnie każdy z tych prostokątów możemy rozbić na 9 różnych kwadratów.

Trudniejszą rzeczą jest znaleźć liczby bazowe różnych rodzajów rozkładów prawie doskonałych, tj. wyznaczyć bazy możliwie najniższych stopni.

Główny rezultat tej pracy podaje następująca tablica:

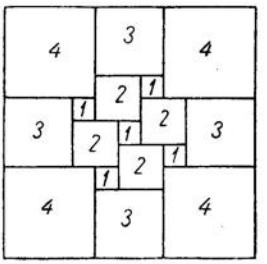
TABLICA

rozkłady prawie doskonałe	a	b	c
trzeciego rodzaju	4	4	5
drugiego rodzaju	5	6	6
pierwszego rodzaju	5	6	7

a — najniższy stopień rozkładu pewnego prostokąta,
b — najniższy stopień rozkładu kwadratu,
c — liczba bazowa

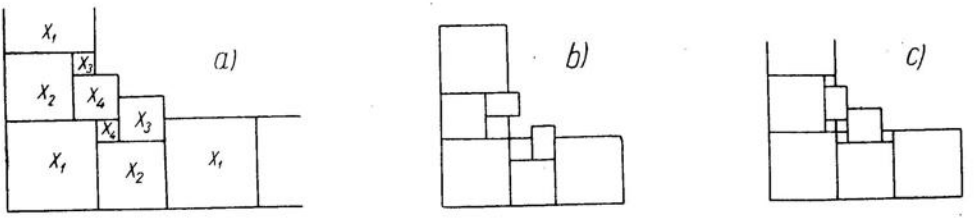
1. Rozkłady prawie doskonałe trzeciego rodzaju. Rysunek 1 przedstawia rozkład kwadratu prawie doskonały trzeciego rodzaju.

Stopień rozkładu wynosi 4, rząd zaś 17. Nie istnieje prawie doskonały rozkład trzeciego rodzaju, który by był stopnia niższego niż 4. Dwa różne kwadraty (co najmniej) muszą być bowiem zewnętrzne, a co najmniej dwa wewnętrzne. Można udowodnić, że *rozkład prostokąta o stosunku boków* 1:2 *musi być stopnia wyższego niż* 4.



Rys. 1

Istotnie, gdyby w rozkładzie występowały tylko 4 kwadraty, to 2 z nich musiałyby być brzegowe, 2 zaś wewnętrzne; z brzegowych większy o boku x_1 byłby narożnym, mniejszy o boku x_2 — nienarożnym. Bok mniejszego wewnętrznego niech będzie równy x_4, większego zaś x_3. Na kwadracie x_2 mogą być zbudowane tylko 2 kwadraty i mniejszy z nich musi sięgać dokładnie do wierzchołka kwadratu x_1.



Rys. 2

Muszą więc zachodzić równania

$$x_1 = x_2 + x_4, \qquad x_2 = x_3 + x_4, \qquad x_1 + x_4 = x_2 + x_3.$$

Wynika z nich $x_1 = 4x_4$, $x_2 = 3x_4$, $x_3 = 2x_4$.

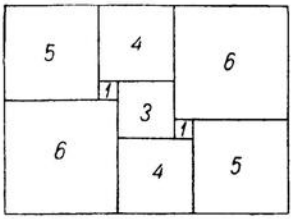
Niech przy dłuższym boku prostokąta mieści się p kwadratów x_1 i $p-1$ kwadratów x_2, przy krótszym q kwadratów x_1 i $q-1$ kwadratów x_2; mamy

$$\frac{px_1+(p-1)x_2}{qx_1+(q-1)x_2}=\frac{x_4(4p+3p-3)}{x_4(4q+3q-3)}=\frac{7p-3}{7q-3}.$$

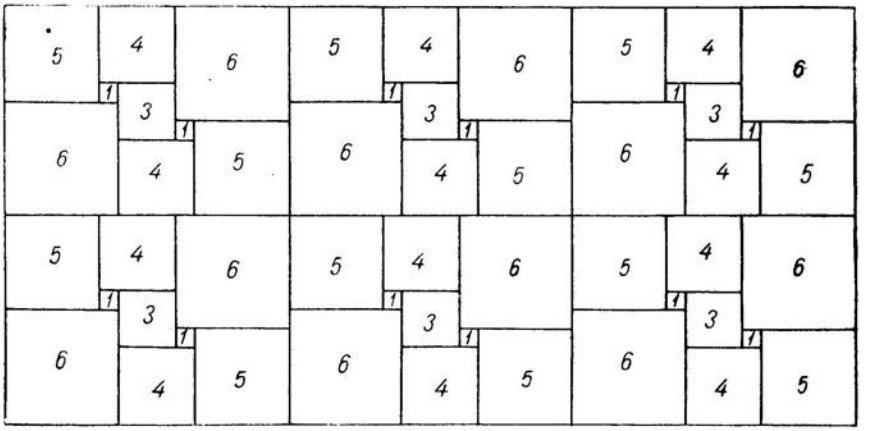
Stąd $7p-3=14q-6$, $3=14q-7p=7(2q-p)$, liczba 3 byłaby zatem podzielna przez 7.

Prostokąt o bokach 2 i 1 nie rozkłada się więc w sposób prawie doskonały na 4 kwadraty.

Natomiast każdy prostokąt o bokach współmiernych rozkłada się prawie doskonale na kwadraty o stosunku boków 1:3:4:5:6, czyli liczba bazowa rozkładów trzeciego rodzaju jest równa 5. Wynika to z rysunków 3 i 4.



Rys. 3

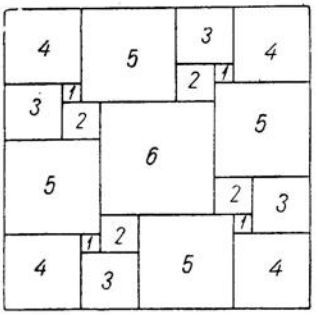


Rys. 4

2. Rozkłady prawie doskonałe drugiego rodzaju. Rysunek 3 podaje prawie doskonały rozkład stopnia piątego prostokąta o bokach 15 i 11. Rozkład ten jest pierwszego rodzaju, więc tym samym również drugiego rodzaju. Można udowodnić, że nie istnieje żaden prawie doskonały rozkład drugiego rodzaju, który byłby stopnia niższego niż 5. Dowód pomijam.

Rysunek 5 podaje prawie doskonały rozkład kwadratu na 6 różnych kwadratów. Rozkład jest nawet rodzaju pierwszego, więc również drugiego. Stopień rozkładu jest równy 6, rząd 21. Dowód, że ten rozkład

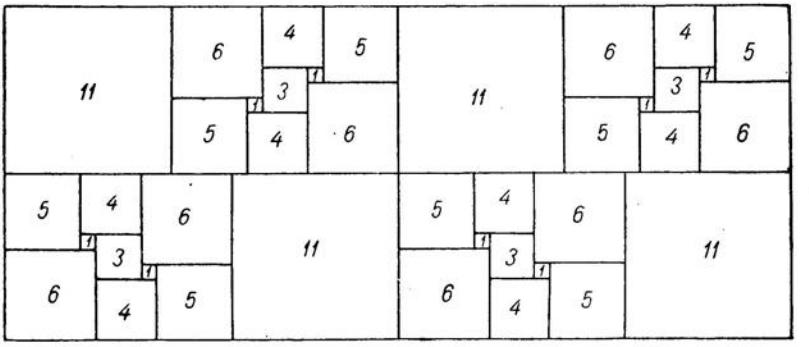
jest możliwie najniższego stopnia, jako uciążliwy i wymagający rozpatrywania różnych przypadków, pomijam.



Rys. 5

Liczbą bazową rozkładów drugiego rodzaju jest 6. Pokazuje to rysunek 6.

Z prostokątów o stosunku boków 26:11 można zbudować każdy prostokąt o bokach współmiernych, każdy zaś prostokąt o bokach 26 i 11 można złożyć z 6 kwadratów i przy tym żadne kwadraty kongruentne nie graniczą z sobą w ogóle, a kwadraty o boku 11 graniczą co najwyżej wierzchołkami.



Rys. 6

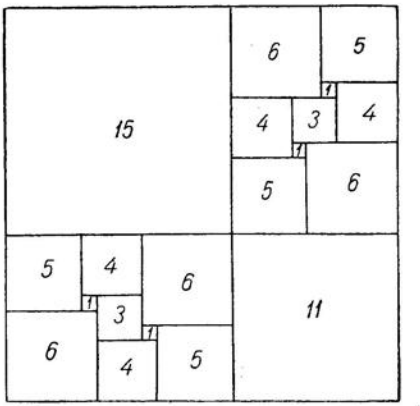
3. Rozkłady prawie doskonałe pierwszego rodzaju. Jak już wspomniałem, prostokąt o bokach 15 i 11 ma prawie doskonały rozkład pierwszego rodzaju stopnia 5, rzędu 9. Prostokąt ten jest przedstawiony na rysunku 3. Łatwo udowodnić, że nie istnieje żaden prawie doskonały rozkład pierwszego rodzaju, który byłby niższego stopnia niż 5 lub niższego rzędu niż 9. Ten ostatni dowód przeprowadza się metodą sieci elektrycznych. Ponieważ wymagałoby to wprowadzenia wielu nowych pojęć, dowód ten pomijam.

Rysunek 5 podaje prawie doskonały rozkład kwadratu. Rozkład ten jest pierwszego rodzaju, stopnia 6-ego. Można udowodnić, że nie istnieje żaden rozkład kwadratu stopnia niższego niż 6. I ten dowód — jako bardzo uciążliwy — pomijam.

TWIERDZENIE. *Bazą rozkładów pierwszego rodzaju jest zbiór złożony z 7 kwadratów o bokach* 1, 3, 4, 5, 6, 11, 15. *Baza ta jest więc stopnia siódmego.*

Dowód. Rysunek 7 pokazuje, że z tych kwadratów daje się w sposób prawie doskonały zbudować kwadrat o boku 26. Rozkład ten jest

20-ego rzędu. Każdy prostokąt o bokach współmiernych daje się rozłożyć na pewną ilość jednakowych kwadratów, a każdy z tych kwadratów można pokryć w sposób podany na rysunku 7 dwudziestoma kwadratami, z których tylko 7 jest różnych, przy czym równe kwadraty nie będą z sobą graniczyły. W wierzchołkach tych jednakowych kwadratów (punktach kratowych) będą się stykały same różne kwadraty, ponieważ w rozkładzie z rysunku 7 występują 4 różne kwadraciki wierzchołkowe: 5, 6, 11 i 15. Rozkład kwadratu podany na rysunku 5 nie nadaje się jako baza, ponieważ kwadraciki wierzchołkowe są jednakowe.



Rys. 7

Można wreszcie udowodnić, że nie istnieje baza stopnia niższego niż 7, lecz dowód byłby bardzo długi, gdyż wymagałby rozwiązania aż 13 różnych przypadków. Być może dowód metodą sieci elektrycznych byłby nieco krótszy.

Praca cytowana

[1] Z. Moroń, *O rozkładach prostokątów na nierówne kwadraty*, Roczniki P.T.M., seria II, Wiadomości Matematyczne 1 (1955), str. 75-94.