wmptm 1897

A. SCHINZEL (Warszawa)

O pewnym przypuszczeniu dotyczącym rozkładów na sumę trzech kwadratów

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W swojej pracy *On sums of squares* G. Pall ([1], str. 11) przypuszcza, że każda liczba naturalna postaci $2(8n+1)$ $(n \geqslant 1)$ jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych.

Udowodnię tu, że przypuszczenie to nie sprawdza się, bo już liczba 130 nie jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych. Dowód opieram na następującym twierdzeniu:

Na to, by liczba naturalna n była sumą dwóch kwadratów liczb naturalnych, potrzeba i wystarcza, żeby w jej rozkładzie na czynniki pierwsze, czynniki postaci $4k+3$ (jeśli występują) występowały w potęgach o wykładnikach parzystych i żeby albo liczba 2 występowała z wykładnikiem nieparzystym, albo żeby liczba n miała co najmniej jeden dzielnik pierwszy postaci $4k+1$ (zob. [2], str. 509, zad. 71).

Przypuśćmy, że $130 = a^2+b^2+c^2$ i a, b, c są liczbami naturalnymi; możemy przyjąć, że $a \geqslant b \geqslant c$. Stąd wynika, że $a^2+1^2+1^2 \leqslant 130 \leqslant 3a^2$, zatem $43 < a^2 \leqslant 128$, a więc $7 \leqslant a \leqslant 11$. Lecz $130-7^2 = 81 = 3^4$, $130-8^2 = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$, $130-9^2 = 49 = 7^2$, $130-10^2 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $130-11^2 = 9 = 3^2$. Z podanych rozkładów na czynniki pierwsze liczb 81, 66, 49, 30 i 9 wynika, że żadna z nich nie spełnia warunków podanego twierdzenia i przeto, w myśl tego twierdzenia, nie jest sumą dwóch kwadratów liczb naturalnych. Liczba a zatem nie może być żadną z liczb 7, 8, 9, 10 i 11. Założenie, że 130 jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych, doprowadza więc do sprzeczności.

Łatwo też dowieść, że 130 jest najmniejszą liczbą, dla której przypuszczenie podane przez G. Palla jest fałszywe. Mamy bowiem

$$2(8 \cdot 1+1) = 18 = 1^2+1^2+4^2, \quad 2(8 \cdot 2+1) = 34 = 3^2+3^2+4^2, \quad 2(8 \cdot 3+1) = 50 = 3^2+4^2+5^2,$$
$$2(8 \cdot 4+1) = 66 = 1^2+1^2+8^2, \quad 2(8 \cdot 5+1) = 82 = 3^2+3^2+8^2,$$
$$2(8 \cdot 6+1) = 98 = 1^2+4^2+9^2, \quad 2(8 \cdot 7+1) = 114 = 1^2+7^2+8^2.$$

Prace cytowane

[1] G. Pall, *On sums of squares*, Amer. Math. Monthly 40 (1933), str. 10-18.

[2] W. Sierpiński, *Teoria liczb*, Wydanie 3, Monografie Matematyczne 19, Warszawa-Wrocław 1950.