Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

O pewnej definicji przestrzeni zupełnej

Artykuł niniejszy stanowi część pracy, ogłoszonej w 1948 r. w języku francuskim w wydawanym w Lucknow (Indie) czasopiśmie Ganita, t. 1, str. 13-16.

Jak wiadomo, przestrzeń metryczną nazywamy *zupełną*, jeżeli każdy ciąg nieskończony jej punktów, spełniający warunek Cauchy'ego, ma w tej przestrzeni granicę. (Mówimy, że ciąg nieskończony punktów $p_1, p_2, \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba naturalna n, że odległość między punktami p_n i p_{n+k} $(k=1,2,\ldots)$ jest mniejsza niż ε).

Będziemy mówili, że przestrzeń metryczna M ma *własność Ascoliego*, jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego kul domkniętych tej przestrzeni, z których każda zawiera następną i których promienie zmierzają do zera, istnieje punkt wspólny wszystkim kulom tego ciągu. (*Kulą domkniętą* o środku p i promieniu r, zawartą w przestrzeni metrycznej M, nazywamy zbiór $S(p,r)$ wszystkich punktów przestrzeni M, których odległość od punktu p nie jest większa niż r).

Celem niniejszego artykułu jest dowód następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE. *Na to, żeby przestrzeń metryczna była zupełna, potrzeba i wystarcza, żeby miała własność Ascoliego.*

Dowód. 1. Warunek jest konieczny. Istotnie, przypuśćmy, że przestrzeń M jest zupełna i niech $S_1, S_2, \ldots$ będzie ciągiem nieskończonym kul domkniętych przestrzeni M, takich że $S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ i których promienie zmierzają do zera. Niech dla $n=1,2,\ldots$ będzie $S_n = S(p_n, r_n)$. Oznaczając przez ϱ odległość w przestrzeni M, wobec $S_n \supset S_{n+k}$ (dla $k=1,2,\ldots$) mamy $\varrho(p_{n+k}, p_n) < r_n$, a ponieważ $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, więc $\varrho(p_{n+k}, p_n) < \varepsilon$ dla n dostatecznie wielkich oraz dla $k=1,2,\ldots$; stąd wynika, że ciąg $p_1, p_2, \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ponieważ zaś przestrzeń M jest zupełna, więc $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in M$, a ponieważ $p_{n+k} \in S_n$, dla $k=1,2,\ldots$, i kula S_n jest domknięta, więc $p = \lim_{n\to\infty} p_{n+k} \in S_n$ dla $k=1,2,\ldots$, skąd wynika, że $p \in S_1 S_2 \ldots$

2. Warunek jest dostateczny. Istotnie, przypuśćmy, że przestrzeń metryczna M ma własność Ascoliego i niech $p_1, p_2, \ldots$ będzie ciągiem

nieskończonym punktów przestrzeni M, spełniającym warunek Cauchy'ego. Dla każdej liczby naturalnej k istnieje więc taka najmniejsza liczba naturalna n_k, że

$$\varrho(p_{n_k}, p_n) < 2^{-k} \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_k. \tag{1}$$

Jest więc $n_{k+1} \geqslant n_k$ dla $k=1,2,\ldots$ Oznaczmy

$$S_k = S(p_{n_k}, 2^{-k+1}) \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots \tag{2}$$

Niech k oznacza pewną liczbę naturalną. Dla $q \in S_{k+1}$ jest $\varrho(q, p_{n_{k+1}}) \leqslant 2^{-k}$, a wobec $n_{k+1} \geqslant n_k$ oraz (1) mamy $\varrho(p_{n_k}, p_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$. Zatem

$$\varrho(q, p_{n_k}) \leqslant \varrho(q, p_{n_{k+1}}) + \varrho(p_{n_{k+1}}, p_{n_k}) < 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{-k+1}.$$

A więc $q \in S_k$ dla $q \in S_{k+1}$. Stąd wynika, że $S_{k+1} \subset S_k$ dla $k=1,2,\ldots$

Ponieważ przestrzeń M ma własność Ascoliego, więc istnieje taki punkt $p \in M$, że $p \in S_k$ dla $k=1,2,\ldots$ Wobec (2) jest więc $\varrho(p, p_{n_k}) \leqslant 2^{-k+1}$, a zatem wobec (1) dla $n \geqslant n_k$ mamy

$$\varrho(p, p_n) \leqslant \varrho(p, p_{n_k}) + \varrho(p_{n_k}, n) < 2^{-k+1} + 2^{-k} < 2^{-k+2},$$

skąd $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$. Przestrzeń M jest więc zupełna.

Udowodniliśmy więc twierdzenie. Pozwala ono zastąpić zwykłą definicję przestrzeni zupełnych następującą, niemniej naturalną niż zwykła: *Przestrzeń metryczną nazywamy zupełną, jeżeli ma własność Ascoliego.*

Zwykła definicja przestrzeni zupełnych nawiązuje do teorii Cantora liczb niewymiernych; moglibyśmy powiedzieć, że nasza definicja przestrzeni zupełnych nawiązuje do teorii Dedekinda liczb niewymiernych (gdyż własność Ascoliego dla przedziałów domkniętych może, jak wiadomo, zastąpić pewnik ciągłości Dedekinda).

Zauważymy tu jeszcze, że w przestrzeni zupełnej iloczyn ciągu nieskończonego zstępującego kul domkniętych może być pusty. Rzeczywiście, niech P oznacza zbiór przeliczalny, $P=\{p_1, p_2, \ldots\}$, i niech $\varrho(p_n, p_n) = 0$ dla $n=1,2,\ldots$ oraz $(p_k, p_l) = 1+1/(k+l)$ dla $k \neq l$. Łatwo można dowieść, że zbiór P stanie się w ten sposób przestrzenią zupełną z odległością ϱ. Przyjmijmy $S_n = S(p_n, 1+1/2n)$. Warunek $p_k \in S_n$ jest oczywiście równoważny nierówności $\varrho(p_k, p_n) \leqslant 1+1/2n$, a zatem nierówności $1+1/(k+n) \leqslant 1+1/2n$, czyli nierówności $k \geqslant n$. Stąd wynika, że $S_n = \{p_n, p_{n+1}, \ldots\}$, a stąd $S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ oraz $S_1 S_2 S_3 \ldots = 0$.

Twierdzenie nie byłoby więc prawdziwe, gdybyśmy w definicji własności Ascoliego opuścili warunek, że promienie kul zmierzają do zera.