wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

S. Gołąb (Kraków)

O kilku kwestiach związanych z metodą wykładu geometrii analitycznej

Treść odczytu wygłoszonego na konferencji dydaktycznej poświęconej geometrii analitycznej w dniach 14 i 15 maja 1954 r. w Krakowie

Ze względu na to, że uwagi niniejsze dotyczą pewnych reform odnoszących się do metody wykładu przedmiotu uświęconego długą tradycją (choć ostatnie lata przyniosły już znaczne zmiany w tym kierunku), życzyłbym sobie, by potraktowano te uwagi jako materiał do dyskusji.

K. Borsuk w przedmowie do swego podręcznika *Geometria analityczna w n wymiarach* wspomina o trudnościach spotykanych przy wykładzie geometrii analitycznej. Trudności te są, moim zdaniem, dość duże i większość autorów przechodzi raczej nad nimi do porządku, a tylko niektórzy starają się je przezwyciężyć.

Skąd pochodzą te trudności? Ażeby na to pytanie dać jasną odpowiedź, przede wszystkim zastanówmy się, czym ma być wykład geometrii analitycznej i jakie cele ma spełnić. Tutaj nie jesteśmy w tak wyraźnej sytuacji, jak przy wykładzie analizy matematycznej, gdzie zakładamy znajomość arytmetyki teoretycznej, na podstawie której można już konsekwentnie oprzeć pojęcie granicy i budować całą analizę.

Geometria analityczna jest w gruncie rzeczy pewną metodą traktowania geometrii. I tutaj można zająć dwa konsekwentne stanowiska:

Albo zakładamy dokładną (i ugruntowaną, a więc opartą na porządnym systemie aksjomatycznym) znajomość geometrii i wówczas geometria analityczna jest w pierwszej instancji tylko pewną interpretacją znanego systemu na gruncie arytmetyki, pewnym modelem — jak mówimy w logice matematycznej — i powinna polegać na „przetłumaczeniu" pojęć pierwotnych i aksjomatów na pewne znane fakty z arytmetyki. Natomiast w drugiej instancji geometria analityczna powinna służyć do tego, by pewne twierdzenia, których dowód na gruncie systemu aksjomatycznego byłby trudny, udowodnić metodą analityczną znacznie prościej.

Albo nie zakładamy znajomości geometrii w postaci syntetycznej i wtedy trzeba oczywiście budować geometrię analityczną od podstaw.

Tymczasem większość autorów zajmuje stanowisko raczej pośrednie. Z jednej strony, zakładając znajomość geometrii posługują się jej twierdzeniami, z drugiej strony, definiując pewne geometryczne pojęcia na drodze czysto analitycznej presuponują niedostateczną znajomość faktów z geometrii, wyniesionych ze szkoły średniej.

Nie ulega wątpliwości, że w szkole średniej nie możemy dać systematycznego, pełnego i ze stanowiska logiki należycie ugruntowanego wykładu geometrii Euklidesa. Istnieją jednak pojęcia geometryczne trudne do zdefiniowania na gruncie systemu aksjomatycznego, a znacznie łatwiejsze do określenia na drodze analitycznej. Wreszcie istnieją pojęcia i kwestie z nimi związane, jak np. pojęcia orientacji płaszczyzny czy przestrzeni, o których nawet w rozbudowanych systemach aksjomatycznych nie zawsze się mówi, a w szkole średniej pomija się z reguły.

Okoliczności tutaj przytoczone powodują właśnie „nieczystość" tradycyjnej metody geometrii analitycznej.

Wprawdzie na pierwszym wykładzie geometrii analitycznej zapewniamy studentów, że metoda geometrii analitycznej polega na przetłumaczeniu języka geometrycznego na język algebraiczny, a więc na przyporządkowaniu zasadniczym tworom geometrycznym odpowiednich tworów algebraicznych, student jednak spostrzega w następnych wykładach, że z pewnych twierdzeń geometrii się korzysta (np. z twierdzeń Talesa lub Pitagorasa dla wyprowadzenia równania linii prostej czy wzoru na odległość dwóch punktów), innych zaś twierdzeń geometrycznych dowodzi się rachunkiem. Powoduje to dezorientację studentów co do roli jaką ma spełnić geometria analityczna.

Dalsza trudność w wykładach geometrii analitycznej wiąże się z pojęciem układu współrzędnych. Pojęcie układu Kartezjusza nie jest trudne, zwłaszcza, że w szkole średniej mówi się już o tym, może nie całkiem ściśle, ale wystarczająco do wyrobienia należytego wyobrażenia. W geometrii analitycznej jednak nie możemy poprzestać na jednym, raz na zawsze przyjętym, układzie współrzędnych; musimy posługiwać się różnymi układami współrzędnych, bo musimy przekształcać te twory algebraiczne, które są przyporządkowane tworom geometrycznym za pomocą układu współrzędnych. A więc wobec dopuszczenia nieskończonej ilości układów współrzędnych przypisujemy *de facto* danej figurze geometrycznej (lub danej relacji między figurami) nieskończoną ilość tworów algebraicznych (lub związków między nimi) w zależności od wyboru jednego z dopuszczalnych układów współrzędnych. Łączy się to ściśle z kleinowskim punktem widzenia na geometrię, do którego student pierwszego roku studiów jeszcze nie całkiem dojrzał.

W związku z tym nie zgodziłbym się z poglądem K. Brosuka, że arytmetyczne pojęcie wektora swobodnego i jego zwrotu jest prostsze

od sensu geometrycznego tego pojęcia. Wprawdzie przejście od geometrycznie prostego pojęcia wektora zaczepionego jako pary punktów do pojęcia wektora swobodnego wymaga pewnej subtelności logicznej, mianowicie definiowania przez abstrakcję za pomocą pewnej relacji równoważności, jednak definicja analityczna wektora swobodnego, jako jednoznacznego przyporządkowania każdemu układowi współrzędnych trójki liczb, zawiera w sobie pewne trudności, które muszą być przy definicji z miejsca omówione i wyświetlone. Natomiast takie pojęcia, jak orientacja płaszczyzny czy przestrzeni albo relacja równoskrętności dwu układów Kartezjusza mają prostszy wyraz algebraiczny aniżeli sens geometryczny.

Wspomniałem już, że wykład geometrii szkolnej obywa się zwykle bez tych pojęć. Ale pojęcia te są ważne i w wykładzie uniwersyteckim muszą być uwzględnione, a ponieważ są trudne, więc w podręcznikach bywają przeważnie traktowane po macoszemu. Weźmy dla przykładu pojęcie iloczynu wektorowego. Nie wszystkie podręczniki z dostateczną wyrazistością podkreślają zależność tego pojęcia od orientacji przestrzeni. Zatrzymajmy się na dwóch polskich podręcznikach K. Borsuka oraz M. Starka. Określenie iloczynu wektorowego jest u Borsuka czysto geometryczne (prostopadłość do dwóch danych wektorów, ustalenie długości za pomocą pola równoległoboku rozpiętego na danych wektorach, ustalenie zwrotu przez postulat równoskrętności dwóch trójek wektorów); na podstawie przyjętej definicji Borsuk wyprowadza następnie wzory na współrzędne iloczynu wektorowego. Pierwsze cechy określenia opierają się na pojęciach geometrii „przedanalitycznej", określenie zaś równoskrętności dwóch trójek wektorów, którego to pojęcia autor podręcznika nie zakłada jako znane, podane jest na drodze czysto analitycznej. Autor popełnia tę niekonsekwencję przypuszczalnie dlatego, że czysto geometryczne określenie tego pojęcia nie jest proste. Stark wprawdzie czuje, że potrzeba określić geometrycznie relację zgodności dwu trójek wektorów, ale w rezultacie nie dowodzi twierdzenia o równoważności odpowiednich pojęć geometrycznych i algebraicznych (ograniczając się do dowodu tylko w przypadku prostszym geometrii płaskiej). Ponadto Stark bierze jako sens geometryczny nie ten, który — moim zdaniem — bardziej przemawia do intuicji.

Geometryczne pojęcie równoskrętności dwu trójek wektorów ma tę słabą stronę, że posługuje się pojęciem „ruchu" figury w przestrzeni. To pojęcie można wprawdzie zastąpić pojęciem jednoparametrowej rodziny figur, ale i tu nie obejdzie się bez trudności związanych z pojęciem „bliskości" dwóch figur. Według określenia podanego u M. Starka, figura F złożona z trójki (uporządkowanej) wektorów niekomplanarnych jest równoskrętna z figurą F' złożoną z innej trójki wektorów, jeśli ist-

nieje ruch ciągły figury F, przy którym wektory figury mogą się deformować (zmieniać długości i kierunki), przekształcający trójkę wektorów figury F w odpowiednią trójkę wektorów figury F' i przy tym taki, żeby wektory deformującej się figury w żadnej pośredniej pozycji nie stały się komplanarne.

Definicja ta ze względów metodologicznych jest — moim zdaniem — gorsza od podanej dalej, po pierwsze dlatego, że posługuje się ruchem nie sztywnym, lecz takim, przy którym figura ulega deformacjom, po drugie zaś dlatego, że można figurę F przekształcić na równoskrętną F' przechodząc także przez komplanarne pozycje figury zmiennej. Uważam też, że ze stanowiska intuicji geometrycznej lepsze jest następujące określenie, redukujące pojęcie równoskrętności dwóch trójek niekomplanarnych w przestrzeni do pojęcia dwóch par niekolinearnych wektorów na płaszczyźnie. Mówimy mianowicie, że F jest wtedy *równoskrętne z* F', gdy wykonawszy taki sztywny ruch figury F w przestrzeni, który by przeprowadzał pierwszy wektor trójki F w pozycję zgodną co do kierunku i zwrotu z pierwszym wektorem trójki F' oraz płaszczyznę pierwszej pary wektorów figury F w płaszczyznę pierwszej pary wektorów figury F', i to w taki (jeden z dwu możliwych) sposób, by orientacje tych płaszczyzn indukowane przez wspomniane pary wektorów były zgodne, osiągniemy to, że trzecie wektory obu trójek znajdą się po tej samej stronie wspólnej płaszczyzny.

Rzecz jasna nie twierdzę, że określenia te są proste i że łatwo jest wykazać równoważność tego skomplikowanego pod względem geometrycznym pojęcia ze stosunkowo prostym jego wyrazem analitycznym.

Ale podręczniki geometrii analitycznej unikają nawet kwestii pojęciowo prostszych.

Weźmy dla przykładu wzór na jednoznacznie określony kąt, który tworzy para prostych na zorientowanej płaszczyźnie. Mając parę prostych

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{1}$$

chodzi nam o znalezienie kąta φ mniejszego od π, o który musi się w dodatnim kierunku obrócić pierwsza prosta, ażeby się pokryć z drugą.

W niektórych podręcznikach (ale nie we wszystkich) wyprowadzany jest wzór

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \tag{2}$$

gdzie m_i są współczynnikami kierunkowymi wspomnianych prostych. *Nota bene*, wzoru tego nie wprowadza się ogólnie, lecz tylko w przypadkach szczególnych i to z pomocą rysunku.

Zauważmy jednak, że wzór (2) nie jest dość ogólny, bo użyliśmy szczególnej postaci równania prostej $y=mx+n$. Oczywiście można wyprowadzić wzór ogólny

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \cdot \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

którego jednak nie znalazłem w żadnym podręczniku, choć wydaje się potrzebny. Wyprowadzenie tego wzoru wiąże się z kwestią orientacji płaszczyzny, do czego jeszcze powrócę.

Mówi się, że orientację płaszczyzny, czyli ustalenie na niej określonego kierunku obrotów, można uzyskać albo przez podanie pary liniowo niezależnych wektorów, albo — co bardziej przemawia do intuicji — przez ponumerowanie trzech wierzchołków lub, co na jedno wychodzi, trzech boków pewnego trójkąta.

Mając dany trójkąt z takim „obiegiem" bądź za pomocą równań trzech boków

$$a_ix+b_iy+c_i=0 \qquad (i=1,2,3), \tag{4}$$

bądź za pomocą współrzędnych wierzchołków

$$A_i(x_i,y_i) \qquad (i=1,2,3),$$

stajemy przed zagadnieniem, czy ta orientacja jest zgodna, czy przeciwna do orientacji nadanej płaszczyźnie przez układ współrzędnych, do którego odnosimy nasz rachunek. W podręcznikach spotkałem kryterium stosujące się do przypadku, gdy trójkąt jest dany przez współrzędne wierzchołków, które mówiło, że zachodzi zgodność, gdy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

jest dodatni, a niezgodność, gdy wyznacznik ten jest ujemny. Nie spotkałem jednak odpowiedniego kryterium dla przypadku, gdy trójkąt jest dany równaniami (4) boków. W tym przypadku kryterium zgodności jest

$$W_1W_2W_3>0, \quad \text{gdzie} \quad W_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad W_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad W_3=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Poruszę jeszcze jedno zagadnienie płaskiej geometrii analitycznej, związane z pojęciem orientacji płaszczyzny.

Przypuśćmy, że chodzi o znalezienie kątów wewnętrznych trójkąta, gdy trójkąt ten dany jest równaniami (4) boków. Oczywiście można by

znaleźć współrzędne wierzchołków i — gdy wykład prowadzimy metodą wektorową — zastosować wzory na cosinus kąta między wektorami. Ale chodzi o bezpośrednie obliczenie kątów wewnętrznych trójkąta z równań (4). Otóż odpowiedni wzór, np. na kąt α_3 trójkąta między bokami o numerach 1 i 2, otrzymuje się przez pomnożenie prawej strony równania (3) przez $-\operatorname{sgn}(W_1W_2W_3)$, co daje

$$\cos\alpha_3 = -\operatorname{sgn}(W_1W_2)\,\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Przytoczone tutaj przykłady wskazują na to, że wiele twierdzeń geometrycznych, zwłaszcza tych, w których interweniuje pojęcie orientacji pewnych tworów geometrycznych, nie jest wyłożonych w dedukcyjnych systemach geometrii, choć twierdzenia te wyraźnie interweniują w geometrii analitycznej lub w jej zastosowaniach.

Słabą stroną klasycznej metody w geometrii analitycznej jest zbyt duża domieszka intuicji przy wyprowadzaniu związków między tworami geometrycznymi a analitycznymi. Jak wiadomo, sprowadzamy kwestię niesprzeczności systemu geometrii Euklidesa do arytmetyki. Jeżeli więc dowodzimy trudnych twierdzeń geometrycznych za pomocą rachunku łatwiejszego niż dedukcja w syntetycznym systemie geometrii, to powinniśmy w pierwszym stadium ustalania tego pomostu między geometrią a algebrą całkowicie wyeliminować intuicję. Tymczasem w kierunku jej wyeliminowania jest jeszcze dużo do zrobienia.

Wyobrażam sobie, że w celu uporządkowania podstawowych rozdziałów geometrii analitycznej, należałoby wyłożyć w pierwszym etapie te rzeczy, które stanowią — że się tak wyrażę — transkrypcję podstawowych (nie tylko pierwotnych) pojęć geometrycznych na język algebry i analizy. Następnie należałoby przyjąć pewien system aksjomatów geometrii i konsekwentnie pokazać realizację postulatów tego systemu za pomocą tworów algebraicznych.

W dalszym ciągu należałoby wybrać pewne zagadnienia geometryczne, aby je potraktować analitycznie. Wchodziłyby tu w grę zagadnienia:

1^0 interesujące ze względu na metodę rachunkową,

2^0 instruktywne przez to, że ich ujęcie analityczne jest znacznie prostsze lub przejrzystsze niż geometryczne,

3^0 nadające się jedynie do analitycznego potraktowania,

4^0 mające zastosowania w analizie, mechanice lub fizyce.