wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

S. KULCZYCKI (Warszawa)

O wykładzie habilitacyjnym Riemanna

Odczyt wygłoszony na posiedzeniu Oddziału Warszawskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego 11 czerwca 1954

Wykład Riemanna *O hipotezach, na których opiera się geometria*, powstał w charakterystycznych okolicznościach, które krótko przedstawimy, albowiem wyjaśniają one genezę wielu myśli wykładu. Riemann wstąpił na uniwersytet mając lat $19\frac{1}{2}$. Przez pierwsze trzy lata słuchał w Getyndze i Berlinie wykładów matematyki Gaussa, Sterna, Jacobiego, Dirichleta. Nadzwyczaj nieśmiały, nie był, jak się zdaje, w tym czasie specjalnie wyróżniony, aczkolwiek Stern zapewniał w 25 lat później, że „Riemann już wtedy śpiewał jak kanarek".

W 4, 5 i 6 roku swych studiów zatopił się Riemann w fizyce, z zapałem słuchał wykładów fizyki doświadczalnej i przerabiał ćwiczenia laboratoryjne, choć odciągało go to od pracy nad dysertacją doktorską, którą złożył dopiero pod koniec szóstego roku studiów mając lat 25. Obyczajem dawnych uniwersytetów niemieckich doktorant przedstawiał przed egzaminem ustnym tezy stanowiące owoc jego samodzielnych rozmyślań i obrona wypowiedzianych w nich poglądów była częścią składową egzaminu. W papierach Riemanna zachował się projekt złożonych przez niego tez. Brzmiały one:

1. Nie ma żadnych „fluidów" magnetycznych.

2. „Induction in curved lines" Faradaya nie da się utrzymać.

3. Bez szkody dla ogólności może rachunek różniczkowy poprzedzać analizę.

4. Wahadło rewersyjne nie jest najbardziej odpowiednim środkiem wyznaczania długości wahadła.

5. Nauka o zachowaniu siły nie jest jeszcze dostatecznie uzasadniona przez doświadczenie.

6. Pojęcie napięcia nie zostało dotychczas ujęte w nauce o elektryczności z potrzebną precyzją.

Tylko jedna z tych tez ma związek z matematyką i nic w niej nie zdradza autora jednocześnie złożonej znamienitej rozprawy *Podstawy*

ogólnej teorii funkcji zmiennej zespolonej, w której to rozprawie zostało stworzone pojęcie powierzchni Riemanna i funkcji na niej określonej. Pozostałe tezy mają bez wyjątku charakter krytyczny i świadczą swoją problematyką, że zainteresowania naukowe Riemanna skupiały się w owym czasie niemal wyłącznie na zagadnieniach fizyki. Pochłonęły go one po zdaniu doktoratu jeszcze silniej; poszukiwał teorii, która by objęła w jedną całość zjawiska elektryczne, świetlne i grawitacyjne, i łudził się chwilowo, że mu się udało osiągnąć cel. Zatopił się w pracy do tego stopnia, że zapadł na zdrowiu — pisał do brata: „Zaniemogłem częściowo wskutek nieustannego przebywania w pokoju, częściowo wskutek nadmiernego rozmyślania". Zajęcia te odwlokły Riemanna od pisania pracy habilitacyjnej, którą ukończył jak gdyby mimochodem, po czym powinien był, w myśl ówczesnych przepisów, wygłosić przed Kolegium profesorskim tzw. *wykład próbny (Probevorlesung)* na jeden z trzech tematów wybranych przez siebie.

Riemann zaproponował następujące tematy:

1. *Historia zagadnienia przedstawialności funkcji przez szereg trygonometryczny.*

Byłoby to powtórzenie pierwszego rozdziału jego rozprawy habilitacyjnej.

2. *O rozwiązaniu układu 2 równań stopnia drugiego z 2 niewiadomymi.*

Dziwi nas obecnie, że kandydat na docenta nie zawahał się zaproponować tak elementarnej, wręcz szkolnej kwestii. Jest to znamienne dla bezpretensjonalności charakteru Riemanna.

3. *O hipotezach, na których opiera się geometria.*

Riemann pisał do brata, że miał przygotowane dwa pierwsze tematy, ale ponieważ Gauss wybrał trzeci, więc jest w poważnym kłopocie, musi bowiem temat opracować od początku. Jednakże odkładał tę robotę z miesiąca na miesiąc, ponieważ jak donosił bratu, nie mógł się oderwać od dociekań fizycznych. Wreszcie w dwa tygodnie po Wielkanocy 1854 r. zasiadł do przygotowania odczytu i po pięciu czy sześciu tygodniach rzecz zakończył. Niewątpliwie niejedna z myśli rozwiniętych w odczycie wyłoniła się w trakcie rozważań nad „filozofią przyrody"; zaczątki innych kiełkowały w głowie Riemanna wcześniej — już przy pisaniu rozprawy doktorskiej — niemniej jednak droga od nich do ostatecznych, dojrzałych ujęć była daleka i ogarnia nas zdumienie, gdy się dowiadujemy, że odczyt o podstawach geometrii z jego bogactwem myśli i jasnością sformułowań powstał w ciągu zaledwie sześciu tygodni. Jest to chyba największa „eksplozja natchnienia" zanotowana w historii matematyki.

Odczyt odbył się 10 czerwca 1854 r. Profesorowie Wydziału Filozoficznego prawdopodobnie niewiele pojęli, ale Gauss był bardzo poruszony

głębokością koncepcji Riemanna i dał temu wyraz w rozmowie z Weberem[1]). Tym więcej zdumiewa, tym trudniej jest nam dziś pojąć, że Riemann nie ogłosił swego odczytu czy to w tekście pierwotnym, czy w postaci szerzej rozwiniętej; ukazał się on w druku kilkanaście lat później — już po śmierci Riemanna. Czym to wytłumaczyć? Niewątpliwie Riemann nie przypisywał swemu odczytowi tej naukowej doniosłości, jaką ma on dla nas; myśli odczytu były dla niego — powrócimy do tego przy końcu — przygrywką do zamierzeń rozleglejszych, do absorbujących go niepodzielnie prób zbudowania wszechobejmującej teorii elektryczności, światła i ciążenia, prób, które nie zostały uwieńczone powodzeniem. W czasach późniejszych ogłoszono niektóre odnoszące się do nich notatki Riemanna i Sommerfeld w artykule w Encyklopedii Nauk Matematycznych upatruje w nich zapowiedź teorii maxwellowskich. Muszę się przyznać, że nie umiałem tego dostrzec czytając te rozprawki, które wydały mi się mało istotne. Przedziwne są koleje umysłów ludzkich: Riemanna, obdarzonego niemal jasnowidzeniem matematycznym, pociągała przede wszystkim fizyka, w której nie dano mu było nic wielkiego dokonać, ale do której nieustannie powracał (również w wykładach, z których 60% tyczyło się fizyki teoretycznej), poświęcając jej ogromną część swego czasu i wysiłków. Przypomina się Newton i jego uporczywe dociekania chemiczne czy alchemiczne.

Po tych uwagach biograficznych zwrócę się do omówienia treści odczytu i postaram się pokazać, do jakiego stopnia idee Riemanna zachowały żywotność we współczesnej matematyce. Odczyt był wygłoszony przed audytorium niefachowym. Riemann przedstawiał bieg rozumowań w formie słownej nie precyzując wielu szczegółów i unikając używania aparatu matematycznego. Przedsięwzięcie udało mu się w zupełności; idee przewodnie występują do tego stopnia jasno i wypukle, że wszystkie potrzebne rachunki mogą być bez trudu odtworzone i zostały odtworzone: po ogłoszeniu odczytu posypały się prace rozwijające temat szczegółowo.

Można podzielić zagadnienia omawiane w odczycie na: 1° topologiczne, 2° różniczkowo-geometryczne, 3° elementarno-geometryczne, 4° fizyczne.

Zacznę od pierwszych.

Riemann wprowadza najpierw ogólne pojęcie przestrzeni topologicznej nazywając ją *ausgedehnte Mannigfaltigkeit*, co można by przełożyć: *rozciągłość*. Tekst, zwrócony do nie-matematyków, nie zawiera dokładnej definicji, ale podane przykłady nie pozostawiają wątpliwości co do intencji Riemanna. Jest mowa o przestrzeni funkcyj określonych w pewnym obszarze, o przestrzeni krzywych zamkniętych, a także o prze-

[1]) W. Weber był profesorem fizyki w Getyndze.

strzeni barw. Ta ostatnia rozważana była za Riemannem przez Helmholtza. Element „rozciągłości", a więc np. funkcja, nazywany jest *punktem rozciągłości*. Rozciągłość charakteryzowana jest — stosując obecną terminologię — na podstawie pojęcia otoczenia. Riemann wprawdzie mówi o „małej" zmianie danego elementu przestrzeni, ale nie należy uważać tego za korzystanie z pojęć metrycznych, albowiem zastrzega się wyraźnie — jest to nawet jedna z przewodnich myśli — że (cytuję dosłownie) „stosunki rozciągłości powinny być oddzielone od stosunków metrycznych" i że „badania rozciągłości niezależnie od ich metryki powinny stanowić osobny dział nauki". Tak postawiwszy definicję rozciągłości Riemann zdał sobie sprawę z konieczności zdefiniowania jej wymiaru. Nic dziwnego, nie jest wcale oczywiste, ile wymiarów ma przestrzeń barw. Określa najpierw przestrzeń jednowymiarową, a następnie rekurencyjnie n-wymiarową; zauważa przy tym, że istnieją przestrzenie o nieskończonej ilości wymiarów. Nie przytoczę tekstu definicji; ważne bowiem wydaje mi się głównie to, że Riemann dostrzegł potrzebę zdefiniowania ilości wymiarów przestrzeni w ramach teorii topologicznej.

Przyzwyczajeni do dzisiejszego stanu wiedzy nie odczuwamy może, jak wielkiej trzeba było niezależności umysłowej, żeby sto lat temu utworzyć tak szerokie pojęcie rozciągłości, żeby uznać dalej, iż przestrzeń fizyczna, w której żyjemy, jest bardzo szczególnym przypadkiem „rozciągłości", siostrzycą przestrzeni barw, a ponadto żeby oświadczyć, że „nieopracowanie teorii rozciągłości stanowi jedną z przyczyn istniejących niejasności w budowie geometrii elementarnej".

Minęło bodaj lat pięćdziesiąt zanim myśli Riemanna zostały podjęte na nowo, przy czym nie zawsze wspomina się Riemanna: np. artykuły Rosenthala-Zorettiego, Tietzego i Vietorisa w Encyklopedii Nauk Matematycznych nie wzmiankują o nim.

Dalszy ciąg odczytu omawia zagadnienia metryczne. Wyjątek stanowi kilka zadziwiających zdań o strukturze przestrzeni empirycznej, którę przytoczę dosłownie, są to bowiem jedyne myśli Riemanna, które nie wywołały, jak dotąd, reperkusji naukowych.

Riemann powiada najpierw, że można by sobie wyobrazić, iż stosunki geometryczne w obszarach nieskończenie małych nie czynią zadość zwykłym postulatom geometrii, a kilka wierszy dalej uważa za możliwe, iż „rzeczywistość będąca źródłem idei przestrzeni" jest „*eine diskrete Mannigfaltigkeit*", co oddałbym po polsku: *mnogością niepodzielnych cząstek*. Oczywiście chodzi tutaj nie o niepodzielność fizyczną, lecz o niepodzielność geometryczną. Riemann dopuszcza możliwość skonstruowania takiego systemu geometrii, który by obywał się bez pojęcia punktu i nie zakładał nieograniczonej podzielności. Uwaga jest luźna i nie wiadomo, co ją wywołało. Być może analiza krytyczna teorii atomowych — widzie-

liśmy w tezach doktorskich, jak bardzo Riemann był skłonny do takiej analizy. Nie da się zaprzeczyć, że te teorie — obecnie powiedziałoby się teorie jąder — spoczywają na podstawach pojęciowo kruchych. Mówi się w nich o odległościach punktów wewnątrz-jądrowych, stosuje się rozmaite twierdzenia geometrii, a przecież nie ma ani praktycznych, ani myślowych eksperymentów, które by pozwoliły wyznaczać te odległości. Rozumowania są oparte w znacznej mierze na fikcjach i trudno się dziwić, że doprowadzają niejednokrotnie do sprzeczności.

Wypowiedziałem przed chwilą swoje osobiste domysły i nie mogę zaręczyć, czy odzwierciedlają one źródła, z których wypłynęła przytoczona opinia Riemanna, ale wydaje mi się to dość prawdopodobne.

Przejdźmy teraz do „różniczkowo-geometrycznej" części odczytu. Przedmiotem jej jest wprowadzenie metryki do przestrzeni n-wymiarowej. Nadmieńmy, że pojęcie takiej przestrzeni było wówczas nowe. Riemann włada nim z pełną swobodą. Zakłada, że przestrzeń ta jest odwzorowana w sposób jednoznaczny i ciągły na pewien obszar współrzędnych rzeczywistych $x_1,\ldots,x_n$ i za główne zagadnienie uważa znalezienie warunków dostatecznych do ustalenia w tej przestrzeni stosunków miarowych. W geometrii euklidesowej osiąga się to przez wprowadzenie pojęcia odległości dwóch punktów.

Zasadniczym krokiem Riemanna jest rezygnacja z pojęcia odległości dwóch dowolnych punktów jako fundamentu i oparcie metryki na postulacie, iż każda linia ma mieć długość. Riemann zastrzega się tutaj *explicite*, że myśli o linii przedstawionej równaniami parametrycznymi $x_i=f_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, gdzie funkcje $f_i(t)$ mają pierwsze pochodne ciągłe. Założona jest addytywność długości i wyznaczanie długości linii sprowadza się, jak mówi Riemann, do podania wzoru na różniczkę łuku krzywej w zależności od współrzędnych $x_1,x_2,\ldots,x_n$ oraz różniczek $dx_1,dx_2,\ldots,dx_n$:

$$(1)\qquad ds=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;dx_1,dx_2,\ldots,dx_n),\qquad \text{gdzie}\quad dx_i=f_i'(t)\,dt.$$

Przestawienie definicji z pojęcia integralnego odległości dwóch dowolnych punktów na pojęcie infinitezymalne odległości dwóch punktów nieskończenie bliskich było śmiałym rozszerzeniem koncepcji Gaussa z jego *Disquisitiones circa superficies curvas*. W rozprawie tej Gauss wprowadził na danej powierzchni dwie współrzędne krzywoliniowe x_1 i x_2 i rozpatrywał dowolną krzywą na powierzchni. Różniczka ds łuku krzywej wyrażała się wzorem

$$(2)\qquad ds^2=g_{11}dx_1^2+2g_{12}dx_1dx_2+g_{22}dx_2^2,\qquad g_{ik}=g_{ik}(x_1,x_2);$$

z badania tego wzoru Gauss wysnuł rozmaite własności powierzchni.

Zauważmy, że ten wzór nie jest bynajmniej u Gaussa definicją różniczki ds, lecz twierdzeniem o niej uzasadnionym na podstawie geometrii euklidesowej, gdyż ds jest odległością dwóch punktów nieskończenie bliskich zwykłej przestrzeni. Riemann rzecz odwrócił uznając wzór (2), czy też ogólniejszy od niego wzór (1), za definicję różniczki łuku powziętą *a priori*. Nie ma więc mowy o jakimkolwiek opieraniu się na geometrii euklidesowej, która może być otrzymana przez specjalny wybór funkcji f i nie posiada monopolu na „prawdziwe" odtwarzanie rzeczywistości. Funkcja f jest w zasadzie dowolna, Riemann poddaje ją jedynie warunkowi, by była funkcją jednorodną parzystą stopnia pierwszego względem $dx_1, \ldots, dx_n$, tj. by

$$(3)\quad f[x_1, x_2, \ldots, x_n; kdx_1, kdx_2, \ldots, kdx_n] = |k| f[x_1, x_2, \ldots, x_n; dx_1, dx_2, \ldots, dx_n],$$

powiada bowiem: „Jeżeli wszystkie dx powiększyć pewną ilość razy, to ds powiększy się tę samą ilość razy".

Wybór funkcji f mógłby być dokonany bardzo rozmaicie. W przestrzeni dwuwymiarowej można by obrać postać (2), ale również postacie

$$(4)\quad ds = \sqrt[4]{dx_1^4 + dx_2^4} \qquad \text{lub} \qquad ds = \sqrt{\frac{dx_1^4 + dx_1^2 dx_2^2 + dx_2^4}{dx_1^2 + dx_2^2}}.$$

Riemann wspomina o takich możliwościach, ale poddaje bliższemu rozważaniu tylko przypadek, w którym ds^2 jest formą kwadratową określoną różniczek współrzędnych:

$$(5)\quad ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k, \qquad g_{ik} = g_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Riemann odczuwał potrzebę usprawiedliwienia tego wyboru, który się przecież bynajmniej nie narzuca, i przytoczył szereg argumentów, ale już ich ilość świadczy, że nie uważał żadnego za całkowicie przekonywający. Przyznał też w dopisku przy spisie treści, że sprawa rozmaitych wyborów funkcji f została potraktowana w sposób wysoce niepełny, ale nie rokował badaniom nad innymi niż (5) kształtami owej funkcji ciekawszych rezultatów.

Dopiero w czasach stosunkowo niedawnych, w 1918 r., podjęto dokładniejsze badania nad przestrzeniami, w których ds jest dane przez wzór ogólny (3), a które nazwano *przestrzeniami Finslera*, choć pierwszy ich pomysł pochodzi od Riemanna. Chodziło przy tym o odróżnienie ich od przestrzeni, w których ds^2 jest formą kwadratową różniczek współrzędnych, tj. od tzw. *przestrzeni Riemanna*. Finsler nałożył na funkcję f pewne dodatkowe warunki, zażądał mianowicie, by istniały linie najkrótsze, tj. by ekstremale zagadnienia wariacyjnego

$$(6)\quad \delta \int ds = 0$$

istotnie realizowały minimum. Zachodzi to, gdy hiperpowierzchnia

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \text{const},$$

gdzie zmiennymi są $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, jest wypukła. W przypadku przestrzeni Riemanna hiperpowierzchnia ta jest elipsoidą, z czego wynika, że w nieskończenie małym sąsiedztwie każdego punktu obowiązuje geometria euklidesowa, co dla ogólnych przestrzeni Finslera nie jest prawdą.

Badania przestrzeni Finslera dotychczas były prowadzone przeważnie z punktu widzenia ich podobieństwa do przestrzeni Riemanna; chodziło w tych badaniach o wniknięcia w to, co się ostoi w geometrii, jeżeli założyć jedynie istnienie linii prostych jako najkrótszych dróg. Sam Finsler zdefiniował np. w pewien sposób kąt między kierunkami p i q i pokazał, że jest on w ogólności różny od kąta kierunku q z kierunkiem p, ten sam zaś jedynie w przestrzeni Riemanna. Geometria Finslera traktowana z tego stanowiska jest niejako odbiciem w krzywym zwierciadle geometrii Riemanna: szukano w nim znajomych rysów, mniej może interesowano się tym, co jest w niej nowego, jej właściwego. Z tego względu sceptycyzm Riemanna okazał się, jak dotąd, w pewnej mierze uzasadniony.

Nie scharakteryzowałbym należycie zasięgu myśli Riemanna, gdybym nie powiedział, czego ona nie objęła, choć leżało to w kręgu jej analizy krytycznej, a co zostało dostrzeżone przez Weyla. Na mocy wzoru (5) obowiązuje w nieskończenie małym otoczeniu punktu P geometria Euklidesa. Każdemu wektorowi o składowych $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ podporządkowana jest pewna liczba, jego miara. Jaka przy tym jest jednostka miary, nie gra to w geometrii żadnej roli, twierdzenia geometrii są od tego niezależne. W sąsiedztwie innego punktu Q sytuacja jest analogiczna. Weyl zauważa, że dobór jednostki miary mógłby być inny w punkcie Q niż w punkcie P. Empirycznie rzeczy ujmując, można by przyjąć, że wzorzec długości ulega przy przenoszeniu go z P do Q np. wydłużeniu. Niejeden czytelnik zaoponuje tutaj i wskaże, że obserwator dokonywujący pomiarów w Q nie ma sposobu dostrzeżenia tego. Należałoby przyznać mu słuszność, gdyby deformacja wzorca nie zależała od perypetii jego podróży z P do Q. Gdyby jednakże była ona nie taka sama na różnych drogach wiodących z P do Q, obserwator musiałby to spostrzec. Otóż Weyl kierował się myślą fizyczną, że deformacja wzorca może być następstwem oddziaływania na ten wzorzec pola elektromagnetycznego, w którym się ów wzorzec porusza, że zatem zależy od jego drogi i stanu pola w punktach tej drogi. Matematycznie rzecz ujmując długość wektora l doznaje — wskutek zmiany jednostki miary — na drodze przebywanej $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ pewnego przyrostu dl. Przyrost ten jest oczywiście proporcjonalny do l i zależy od tej drogi i od wartości funkcji

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, charakteryzujących stan pola w punktach drogi. Weyl zakłada, że

$$dl = l(\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_n dx_n).$$

Wzór ujmuje zmienność długości wektora, gdy jego początek porusza się. Długości różnych wektorów wychodzących z jednego punktu porównywa się na mocy wzoru (5). Stosunki miarowe przestrzeni zależą zatem, według Weyla, od dowolnych funkcji g_{ik} $(i,k=1,2,\ldots,n)$ i od dowolnych funkcji φ_i $(i=1,2,\ldots,n)$. Teoria Weyla może być uważana za konsekwentne uogólnienie geometrii Riemanna na gruncie jej metryczno-różniczkowych koncepcji. Dała ona impuls do szybkiego rozwoju geometrii różniczkowej, który wykroczył poza wyobrażenia metryczne dominujące u Riemanna. W równaniach linii geodezyjnych przestrzeni Riemanna figurują współczynniki

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i}\right), \tag{7}$$

u Weyla przybywają składniki zależne od funkcji φ_i. Wyłonił się problem takiego dalszego uogólnienia geometrii, aby funkcje Γ mogły się stać w pewnym stopniu dowolne. Nie było to możliwe w zakresie teorii metrycznych i wyobrażenia linii prostej jako najkrótszej drogi, ale udało się przy traktowaniu linii prostej jako linii o stałym kierunku, tzn. w zakresie wyobrażeń geometrii afinicznej, obcych odczytowi Riemanna, do którego powrócę obecnie.

Postawiwszy zagadnienie zbudowania geometrii opartej na definicji (5) znalazł się Riemann na terenie Gaussa z tą różnicą, że Gauss miał do czynienia z formą różniczkową dwóch zmiennych, Riemann zaś z formą n zmiennych. Natrafiamy tutaj wielką ilość przypadków. Najprostszy z nich jest ten, w którym forma ds^2 przybiera przy wprowadzeniu pewnych nowych zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_n$ postać

$$dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2.$$

Taką przestrzeń nazywa Riemann płaską, w jej skończonym obszarze obowiązuje geometria Euklidesa. W dalszym ciągu Riemann pisze: „Dla uzyskania lepszego przeglądu istotnych cech przestrzeni, których ds^2 jest przedstawiona wzorem (5), należy uwolnić się od cech przypadkowych spowodowanych przez wybór współrzędnych". Obecnie osiąga się ten cel najczęściej przez operowanie pojęciami niezmienniczymi wobec zmiany układów współrzędnych i sam Riemann poszedł tą drogą w drugiej części swej późniejszej pracy, przesłanej na Konkurs Akademii Paryskiej w 1861 r.: *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill. Academia Parisiensi propositae.* W odczycie swym jednak wybrał

sposób postępowania mniej formalny. Pokazał mianowicie, że można tak obrać nowe zmienne $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ażeby linie geodezyjne wychodzące z danego punktu A miały równania liniowe

$$y_i = a_i t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ t - \text{parametr})$$

dające dla $t = 0$ współrzędne $(0, 0, \ldots)$ punktu A i żeby przy tym element

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dy_i dy_k \quad [2]) \tag{8}$$

przybierał w punkcie A postać

$$ds^2 = \sum_i dy_i^2. \tag{9}$$

Takie współrzędne nazywa się obecnie *normalnymi w punkcie A*. Ich użycie zastępuje posługiwanie się pojęciami o charakterze niezmienniczym, na przykład tzw. różniczkowanie kowariantne w punkcie A nie jest niczym innym, jak wyznaczaniem pochodnych względem współrzędnych normalnych w punkcie A, a tzw. przesunięcie równoległe wektora (Levi-Civita) jest to po prostu rozpatrywanie wektorów w sąsiedztwie punktu A mających jednakowe składowe w układzie współrzędnych normalnych. Taka definicja przesunięcia równoległego wydaje się najlepiej tłumaczyć nazwę. Rzecz dziwna, że przez dziesiątki lat nie dostrzegano całej użyteczności współrzędnych normalnych. Znaczenie ich sięga jednak dalej. Doktryna geometryczna, rozwinięta w latach 20 i 30 obecnego stulecia przez Veblena i innych pod nazwą *geometry of paths* (geometria dróg), opiera się, jako na jednym z fundamentów, na opisanym tutaj pięknym pomyśle współrzędnych normalnych. Tak to w rozmaitych działach nauki spotykamy echa odczytu Riemanna.

Po dygresji wracamy do elementu (8) i zauważamy, że funkcje g_{ik} zmiennych y i ich pochodne powinny spełniać szereg warunków łatwych do ustalenia, jeżeli owe współrzędne $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mają być normalne w A. Np. powinny zachodzić równości

$$\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial y_i \partial y_k}.$$

Ma to ten skutek, że w rozwinięciu funkcyj g_{ik} w szeregi potęgowe niektóre współczynniki otrzymanych szeregów są równe. Jeżeli zatem podstawimy te rozwinięcia do wzoru (8) na ds^2 i uporządkujemy je według rosnących potęg zmiennych y, to niektóre wyrazy będą miały równe współ-

[2]) Używamy tu tych samych liter g_{ik}, co we wzorze (5), ale ma się rozumieć, oznaczają one tu inne funkcje.

czynniki i będzie można połączyć owe wyrazy wynosząc współczynniki przed nawias. W rezultacie otrzymamy

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2 + \omega, \tag{10}$$

gdzie

$$\omega = -\frac{1}{1\,2} \sum_{ik,\alpha\beta} R_{ik,\alpha\beta}(y_i dy_k - y_k dy_i)(y_\alpha dy_\beta - y_\beta dy_\alpha) + \ldots, \tag{11}$$

gdzie po znaku + następują wyrazy trzeciego i wyższych stopni względem zmiennych y, a $R_{ik,\alpha\beta}$ oznaczają stałe współczynniki, mianowicie wartości przyjmowane w punkcie A przez wyrażenia

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{i\alpha}}{\partial y_k \partial y_\beta} + \frac{\partial^2 g_{k\beta}}{\partial y_i \partial y_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{i\beta}}{\partial y_k \partial y_\alpha} - \frac{\partial^2 g_{k\alpha}}{\partial y_i \partial y_\beta}\right). \tag{12}$$

W odczycie swym Riemann nie napisał wzoru (11), lecz powiedział krótko, że ω jest formą kwadratową wielkości $y_i dy_k - y_k dy_i$ $(i,k=1,2,\ldots,n)$. Wielkość $y_i dy_k - y_k dy_i$ jest to pole rzutu na płaszczyznę, która przechodzi przez oś y_i i oś y_k równoległoboku, którego bokami są: wektor o składowych $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i wektor o składowych $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$.

Skoro ω jest formą kwadratową tych pól, to dzieląc ω przez kwadrat pola całego równoległoboku otrzymamy iloraz K zależny tylko od stosunków pól rzutów równoległoboku do pola całego równoległoboku, a zatem zależny, powiada Riemann, „wyłącznie od położenia i kierunku owego równoległoboku", a nie od jego wielkości. Ów iloraz K jest równy zeru w przypadku przestrzeni płaskiej, dla której ω jest tożsamościowo zerem, a zatem w innych razach „może być miarą tego, o ile przestrzeń nasza odbiega od przestrzeni płaskiej w kierunku płaszczyzny rozważanego elementu płaskiego" (równoległoboku).

Riemann wskazuje dalej, że wielkość K wiąże się z własnościami powierzchni krzywych dwuwymiarowych. Taką powierzchnię tworzą linie geodezyjne wychodzące z punktu A i styczne do płaszczyzny wspomnianego równoległoboku. Krzywizna Gaussa tej powierzchni w punkcie A jest równa $-3K$ i to usprawiedliwia nazywanie liczby K krzywizną przestrzeni w kierunku danego elementu płaskiego.

Zespół współczynników R figurujący w formie ω, nazywany *tensorem Riemanna-Christoffela*, został otrzymany w odczycie omówioną metodą, w *Commentatio mathematica* zaś inną metodą. Obie one bywają, może niesłusznie, w podręcznikach całkowicie pomijane na rzecz współczesnych ujęć związanych z tak zwanym przesunięciem równoległym wektora. Utworzenie formy różniczkowej ω, tzn. tensora krzywizny przestrzeni n-wymiarowej o elemencie (8), i dostrzeżenie, że ona decyduje o stosunkach miarowych tej przestrzeni, jest największym odkryciem

zawartym w odczycie Riemanna. Wywołało ono — w krótkim czasie po ogłoszeniu odczytu — liczne prace, ale znalazło się w centrum zainteresowania dopiero po stworzeniu ogólnej teorii względności, która — w swym pierwszym ujęciu — uważa świat za przestrzeń Riemanna o współczynnikach g_{ik} spełniających układ równań, w które wchodzą pewne liniowe funkcje wielkości $R_{ik,\alpha\beta}$. Ilość prac poświęconych tensorowi R i jego różnym uogólnieniom jest bardzo duża — temat ten nie jest jeszcze wyczerpany.

Po omówieniu zagadnień różniczkowo-geometrycznych dotyczących odstępstwa przestrzeni od przestrzeni płaskiej, tzn. krzywizny przestrzeni, zwraca się Riemann do kwestii, które nazwałem na wstępie elementarno-geometrycznymi, i okazuje w ich traktowaniu tę samą absolutną niezależność umysłową i jasnowidzącą przenikliwość, co w poprzednich częściach odczytu. Za charakterystyczną cechę przestrzeni „zwykłej" uznaje możność swobodnego poruszania się w niej przedmiotów i wysuwa natychmiast z istnienia tych ruchów ten wniosek, że krzywizna przestrzeni musi mieć stałą wartość we wszystkich punktach i we wszystkich płaskich kierunkach. W innym przypadku, powiada, „figury" nie mogłyby być obracane i poruszane dowolnie w przestrzeni. Odwrotnie, jeśli krzywizna przestrzeni jest stała, to stosunki metryczne przestrzeni są wszędzie jednakowe, a zatem w każdym punkcie można przeprowadzić te same konstrukcje, co w którymkolwiek innym punkcie, a więc „w rozciągłości o stałej krzywiźnie figury mogą zajmować dowolne położenia".

Riemann twierdzi następnie bez uzasadnienia, że elementowi liniowemu przestrzeni o stałej krzywiźnie można nadać postać

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{[1 + a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)/4]^2} \qquad (a \text{ — stała})$$

i krótko omawia „ilustrację" geometryczną ogólnych rozważań na powierzchniach obrotowych o stałej krzywiźnie dodatniej lub ujemnej przestrzeni trójwymiarowej Euklidesowej.

Rozważania powyższe, obejmujące zaledwie półtorej stronicy, zawierają rewolucyjne dla ówczesnej nauki rozszerzenie zasięgu myśli. Riemann nie analizuje sprawy zachodzenia czy nie zachodzenia pewnika Euklidesa, nie rozstrząsa różnych konsekwencji obu ewentualności, lecz stawia postulat istnienia ruchów jako zasadniczy dla przestrzeni zwykłej [3]) i z całą świadomością uznaje za równorzędne trzy geometrie: euklidesową (krzywizna 0) i obie nieeuklidesowe (krzywizna dodatnia lub ujemna). W takim ujęciu nie wyłania się w ogóle zagadnienie niesprzeczności geometrii nieeuklidesowych.

[3]) Riemann mówi *Raum* w odróżnieniu od *Mannigfaltigkeit* — *rozciągłość*.

Cały ustęp został zredagowany z wielkim pośpiechem, o czym świadczą przytoczone na jego końcu przykłady powierzchni obrotowych o stałej krzywiźnie. Riemann podaje jeden rodzaj powierzchni o stałej krzywiźnie ujemnej, a pomija pseudosferę, co dowodzi, że przy odpowiednich całkowaniach nie rozpatrzył wartości zero dla stałej całkowania. Tym niemniej jest jasne, że Riemann ogarniał całkowicie koncepcję geometrii na powierzchni o stałej krzywiźnie ujemnej i prawdopodobnie dał tym impuls do późniejszej pracy Beltramiego, z którym przestawał w przyjaznych stosunkach w czasie swego pobytu we Włoszech.

Idea oparcia geometrii na ruchu jako pojęciu fundamentalnym wywołała natychmiastowy oddźwięk u Helmholtza, który w rozprawie *O faktach, na których opiera się geometria* postawił sobie za zadanie opracowanie odpowiedniej aksjomatyki geometrii i ponadto uzupełnienie wywodów Riemanna w istotnym punkcie. Helmholtz starał się mianowicie pokazać, że przyjęta przez Riemanna raczej dowolnie postać elementu ds^2 jako formy kwadratowej różniczek współrzędnych może być wywiedziona z założeń bardziej prymitywnych, z których najistotniejsze tyczą się własności grupy ruchów. Rozumowania Helmholtza podległy w dwadzieścia lat później ostrej i nieco przesadnej, moim zdaniem, krytyce Liego. Lie przeprowadził swój dowód twierdzenia, że jeśli w przestrzeni istnieje grupa ruchów (nie przytaczamy dokładnej charakterystyki tego pojęcia), to w przestrzeni obowiązuje geometria euklidesowa lub jedna z nieeuklidesowych. Jednakże Lie założył, że przekształcenia owej grupy są wytworzone przez przekształcenia infinitezymalne, a więc założył różniczkowalność występujących tu funkcji, co się znów nie podobało jego następcom i skłoniło Hilberta do ponownego opracowania zagadnienia w IV dodatku do *Podstaw geometrii*. Odczyt Riemanna i praca Helmholtza wywarły duży wpływ na Kleina i niezawodnie w nich szukać należy m. in. zalążków tzw. *programu z Erlangen*.

Opowiedziałem o rozmaitych koneksjach odczytu Riemanna z badaniami późniejszymi trwającymi do dziś; przejdę teraz do ostatniego rozdziału poświęconego przestrzeni, którą poznajemy empirycznie. Rozdział ten zredagowany został z wielkim staraniem i odważaniem każdego słowa. Znać, że z tych myśli rozwinęła się całość dociekań i że one przede wszystkim pasjonowały Riemanna. Potwierdza to uwaga przy spisie treści, wskazująca na potrzebę uzupełnienia końcowych wywodów; snać nasunęły się Riemannowi nowe myśli już po wygłoszeniu odczytu.

Riemann traktuje w tym ostatnim rozdziale zagadnienie przestrzeni z punktu widzenia fizyki doświadczalnej. Pragnie dostosować system geometrii do wyników eksperymentalnych badań i np. powiada: „Można sobie wyobrazić, że stosunki metryczne w obszarach nieskończenie małych nie czynią zadość postulatom geometrii, i należałoby przyjąć taką hipo-

tezę, jeżeli z jej pomocą dałyby się prościej wytłumaczyć obserwowane zjawiska".

Wnioski wyciągane z obserwacji świata zewnętrznego nie są ugruntowane w jednakowym stopniu. Sądy nasze o topologicznych własnościach przestrzeni są pewniejsze niż sądy o własnościach metrycznych, zawodzące zwłaszcza gdy się zwracamy do obszarów nieskończenie wielkich lub nieskończenie małych: „Nieograniczoność przestrzeni wydaje się faktem lepiej ustalonym od jakiego bądź innego faktu", ale nieograniczoność nie oznacza, mówi Riemann, nieskończoności, albowiem jeżeliby przestrzeń miała krzywiznę dodatnią, byłaby z natury rzeczy skończona. Dyskusje dotyczące obszarów „nieskończenie wielkich" są jednak, zdaniem Riemanna, jałowe.

Nie są natomiast próżne kwestie odnoszące się do obszarów nieskończenie małych, „nasza znajomość bowiem przyczynowych związków w przyrodzie zależy od tego, z jaką dokładnością uda się nam wniknąć w zjawiska zachodzące w nieskończenie małych obszarach".

Riemann dopuszcza możliwość, że krzywizna przestrzeni nie jest stała w takich obszarach, zastrzega się jedynie, że średnia jej wartość w obszarach skończonych powinna być bliska zera, ponieważ obserwacje astronomiczne uczą, iż krzywizna jest w części przestrzeni dostępnej badaniom teleskopowym albo równa zeru, albo znikomo mała. Wydaje się zatem, że Riemann wyobrażał sobie wnętrze ciał materialnych jako wypełnione fluktuacjami krzywizny. W takim razie nie byłoby, jak mówi, niezależności ciał od położenia — ciała zmieniałyby swą wielkość podczas ruchu. Riemann stawia następnie narzucające się pytanie, co mogłoby być przyczyną takich stosunków metrycznych. Odpowiedź brzmi: Źródła powstawania stosunków metrycznych należy szukać w „siłach więzów działających na tę rzeczywistość, która wytwarza ideę przestrzeni". Wykryje je może przyszłość, a rozważania odczytu miały na celu tylko to, aby „ograniczoność pojęć i zakorzeniałe przesądy nie hamowały postępu i nie przeszkadzały poznaniu praw materii".

W słowach tych dźwięczy nuta pewnej rezygnacji — może w wyniku bezowocnych poszukiwań teorii, która by tłumaczyła, w jaki sposób stosunki metryczne zależą od materii i sił w niej działających. W nieosiągnięciu tego upragnionego a kapitalnego celu widzę przyczynę, dla której Riemann nie ogłosił swych dociekań drukiem.

Myśl Riemanna nie była rozumiana przez pięćdziesiąt lat, a podjęta została w ogólnej teorii względności, której punktem wyjścia były wprawdzie inne wyobrażenia, ale która doprowadziła na nowo do koncepcji kształtowania stosunków metrycznych, nazwanych teraz potencjałami grawitacyjnymi, przez materię i pole elektromagnetyczne. Teoria względności doszła przy tym do wyników zadowalających dla części prze-

strzeni leżących pomiędzy skupieniami materii, ale próby głębszego wniknięcia w zależności między grawitacją a polem elektrycznym, tj. w terminologii Riemanna między metryką a materią, czyli próby zbudowania jednolitej teorii grawitacji i elektryczności nie dały — pomimo trzydziestoletnich wysiłków Einsteina i innych — definitywnych wyników. Program Riemanna pozostaje nadal aktualny, chociaż niewątpliwie teoria względności uczyniła wielki krok naprzód w kierunku jego realizacji. W szczególności przypuszczenie Riemanna, że stosunki geometryczne w łonie atomów mogą odbiegać od postulatów geometrii, nie zostało właściwie, jak dotąd, podjęte przez naukę, badania teorii względności są raczej makroskopowe.

Dobiegliśmy końca odczytu Riemanna. Wyrosły z zainteresowań fizycznych zaważył on na rozwoju matematyki, jak niewiele innych dzieł, i pozostanie w jej historii zjawiskiem wyjątkowym i zdumiewającym.
