wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

R. Sikorski (Warszawa)

O definicji funkcji analitycznej wieloznacznej

Podawana w podręcznikach definicja funkcji analitycznej wieloznacznej opiera się zwykle na identyfikowaniu pojęcia funkcji analitycznej wieloznacznej z pojęciem powierzchni Riemanna (dokładniej: ze zbiorem elementów gładkich powierzchni Riemanna). Funkcję analityczną definiuje się wtedy jako zbiór elementów analitycznych, spełniający pewne dodatkowe warunki. Ten sposób definiowania jest bardzo abstrakcyjny, mało poglądowy i trudny do przyswojenia dla przeciętnie zdolnego studenta. Tak zdefiniowana funkcja analityczna wieloznaczna przestaje właściwie być funkcją, tzn. przyporządkowaniem pewnym przedmiotom matematycznym innych przedmiotów matematycznych. Zresztą taka definicja funkcji analitycznej wieloznacznej pozostaje w kolizji ze zwykłą roboczą definicją różnych specjalnych funkcji analitycznych wieloznacznych, jak $\log z$, z^a, których przecież nikt nie definiuje jako zbiorów elementów analitycznych.

Wydaje mi się, że poprawna (zarówno pod względem merytorycznym, jak i dydaktycznym) droga postępowania powinna być następująca. Najpierw wprowadzamy ogólne pojęcie funkcji wieloznacznej, tzn. funkcji, która liczbom zespolonym przyporządkowuje pewne, na ogół wieloelementowe zbiory liczb zespolonych, następnie przez nałożenie pewnych prostych warunków wyodrębniamy pewną węższą klasę funkcji wieloznacznych, które nazywamy funkcjami analitycznymi. Ten sposób postępowania stosujemy przecież systematycznie w dziedzinie funkcji jednoznacznych, mianowicie najpierw definiuje się ogólne pojęcie funkcji jednoznacznej, tj. przyporządkowania liczbom pewnych liczb, następnie przez nałożenie dodatkowych warunków wyodrębniamy węższe klasy funkcji, np. funkcje ciągłe, analityczne itp.

Dalej podaję dokładny opis sposobu wprowadzenia pojęcia funkcji analitycznej wieloznacznej [1]).

Definicja I. Niech f i g będą funkcjami meromorficznymi określonymi w obszarach G i H. Mówimy, że funkcja g jest *bezpośrednim prze-*

[1]) Terminologia użyta w niniejszej pracy jest taka sama jak w książce, A. Zygmund i S. Saks, *Funkcje analityczne*, Monografie Matematyczne 10: Warszawa 1938.

dłużeniem funkcji f, jeżeli $GH \neq 0$ i $f(z)=g(z)$ dla każdego $z \in GH$. Mówimy, że funkcja g jest *przedłużeniem funkcji* f *w obszarze* H_0 (zawierającym obszary G i H), jeżeli istnieje taki ciąg funkcji meromorficznych $f_1, f_2, \ldots, f_n$ określonych w obszarach odpowiednio $G_1, G_2, \ldots, G_n$, że f_{j+1} jest bezpośrednim przedłużeniem f_j dla $j=1,2,\ldots,n-1$, $G_j \subset H_0$ dla $j=1,2,\ldots,n$ oraz $f_1=f$, $f_n=g$, $G_1=G$, $G_n=H$.

DEFINICJA II. *Funkcją zespoloną wieloznaczną* F określoną w obszarze G nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi $z \in G$ pewnego zbioru $F(z)$ liczb zespolonych.

Zbiór $F(z)$ może być pusty dla pewnych $z \in G$. Zakładamy jednak, że istnieje taka liczba zespolona $z_0 \in G$, że zbiór $F(z_0)$ nie jest pusty.

DEFINICJA III. *Gałęzią* funkcji zespolonej wieloznaczenj F określonej w obszarze G nazywamy każdą taką funkcję meromorficzną f określoną na pewnym obszarze $H \subset G$, że $f(z) \in F(z)$ dla każdego $z \in H$.

DEFINICJA IV. *Funkcją analityczną* (wieloznaczną) w obszarze G nazywamy każdą funkcję zespoloną wieloznaczną F określoną w G, spełniającą warunki:

a. Jeżeli $z_0 \in G$ i $w_0 \in F(z_0)$, to istnieje taka gałąź f funkcji F określona w pewnym obszarze $H \subset G$ zawierającym punkt z_0, że $f(z_0)=w_0$.

b. Jeżeli funkcje meromorficzne f i g są gałęziami funkcji F, to g jest przedłużeniem funkcji f w obszarze G.

c. Jeżeli funkcja meromorficzna f jest gałęzią funkcji F, a funkcja meromorficzna g jest przedłużeniem funkcji f w obszarze G, to g jest gałęzią funkcji F.

Jeżeli G jest całą płaszczyzną, to zamiast *funkcja analityczna w obszarze* G mówimy wprost *funkcja analityczna*.

DEFINICJA V. *Podobszarem naturalnym* funkcji analitycznej F *w obszarze* G nazywamy zbiór H takich liczb $z \in G$, że $F(z)$ nie jest zbiorem pustym. *Obszarem naturalnym funkcji analitycznej* F nazywamy zbiór H takich liczb z, że $F(z)$ nie jest zbiorem pustym.

Wprowadzenie pojęcia przedłużenia analitycznego wzdłuż krzywej jest właściwie zbędne w elementarnym wykładzie teorii funkcji analitycznych. Wystarczy posługiwać się pojęciem przedłużania podanym w definicji I. Tak na przykład pojęcie dowolnej przedłużalności można zdefiniować jak następuje:

DEFINICJA VI. Funkcja F analityczna w obszarze G jest *dowolnie przedłużalna w* G, jeżeli:

a. G jest podobszarem naturalnym funkcji F.

b. Jeśli f jest gałęzią funkcji F określoną w pewnym obszarze H ($\bar{H} \subset G$) ograniczonym krzywą regularną Jordana Γ, to każdy punkt ograniczenia Γ jest punktem przedłużalności funkcji f.

Twierdzenie o monodromii można bardzo łatwo udowodnić przy powyższej definicji dowolnej przedłużalności np. metodą odwzorowania wiernego obszaru jednospójnego na wnętrze koła jednostkowego.

Podana poprzednio definicja funkcji analitycznej wieloznacznej nie jest bynajmniej definicją powierzchni Riemanna tej funkcji (ani jej podzbioru złożonego z elementów gładkich). Moim zdaniem pojęcie funkcji analitycznej i jej powierzchni Riemanna (czy też zbioru gładkich elementów tej powierzchni) są to istotnie różne pojęcia, chociaż pozostają one w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej. Pierwsze z tych pojęć ma prosty charakter analityczny, drugie jest dość skomplikowanym pojęciem topologicznym.

W elementarnym wykładzie teorii funkcji analitycznych, gdy słuchacz nie ma dostatecznie ugruntowanych wiadomości z topologii, trudno jest rozwijać teorię powierzchni Riemanna. Należy zadowolić się jedynie podaniem wzmianki wraz z uwagą, że funkcja analityczna wieloznaczna wyznacza pewną jednoznaczną funkcję zespoloną, określoną na jej powierzchni Riemanna. Tego rodzaju postępowanie przewiduje zresztą obecny program wykładu teorii funkcji analitycznych na uniwersytetach.

Zauważmy, że podana tutaj metoda wprowadzenia pojęcia funkcji analitycznej wieloznacznej może być również stosowana w innych przypadkach, np. dla funkcji wieloznacznych harmonicznych.