wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

E. TARNAWSKI (Gdańsk)

O ocenie błędu powstałego przy stosowaniu interpolacji liniowej w czterocyfrowych tablicach logarytmicznych

W czterocyfrowych tablicach matematyczno-fizycznych Łomnickiego [2] na stronicy VII czytamy, że gdy interpolacja liniowa tych tablic stosowana jest do liczb 100, 101, ..., 998, 999, to błąd nie przekracza „liczby 0,000006 (dokładniej 0,000005426...)".

„Ponieważ zaś już przez samo zaokrąglenie logarytmów do czterech miejsc dziesiętnych popełniamy błędy dochodzące do 0,00005, a więc prawie dziesięć razy większe, przeto jasnym jest, że taka proporcjonalna interpolacja jest przy tej dokładności rachunku dozwolona".

W niniejszym artykule błąd, o którym mowa, ocenimy dokładniej aniżeli podano w tablicach Łomnickiego.

Wiadomo, że bezwzględna wartość błędu, który popełniamy zastępując wartości funkcji ich przybliżeniami dziesiętnymi podanymi w tablicach czterocyfrowych, nie przekracza liczby $a = 0{,}00005$.

W tablicach są podane wartości funkcji dla końców równych przedziałów zmiennej niezależnej. Chcąc ocenić wartość funkcji, którą oznaczmy przez $f(x)$, w pewnym punkcie x jednego z tych przedziałów $\langle a, b\rangle$, stosujemy zazwyczaj interpolację liniową. Polega ona na tym, że wartości funkcji $f(x)$ w odpowiednim punkcie przedziału $\langle a, b\rangle$ zastępujemy wartościami funkcji liniowej

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

która ma na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$ te same wartości co funkcja $f(x)$. Odchylenie $\Delta(x)$ obu funkcji (błąd powstały przy zastosowaniu tej interpolacji) wynosi

$$\Delta(x) = f(x) - g(x).$$

Interpolację liniową stosujemy jednak faktycznie nie do dokładnych wartości funkcji $f(x)$ na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$, tzn. nie do $f(a)$ i $f(b)$, ale do przybliżonych wartości funkcji, tj. do $f(a) - \eta_1$ i $f(b) - \eta_2$, gdzie η_1 i η_2 oznaczają błędy tablicowe, które popełniamy zastępując wartości

dokładne $f(a)$ lub $f(b)$ wartościami przybliżonymi. W tym przypadku otrzymujemy następujące równanie prostej interpolującej:

$$y(x) = f(a) - \eta_1 + \frac{f(b) - f(a) + \eta_1 - \eta_2}{b - a}(x - a),$$

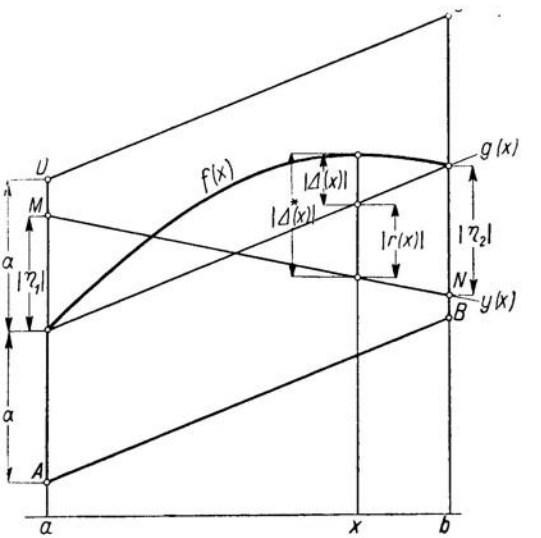
a odchylenie $\Delta^*(x)$ wartości funkcji $f(x)$ i $y(x)$ (odchylenie wartości przybliżonej od prawdziwej) wyraża się wzorem

$$\Delta^*(x) = f(x) - y(x) = \Delta(x) + \eta_1 \frac{b - x}{b - a} + \eta_2 \frac{x - a}{b - a}. \tag{1}$$

Tak więc błąd $\Delta^*(x)$, który powstał w punkcie x przy zastosowaniu interpolacji liniowej do wartości przybliżonych funkcji $f(x)$ na końcach przedziału $\langle a,b\rangle$, wyraziliśmy przez błędy tablicowe η_1 i η_2 oraz przez błąd $\Delta(x)$, który by powstał, gdyby interpolację liniową stosować do wartości prawdziwych funkcji $f(x)$ na końcach przedziału $\langle a,b\rangle$. Ponieważ $|\eta_1| \leqslant \alpha$ oraz $|\eta_2| \leqslant \alpha$, gdzie α oznacza kres górny błędu wartości tablicowych, więc wobec (1) i $a \leqslant x \leqslant b$ mamy

$$|\Delta^*(x)| \leqslant |\Delta(x)| + \alpha. \tag{2}$$

Prostą ilustrację geometryczną nierówności (2) widzimy na rysunku.



Ilustracja geometryczna nierówności (2): Jakkolwiek obierzemy punkty M i N boków AD i BC równoległoboku $ABCD$, zawsze $|r(x)|$, tj. błąd bezwzględny powstały po zastąpieniu prostej $g(x)$ przez prostą $y(x)$, nie będzie przekraczał α

Okazuje się, że przy obliczaniu błędu bezwzględnego $|\Delta^*(x)|$ można by pominąć błąd $|\Delta(x)|$, jeśliby był on bardzo mały w stosunku do α.

Przystępując do oceny wartości $|\Delta(x)|$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ załóżmy, że funkcja $f(x)$ określona w przedziale $\langle a,b\rangle$ ma w całym tym przedziale drugą pochodną. Stosując znane twierdzenie o przybliżeniu funkcji przez wielomian interpolacyjny (por. [1], str. 95, wzór (47) dla $n=1$) otrzymujemy

$$\Delta(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(x - b), \tag{3}$$

gdzie ξ jest pewnym punktem wnętrza przedziału $\langle a,b\rangle$ zależnym od x. Wynika stąd, że dla $a\leqslant x\leqslant b$ jest spełniona nierówność

$$|\Delta(x)|\leqslant\frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|(x-a)(b-x),$$

gdzie $\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$ oznacza największą wartość funkcji $|f''(x)|$ w przedziale $\langle a,b\rangle$. Wobec tego, że

$$(x-a)(b-x)\leqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

dla każdego x z przedziału $\langle a,b\rangle$, więc

$$|\Delta(x)|\leqslant\frac{1}{8}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|(b-a)^2. \tag{4}$$

Zastosujemy otrzymane wzory do oszacowania błędu bezwzględnego $|\Delta(x)|$ dla $f(x)=\log x$ [1]), gdy badanie dotyczy przedziałów o długości 1, których lewe końce są wyrazami skończonego ciągu liczbowego

$$100,101,\ldots,998,999. \tag{5}$$

Wobec (3) i (4) mamy

$$\Delta(x)=\frac{M}{2\xi^2}(x-k)(k+1-x)\leqslant\frac{M}{8\xi^2}\quad\text{dla}\quad k\leqslant x\leqslant k+1, \tag{6}$$

gdzie k oznacza jedną z liczb ciągu (5), ξ jest pewną liczbą z wnętrza przedziału $\langle k,k+1\rangle$ zależną od x, a $M=0{,}434294481\ldots$ Wobec (6) słuszna jest nierówność

$$0\leqslant\Delta(x)\leqslant10^{-4}M/8,\quad\text{gdzie}\quad 10^{-4}M/8=0{,}00000542868\ldots$$

Znaleźliśmy zatem wynik zbliżony do wyniku podanego w tablicach Łomnickiego, ale mniej dokładny.

Obliczmy teraz, dla jakiego x błąd

$$\Delta(x)=\log x-\log k-(x-k)\log(1+1/k) \tag{7}$$

przybiera w przedziałach $\langle k,k+1\rangle$ swoją wartość największą, jeżeli k jest jedną z liczb ciągu (5).

Oznaczmy przez $\Phi(k)$ największą wartość funkcji $\Delta(x)$ w przedziale $\langle k,k+1\rangle$ i zastosujmy wzór (6). Otrzymamy nierówności

$$\Phi(k)\geqslant\Delta\left(k+\frac{1}{2}\right)>\frac{M}{8(k+1)^2},\qquad\Phi(k+1)\leqslant\frac{M}{8(k+1)^2},$$

[1]) W artykule tym logarytm naturalny oznaczamy przez ln, logarytm dziesiętny zaś przez log.

a stąd $\Phi(k)>\Phi(k+1)$. Funkcja $\Phi(k)$ jest malejąca, przybiera zatem największą wartość dla $k=100$.

Obliczamy $\Phi(100)$. W tym celu szukamy maksimum funkcji $\Delta(x)$ w przedziale $\langle 100,101\rangle$. Wobec tego, że $\Delta'(x)=M(1/x-\delta)$, gdzie $\delta=\ln 1{,}01$ oraz $\Delta''(x)=-M/x^2<0$ dla $x>0$, więc $\Delta(x)$ przybiera w przedziale $\langle 100,101\rangle$ największą wartość dla $x_0=1/\delta$ ($\delta=\ln 1{,}01$). Największy błąd wynosi zatem $\Delta(x_0)$.

Uwzględniając (7) otrzymujemy

$$\Delta(x_0)=M(100\delta-\ln\delta-1)-2,$$

a podstawiając $\delta_1=100\delta=100\ln 1{,}01$ mamy

$$\Delta(x_0)=M(\delta_1-\ln\delta_1-1).$$

Aby obliczyć δ, rozwijamy funkcję $\ln(1+x)$ w szereg potęgowy

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots$$

Podstawiając $x=0{,}01$ i uwzględniając 7 pierwszych wyrazów szeregu obliczamy

$$\delta=\ln 1{,}01\approx 0{,}009950330853168$$

z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $1\cdot 10^{-15}$, a stąd

$$\delta_1\approx 0{,}9950330853168$$

z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $1\cdot 10^{-13}$.

Aby obliczyć $\ln\delta_1$, napiszmy rozwinięcie funkcji $\ln(1-x)$ w szereg potęgowy [2])

$$\ln(1-x)=-\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1}+\frac{x^3}{3}+\ldots\right).$$

Podstawiając $x=0{,}0049669146832$ (kres błędu $1\cdot 10^{-13}$) i uwzględniając 5 pierwszych wyrazów szeregu obliczamy

$$\ln\delta_1\approx -0{,}0049792908017$$

---

[2]) W obu obliczeniach wartości logarytmu z dużą dokładnością można by się posłużyć szeregiem szybciej zbieżnym niż wyżej napisany, np. szeregiem

$$\ln(1+t)=2\left(\frac{t}{2+t}+\frac{1}{3}\left(\frac{t}{2+t}\right)^3+\ldots\right),$$

który otrzymujemy przez odjęcie tamtych i podstawienie $(1+x)/(1-x)=1+t$. Okazuje się jednak, że w przypadku wartości 0,01 oraz 0,0049669146832 napisane wyżej rozwinięcia funkcji logarytmicznej nadają się lepiej, bo mimo że musimy uwzględnić więcej wyrazów szeregu, rachunek jest prostszy.

z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $2\cdot 10^{-13}$. Stąd

$$\delta_1 - \ln\delta_1 - 1 \approx 0{,}0000123761185$$

z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $3\cdot 10^{-13}$.

Gdy wykonamy mnożenie przez M ($M \approx 0{,}4342944819$), wówczas otrzymamy szukany wynik 0,0000053748..., a jako jego przybliżenie, z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $5\cdot 10^{-13}$ (z dokładnością do 12 miejsc), liczbę

$$0{,}000005374880.$$

Wynik ten jest różny od wyniku podanego w tablicach Łomnickiego na stronicy VII.

Prace cytowane

[1] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1954.

[2] A. Łomnicki, *Czterocyfrowe tablice matematyczno-fizyczne*, wyd. XI, Warszawa 1950.