wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

L. JEŚMANOWICZ (Toruń)

Kilka uwag o liczbach pitagorejskich

W poprzedniej pracy (str. 194-195) W. Sierpiński udowodnił, że równanie $3^x+4^y=5^z$ nie ma żadnych rozwiązań w liczbach naturalnych (całkowitych dodatnich) prócz rozwiązania $x=y=z=2$. Wynik ten nasuwa przypuszczenie, że *dla dowolnych naturalnych liczb* a, b, c, x, y, z, *jeżeli* $a^2+b^2=c^2$ *i* $a^x+b^y=c^z$, *to* $x=y=z=2$.

Jak wiadomo, liczby naturalne a,b,c spełniające równanie $a^2+b^2=c^2$ noszą nazwę *pitagorejskich*. W szczególności liczby kształtu

$$a=2n+1, \quad b=2n(n+1), \quad c=2n(n+1)+1, \tag{1}$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, są, jak łatwo sprawdzić, liczbami pitagorejskimi. Dla $n=1$ mamy $a=3$, $b=4$, $c=5$, a zatem wynik W. Sierpińskiego jest odpowiedzią twierdzącą na wysunięte wyżej przypuszczenie w przypadku liczb pitagorejskich kształtu (1) i $n=1$. Ogólny przypadek liczb pitagorejskich kształtu (1) pozostaje otwarty. Celem niniejszej pracy jest potwierdzenie przypuszczenia w przypadku $n=2,3,4,5$. W § 1 podaję kilka ogólnych lematów dotyczących liczb kształtu (1), które będą w dalszym ciągu wykorzystane.

§ 1. Kilka lematów o liczbach pitagorejskich kształtu (1). W tym paragrafie przez a,b,c będę oznaczał liczby pitagorejskie kształtu (1), przy czym o liczbie naturalnej n nie będę czynił żadnych założeń.

LEMAT 1. *Jeżeli* x, y, z *są liczbami naturalnymi i* $a^x+b^y=c^z$, *to* x *jest liczbą parzystą.*

Dowód. Reszty z dzielenia liczb a, b, c przez $2(n+1)$ są odpowiednio równe $-1, 0, 1$, a zatem reszta z dzielenia a^x+b^y przez $2(n+1)$ wynosi $(-1)^x$, a z dzielenia c^z przez $2(n+1)$ wynosi 1. Różnica tych dwóch reszt jest podzielna przez $2(n+1)$ tylko dla x parzystego, c. b. d. u.

LEMAT 2. *Jeżeli* k, y, z *są liczbami naturalnymi,* $y \geqslant 2$ *oraz* $a^{2k}+b^y=c^z$, *to* z *jest liczbą parzystą.*

Dowód. Niech $b=2^s q$, gdzie q jest liczbą nieparzystą. Ponieważ $a^2=2b+1$, $c^2=(b+1)^2=b^2+2b+1$, więc reszty z dzielenia a^2, b^2, c^2 przez 2^{s+1} są odpowiednio równe $1, 0, 1$, a zatem reszta z dzielenia $a^{2k}+b^y$

przez 2^{s+1} przy założeniu $y \geqslant 2$ wynosi 1, natomiast reszta z dzielenia c^z przez 2^{s+1} przy założeniu, że z jest liczbą nieparzystą, wynosi $c=b+1$. Ponieważ różnica tych dwóch reszt b nie jest podzielna przez 2^{s+1}, więc z nie może być liczbą nieparzystą, c. b. d. u.

Z lematu 1 wynika, że w przypadku liczb pitagorejskich kształtu (1) równanie

$$a^x + b^y = c^z \tag{1.1}$$

sprowadza się do postaci

$$a^{2k} + b^y = c^z, \tag{1.2}$$

a jeśli ponadto $y \geqslant 2$, to na mocy lematu 2 przybiera postać

$$a^{2k} + b^{p+1} = c^{2r}. \tag{1.3}$$

Widzimy więc, że dla wykazania naszego przypuszczenia dla konkretnych liczb a, b, c kształtu (1) wystarczy wykazać, że

a) z (1.2) wynika $y \geqslant 2$,

b) z (1.3) wynika $k=p=r=1$.

Dowód, że w równaniu (1.2) y nie może być równe 1, ułatwiają następujące dwa lematy:

LEMAT 3. *Jeżeli w równaniu* (1.2) $y=1$, *to* k *jest liczbą parzystą, a* z *jest kształtu* $4u+1$.

Dowód. Ponieważ $a^2=2c-1$, $b=c-1$, więc reszta z dzielenia przez c lewej strony równia (1.2) dla $y=1$ wynosi $(-1)^k-1$, natomiast reszta z dzielenia przez c prawej strony wynosi 0. Stąd wynika, że k musi być liczbą parzystą. Niech więc $k=2t$. Równanie (1.2) można napisać w postaci:

$$(2b+1)^{2t} + b = (b+1)^z. \tag{1.4}$$

Reszta z dzielenia lewej strony tego równania przez b^2 wynosi $4bt+1+b$, natomiast z dzielenia prawej strony wynosi $zb+1$. Różnica tych dwóch reszt $(4t+1-z)b$ ma być podzielna przez b^2, skąd wynika, że liczba $4t+1-z$ jest wielokrotnością liczby b. Mamy zatem $z=4t+1+mb$. Ponieważ jednak liczba b jest podzielna przez 4, więc liczba z jest kształtu $4u+1$, czego należało dowieść.

LEMAT 4. *Jeśli* $a^{4t}+b=c^{4u+1}$, *to* $c^{4u}+1$ *jest podzielne przez* a^2.

Dowód. Z założenia wynika, że $c^{4u+1}-b$ dzieli się przez a^2. Mamy jednak $b+c=a^2$, skąd wynika, że $c^{4u+1}+c$ dzieli się przez a^2. Ponieważ liczby a i c są względnie pierwsze, więc $c^{4u}+1$ musi być podzielne przez a^2, c. b. d. u.

§ 2. Równanie $5^x+12^y=13^z$ $(n=2)$. Na mocy lematu 1 równanie to możemy napisać w postaci

$$25^k+12^y=13^z. \tag{2.1}$$

Jeżeli $y=1$, to na mocy lematu 4 liczba $13^{4u}+1$ musiałaby być podzielna przez 25. Tymczasem liczba ta nie jest podzielna nawet przez 5. Istotnie, reszta z dzielenia 13 przez 5 wynosi 3, a zatem reszta z dzielenia przez 5 liczby 13^4 jest równa reszcie z dzielenia przez 5 liczby $3^4=81$, czyli 1. Wynika stąd, że reszta z dzielenia przez 5 liczby $13^{4u}+1$ wynosi 2. Musi być zatem $y\geqslant 2$.

Równanie (2.1) jest więc kształtu

$$25^k+12^y=13^{2p},$$

gdzie $y\geqslant 2$, skąd

$$13^{2p}-5^{2k}=(13^p+5^k)(13^p-5^k)=3^y2^{2y},$$

a zatem

$$13^p+5^k=3^\alpha 2^\beta, \qquad 13^p-5^k=3^\gamma 2^\delta,$$

gdzie $\alpha+\gamma=y$, $\beta+\delta=2y$. Dodając i odejmując te równości stronami i dzieląc przez 2, otrzymujemy

$$13^p=3^\alpha 2^{\beta-1}+3^\gamma 2^{\delta-1}, \qquad 5^k=3^\alpha 2^{\beta-1}-3^\gamma 2^{\delta-1}.$$

Ponieważ ani 5, ani 13 nie są podzielne przez 2 i 3, należy rozpatrzyć następujące możliwości:

1. $\alpha=0$, $\beta=1$.

Mamy wówczas $5^k=1-3^y4^{y-1}<0$, co jest niemożliwe.

2. $\beta=1$, $\gamma=0$.

Mamy wówczas $5^k=3^y-4^{y-1}$, co jest możliwe jedynie dla $y\leqslant 4$. Dla $y=2$ równanie to jest spełnione przy $k=1$, skąd $x=y=z=2$, natomiast dla $y=3$ i $y=4$ równanie nie jest spełnione przy żadnym k.

3. $\gamma=0$, $\delta=1$.

Mamy wówczas $5^k=3^y\cdot 4^{y-1}-1$. Reszta z dzielenia lewej strony przez 4 wynosi 1, natomiast reszta z dzielenia przez 4 prawej strony wynosi -1, czyli równanie to nie jest spełnione przy wszystkich y i k.

4. $\delta=1$, $\alpha=0$.

Mamy wówczas $13^p+5^k=2\cdot 4^{y-1}$. Reszta z dzielenia lewej strony przez 4 wynosi 2, a prawej 0, czyli równanie to nie jest spełnione przy wszystkich p, k i y.

§ 3. Równanie $7^x+24^y=25^z$ $(n=3)$. Na mocy lematu 1 równanie to można napisać w postaci

$$7^{2k}+24^y=25^z. \tag{3.1}$$

Jeżeli $y=1$, to na mocy lematu 4, musiałoby być $25^{4u}+1$ podzielne przez 49. Tymczasem liczba ta nie jest podzielna nawet przez 7. Istotnie, reszta z dzielenia 25^4 przez 7 wynosi 4, reszty zaś z dzielenia przez 7 potęg 4^u są równe 1, 2 lub 4, a więc 4^u+1 nie jest podzielne przez 7. Musi być zatem $y\geqslant 2$ i na mocy lematu 2 równanie (3.1) możemy napisać w postaci

$$7^{2k}+24^y=25^{2p}, \tag{3.2}$$

skąd

$$25^{2p}-7^{2k}=(25^p+7^k)(25^p-7^k)=3^y 2^{3y},$$

a zatem

$$25^p+7^k=3^\alpha 2^\beta, \qquad 25^p-7^k=3^\gamma 2^\delta,$$

gdzie $\alpha+\gamma=y$, $\beta+\delta=3y$. Dodając i odejmując te równości stronami i dzieląc przez 2, otrzymamy

$$25^{2p}=3^\alpha 2^{\beta-1}+3^\gamma 2^{\delta-1}, \qquad 7^k=3^\alpha 2^{\beta-1}-3^\gamma 2^{\delta-1}.$$

Ponieważ ani 25, ani 7 nie są podzielne przez 2 i 3, należy rozpatrzyć następujące możliwości:

1. $\alpha=0$, $\beta=1$.

Mamy wówczas $7^k=1-3^y 2^{3y-2}<0$, co jest niemożliwe.

2. $\beta=1$, $\gamma=0$.

Mamy wówczas $7^k=3^y-2^{3y-2}<0$ dla $y\geqslant 2$, co jest niemożliwe.

3. $\alpha=0$, $\delta=1$.

Mamy wówczas

$$25^p=2^{3y-2}+3^y, \qquad 7^k=2^{3y-2}-3^y=2\cdot 8^{y-1}-3^y. \tag{3.3}$$

Lewa strona drugiej równości jest podzielna przez 7. Reszta z dzielenia liczby $2\cdot 8^{y-1}$ przez 7 wynosi 2. Aby więc prawa strona także była podzielna przez 7, reszta z dzielenia liczby 3^y przez 7 powinna także wynosić 2, co jak łatwo zauważyć, zachodzi tylko wtedy, gdy liczba y jest kształtu $6u+2$. Mamy więc

$$7^k=2\cdot 8^{6u+1}-3^{6u+2}=16\cdot 8^{6u}-9\cdot 3^{6u}. \tag{3.4}$$

Jeżeli $k\geqslant 2$, lewa strona tej równości jest podzielna przez 49. Łatwo jednak sprawdzić, że reszta z dzielenia liczb 8^6 i 3^6 przez 49 równa się 43. Stąd wynika, że reszta z dzielenia przez 49 prawej strony równości (3.4) jest równa reszcie z dzielenia przez 49 liczby $16\cdot 43^u-9\cdot 43^u=7\cdot 43^u$. Ponieważ jednak liczba ta nie jest podzielna przez 49 przy żadnym u, więc równanie (3.4) nie jest spełnione przy żadnym $k\geqslant 2$. Musi być zatem $k=1$. Wówczas $u=0$, skąd $x=y=z=2$.

4. $\delta=1$, $\gamma=0$.

Mamy wówczas $7^k = 2^{3y-2}3^y - 1$. Reszta z dzielenia lewej strony tej równości przez 3 wynosi 1, prawej zaś -1, czyli równość ta nie jest spełniona przy wszelkich k i y.

§ 4. Równanie $9^x + 40^y = 41^z$ $(n=4)$. Jeśli $y=1$, to na mocy lematu 4 liczba $41^{4n}+1$ musiałaby być podzielna przez 81. Tymczasem liczba ta nie jest podzielna nawet przez 9. Istotnie, reszta z dzielenia liczby 41^4 przez 9 wynosi 4, natomiast reszty z dzielenia potęg 4^u przez 9 są równe 1, 4 lub 7, skąd wynika, że liczba 4^u+1 nie jest podzielna przez 9 przy żadnym u.

Mamy zatem $y \geqslant 2$ i na mocy lematu 2 równanie nasze można napisać w postaci

$$9^{2k} + 40^y = 41^{2p}, \tag{4.1}$$

skąd

$$41^{2p} - 9^{2k} = (41^p + 9^k)(41^p - 9^k) = 5^y 2^{3y},$$

a zatem

$$41^p + 9^k = 5^\alpha 2^\beta, \qquad 41^p - 9^k = 5^\gamma 2^\delta,$$

gdzie $\alpha+\gamma=y$, $\beta+\delta=3y$. Dodając i odejmując te równości stronami i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$41^p = 5^\alpha 2^{\beta-1} + 5^\gamma 2^{\delta-1}, \qquad 9^k = 5^\alpha 2^{\beta-1} - 5^\gamma 2^{\delta-1}.$$

Ponieważ ani 41, ani 9 nie są podzielne przez 2 i 5, należy rozpatrzyć następujące możliwości:

1. $\alpha=0$, $\beta=1$.

Mamy wówczas $9^k = 1 - 5^y 2^{3y-1} < 0$, co jest niemożliwe.

2. $\delta=1$, $\alpha=0$.

Mamy wówczas $9^k = 2\cdot 8^{y-1} - 5^y$. Reszta z dzielenia lewej strony przez 4 wynosi 1, prawej strony natomiast -1, co jest niemożliwe.

3. $\beta=1$, $\gamma=0$.

Mamy wówczas $9^k = 5^y - 2\cdot 8^{y-1} > 0$ jedynie dla $y=2$, skąd $x=z=2$.

4. $\gamma=0$, $\delta=1$.

Mamy wówczas $9^k = 5^y\cdot 2\cdot 8^{y-1} - 1$. Reszta z dzielenia lewej strony przez 4 wynosi 1, prawej zaś -1, co jest niemożliwe.

§ 5. Równanie $11^x + 60^y = 61^z$ $(n=5)$. Jeśli $y=1$, to na mocy lematu 4 liczba $61^{4u}+1$ musiałaby być podzielna przez 121. Tymczasem nie jest ona podzielna nawet przez 11. Istotnie, reszta z dzielenia liczby 61^4 przez 11 wynosi 9, reszty zaś z dzielenia przez 11 potęg 9^u wynoszą 1, 9, 4, 3, 5, a zatem 9^u+1 nie jest podzielne przez 11.

Mamy zatem $y \geqslant 2$ i na mocy lematu 2 równanie nasze można napisać w postaci

$$11^{2k} + 60^y = 61^{2p}, \tag{5.1}$$

skąd

$$61^{2p} - 11^{2k} = (61^p + 11^k)(61^p - 11^k) = 2^{2y} 3^y 5^y,$$

a zatem

$$61^p + 11^k = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma, \quad 61^p - 11^k = 2^\delta 3^\varepsilon 5^\zeta,$$

gdzie

$$\alpha + \delta = 2y, \quad \beta + \varepsilon = y, \quad \gamma + \zeta = y.$$

Dodając i odejmując te równości stronami i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$61^p = 2^{\alpha-1} 3^\beta 5^\gamma + 2^{\delta-1} 3^\varepsilon 5^\zeta, \quad 11^k = 2^{\alpha-1} 3^\beta 5^\gamma - 2^{\delta-1} 3^\varepsilon 5^\zeta. \tag{5.2}$$

Ponieważ ani 61, ani 11 nie są podzielne przez 2, 3 i 5, należy rozpatrzyć następujące możliwości:

1. $\alpha = 1, \ \beta = 0, \ \gamma = 0.$
2. $\beta = 0, \ \gamma = 0, \ \delta = 1.$
3. $\alpha = 1, \ \beta = 0, \ \zeta = 0.$
4. $\alpha = 1, \ \gamma = 0, \ \varepsilon = 0.$

We wszystkich tych czterech przypadkach prawa strona drugiej równości (5.2) jest ujemna, co jest niemożliwe.

5. $\gamma = 0, \ \delta = 1, \ \varepsilon = 0.$

Mamy wówczas $11^k = 4^{y-1} 3^y - 5^y = 3 \cdot 12^{y-1} - 5^y$. Reszta z dzielenia lewej strony tej równości przez 5 wynosi 1, natomiast reszta z dzielenia przez 5 prawej strony jest równa reszcie z dzielenia przez 5 liczby $3 \cdot 2^{y-1}$. Łatwo jednak sprawdzić, że reszta ta równa się 1 jedynie wtedy, gdy y jest kształtu $4u+2$. Mamy zatem

$$11^k = 3 \cdot 12^{4u+1} - 5^{4u+2}.$$

Reszta z dzielenia lewej strony przez 8 wynosi 1 lub 3, a prawej dla $u > 0$ wynosi -1, co jest niemożliwe. Musi być zatem $u = 0$, skąd $x = y = z = 2$.

6. $\beta = 0, \ \delta = 1, \ \zeta = 0.$

Mamy wówczas $11^k = 4^{y-1} 5^y - 3^y$. Reszty z podzielenia lewej i prawej strony przez 3 są odpowiednio równe $(-1)^k$ i $(-1)^y$, skąd wynika, że liczby k i y są jednakowej parzystości. Z drugiej strony reszty z dzielenia lewej i prawej strony przez 4 są odpowiednio równe $(-1)^k$ i $-(-1)^y$, czyli k i y nie mogą być jednakowej parzystości. Przypadek ten jest zatem niemożliwy.

7. $\alpha = 1, \ \varepsilon = 0, \ \zeta = 0.$

Mamy wówczas $11^k = 15^y - 4^{y-1}$. Reszty z dzielenia prawej i lewej strony przez 11 są odpowiednio równe 0 i $4^y - 4^{y-1} = 3 \cdot 4^{y-1}$. Ponieważ

$3 \cdot 4^{y-1}$ przy żadnym y nie jest podzielne przez 11, przeto równość nasza nie zachodzi przy żadnych k i y.

8. $\delta = 1$, $\varepsilon = 0$, $\zeta = 0$.

Mamy wówczas $11^k = 4^{y-1}15^y - 1 = 15 \cdot 60^{y-1} - 1$. Reszty z dzielenia lewej i prawej strony przez 10 są odpowiednio równe 1 i -1, co jest niemożliwe.