wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

O równaniu $3^x+4^y=5^z$

K. Zarankiewicz postawił pytanie, czy równanie

$$3^x+4^y=5^z \tag{1}$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x,y,z inne niż $x=y=z=2$. Udowodnimy tu, że takich rozwiązań nie ma. Dowód nasz będzie elementarny, choć dosyć długi.

Przypuśćmy więc, że liczby naturalne x,y,z spełniają równanie (1), przy czym nie jest jednocześnie $x=y=z=2$.

Wobec $9=8+1$ wnosimy z łatwością (na przykład przez indukcję), że każda potęga liczby 9 o wykładniku całkowitym nieujemnym przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1. Stąd wynika natychmiast, że jeżeli x jest liczbą nieparzystą postaci $x=2k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną, to liczba $3^x=9^k\cdot 3$ przy dzieleniu przez 8 daje resztę 3 i wobec tego liczba 3^x+4^y przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Lecz liczba 5, a więc też każda potęga liczby 5 o naturalnym wykładniku, przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Równość (1) nie może więc (dla naturalnych x,y,z) zachodzić, jeżeli x jest liczbą nieparzystą. Liczba x musi więc być parzysta, $x=2k$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Gdyby było $y=1$, wówczas wobec (1) i $x=2k$ mielibyśmy $3^{2k}+4=5^z$. Ponieważ $5^2=3\cdot 8+1$, więc każda potęga liczby 5 o wykładniku parzystym przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1, natomiast liczba $3^{2k}+4$ przy dzieleniu przez 8 daje resztę 5. Wnosimy stąd, że z musi być liczbą nieparzystą. Wobec $5^2=3\cdot 8+1$ każda potęga liczby 5 o parzystym wykładniku przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, każda zatem potęga liczby 5 o wykładniku nieparzystym przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Tymczasem liczba $3^{2k}+4$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Równość $3^{2k}+4=5^z$ zachodzić więc nie może. Dowiedliśmy więc, że nie może być $y=1$, mamy zatem $y>1$.

Lecz dla $y>1$ liczba 4^y jest podzielna przez 8 i przeto liczba $3^{2k}+4^y$ przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1. Wynika stąd, że liczba z nie może być nieparzysta (gdyż każda potęga liczby 5 o wykładniku nieparzystym

przy dzieleniu przez 8 daje resztę 5). Jest więc $z=2l$, gdzie l jest liczbą naturalną. Mamy zatem $3^{2k}+4^y=5^{2l}$, skąd $2^{2y}=4^y=5^{2l}-3^{2k}=(5^l+3^k)\times$ $\times(5^l-3^k)$, zatem $5^l>3^k$. Ponieważ potęga liczby 2 nie ma innych dzielników prócz potęg liczby 2 (o wykładniku całkowitym $\geqslant 0$), więc z ostatniej równości wnosimy, że istnieją liczby całkowite m i $n\geqslant 0$, takie iż $5^l+3^k=$ $=2^m$ i $5^l-3^k=2^n$, skąd $2\cdot 5^l=2^m+2^n$, $2\cdot 3^k=2^m-2^n$ oraz $m>n$. Gdyby było $n\geqslant 2$, liczba 2^m+2^n byłaby podzielna przez 4, gdy tymczasem liczba $2\cdot 5^l$ nie jest podzielna przez 4. Jest więc $n<2$, a zatem $n=0$ lub $n=1$. W razie $n=0$ mielibyśmy $2\cdot 3^k=2^m-1$, co wobec $m-n>0$ jest niemożliwe (gdyż prawa strona tego wzoru jest liczbą nieparzystą). Musi więc być $n=1$, zatem $5^l=2^{m-1}+1$ i $3^k=2^{m-1}-1$ oraz $m>n=1$, czyli $m\geqslant 2$. Gdyby było $m=2$, mielibyśmy $5^l=3$, co jest niemożliwe. Gdyby było $m=3$, mielibyśmy $5^l=5$, $3^k=3$, skąd $k=l=1$, zatem $x=z=2$ oraz wobec (1), $3^2+4^y=5^2$, co daje $y=2$, wbrew założeniu, że nie jest jednocześnie $x=y=z=2$. Jest więc $m\geqslant 4$ i przeto liczba $2^{m-1}-1$ przy dzieleniu przez 8 daje resztę 7, gdy tymczasem liczba 3^k przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1 lub 3 (zależnie od tego, czy k jest parzyste czy nie). Równość $3^k=2^{m-1}-1$ zachodzić więc nie może.

Założenie, że równanie (1) ma inne rozwiązanie w liczbach naturalnych x,y,z niż $x=y=z=2$, prowadzi zatem do sprzeczności. Zapowiedziany dowód został więc przeprowadzony.

Z dowiedzionego twierdzenia można z łatwością wysnuć wniosek, że nie ma trójkąta pitagorejskiego różnego od trójkąta o bokach 3, 4, 5, którego boki byłyby każdy potęgą liczby pierwszej (o wykładniku naturalnym). Gdyby bowiem taki trójkąt o bokach a, b i c istniał, to wobec tego, że jak wiadomo, w każdym trójkącie pitagorejskim co najmniej jedna z przyprostokątnych jest podzielna przez 4 i co najmniej jedna przez 3, z boków zaś co najmniej jeden jest podzielny przez 5, więc musiałoby być na przykład $a=2^k$, $b=3^l$, $c=5^m$ oraz $a^2+b^2=c^2$, skąd $2^{2k}+$ $+3^{2l}=5^{2m}$. A zatem $4^k+3^{2l}=5^{2m}$, co — w myśl dowiedzionego twierdzenia — daje $k=2$, $l=m=1$, więc $a=4$, $b=3$, $c=5$.