wmptm 1897

A. SCHINZEL (Warszawa)

O liczbach pierwszych, dla których suma dzielników sześcianu jest pełnym kwadratem

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Fermat postawił Wallisowi pytanie, czy istnieje sześcian liczby naturalnej, którego suma dzielników jest kwadratem liczby naturalnej. Udowodnimy

TWIERDZENIE. *Jedyną liczbą pierwszą, której sześcian ma sumę dzielników będącą kwadratem liczby naturalnej, jest liczba* 7.

Dowód. Jeżeli p jest liczbą pierwszą, a sumą dzielników liczby p^3 jest n^2, gdzie n jest liczbą naturalną, to

$$1+p+p^2+p^3=n^2, \tag{1}$$

a zatem

$$p(1+p+p^2)=(n-1)(n+1). \tag{2}$$

Stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb naturalnych $n-1$ i $n+1$ jest podzielna przez p. Rozróżnimy dwa przypadki:

1° *p jest dzielnikiem $n-1$.* Wówczas $n-1=kp$, gdzie k jest liczbą naturalną. Równanie (2) daje więc po skróceniu przez p

$$p^2-(k^2-1)p+1-2k=0. \tag{3}$$

Na to, by równanie (3) miało pierwiastki naturalne, potrzeba, żeby liczba

$$\Delta_1=(k^2-1)^2-4(1-2k)=(k^2-1)^2+8k-4 \tag{4}$$

była kwadratem. Lecz k jest liczbą naturalną, a zatem $8k-4>0$, skąd

$$\Delta_1>(k^2-1)^2. \tag{5}$$

Gdyby było $k=1$, mielibyśmy $n-1=p$, skąd $n+1=p+2$, a zatem $1+p+p^2=p+2$, skąd $p^2=1$, co jest niemożliwe. Gdyby było $k=2$, mielibyśmy $\Delta_1=21$, co nie jest kwadratem. A więc $k\neq 2$. Gdyby było $k=3$, mielibyśmy $\Delta_1=84$, co nie jest kwadratem. A więc $k\neq 3$. Musi więc być $k\geqslant 4$; stąd $2k^2\geqslant 8k>8k-3$, zatem

$$\Delta_1=k^4-(2k^2-8k+3)<k^4. \tag{6}$$

Z nierówności (6) i (5) otrzymujemy

$$(k^2-1)^2<\Delta_1<(k^2)^2,$$

skąd wynika, że Δ_1 nie może być kwadratem liczby naturalnej, bo nie ma liczby kwadratowej zawartej między kwadratami dwóch kolejnych liczb k^2-1 oraz k^2. Równanie (3) nie ma więc w przypadku 1^0 pierwiastków naturalnych $p>1$.

2^0 *p jest dzielnikiem $n+1$*. Wówczas $n+1=kp$, gdzie k jest liczbą naturalną. Równanie (2) w tym przypadku daje po skróceniu przez p

$$p^2-(k^2-1)p+1+2k=0. \tag{7}$$

Na to, żeby równanie (7) miało pierwiastki naturalne, potrzeba, żeby liczba

$$\Delta_2=(k^2-1)^2-8k-4$$

była kwadratem. Wobec $k>0$ możemy napisać

$$\Delta_2<(k^2-1)^2. \tag{8}$$

Gdyby było $k=1$, mielibyśmy $\Delta_2=-12$, co nie jest kwadratem. A więc $k\neq 1$. Gdyby było $k=2$, mielibyśmy $\Delta_2=-11$, co nie jest kwadratem. A więc $k\neq 2$. Gdyby było $k=3$, mielibyśmy $1+p+p^2=9p-6$, czyli $p^2-8p+7=0$. Pierwiastkami tego równania są liczby 1 i 7. Nie może być $p=1$, liczba 7 zaś spełnia żądane warunki, gdyż $1+7+7^2+7^3=400=20^2$. Gdyby było $k=4$, mielibyśmy $\Delta_2=189$, co nie jest kwadratem. A więc $k\neq 4$.

A zatem jeżeli $p\neq 7$, to musi być $k\geqslant 5$, skąd $2k^2\geqslant 10k=8k+2k\geqslant 8k+10>8k+7$ i przeto

$$\Delta_2-(k^2-2)^2=2k^2-8k-7>0. \tag{9}$$

Na podstawie nierówności (8) i (9) można dla $p\neq 7$, napisać

$$(k^2-2)^2<\Delta_2<(k^2-1)^2,$$

skąd wnosimy, że liczba Δ_2, jako zawarta między kwadratami kolejnych liczb k^2-2 oraz k^2-1, nie może być kwadratem. Równanie (2) nie ma więc w przypadku 2^0, a co za tym idzie, i w ogóle, innych pierwiastków naturalnych $p>1$ prócz $p=7$, c. b. d. d.

W związku z dowiedzionym twierdzeniem zauważmy, że niedawno V. Thébault dowiódł (zob. [1], str. 129), że 3 jest jedyną liczbą pierwszą, której czwarta potęga ma sumę dzielników będącą kwadratem liczby naturalnej.

Praca cytowana

[1] V. Thébault, *Curiosités arithmétiques. 3. Au sujet d'un problème de Fermat*, Mathesis 62 (1953), str. 120-129.