wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

M. Biernacki (Lublin)

O niektórych zagadnieniach dotyczących wykładu geometrii analitycznej

Treść odczytu wygłoszonego na konferencji dydaktycznej poświęconej geometrii analitycznej w dniach 14 i 15 maja 1954 r. w Krakowie

Mam zamiar powiedzieć kilka słów zarówno o materiale zawartym w programie geometrii analitycznej dla matematyków, jak zwłaszcza o kolejności, w której, moim zdaniem, należy ten materiał przerabiać. Nasuwają się od razu dwa zasadnicze pytania:

1. Czy należy od początku wprowadzać geometrię przestrzenną?
2. Czy należy od początku wprowadzać rachunek wektorów?

Sądzę, że odpowiedź na te pytania zależy od aktualnych warunków i dlatego zastrzegam się od razu, że myślę tu tylko o najbliższych kilku latach. Przy wykonaniu programu trzeba się oczywiście liczyć z poziomem słuchaczy. Wiadomo ogólnie, że przeciętny poziom słuchaczy I roku studiów jest obecnie niezwykle niski. Prawdopodobnie wielu z obecnych czytało szósty numer czasopisma „Matematyka" z 1953 r., w którym humorystycznie został opisany autentyczny egzamin wstępny z matematyki kandydata z czwórką na maturze. W bieżącym roku akademickim w Lublinie również większość studentów I roku mogła okazać czwórki lub piątki z matematyki na świadectwach maturalnych, ale prawie nikt z nich nie wiedział, co to jest trójścian, kilku mieszało czworościan ze stożkiem, a jeden postawił pytanie, czy każda cięciwa koła jest jego średnicą? Poza tym mieli na ogół tak duże trudności z najprostszymi rachunkami algebraicznymi przy rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej, że zapominali o ich treści geometrycznej. Przebieg tegorocznej Olimpiady Matematycznej nie zdaje się wróżyć żadnej poprawy tego stanu rzeczy w najbliższej przyszłości. Nie trzeba też zapominać, że w szkołach średnich geometria analityczna w ogóle nie jest obecnie wykładana.

W tych warunkach wydaje mi się, że wykład musi być prowadzony bardzo elementarnie a wprowadzanie nowych pojęć stopniowe. Na początku zatem należy stanowczo ograniczyć się do geometrii na płaszczyźnie i nie wprowadzać rachunku wektorowego, gdyż pojęcie współrzędnych

i, praktycznie biorąc, wiele twierdzeń z geometrii elementarnej przestrzennej są dla tych słuchaczy nowością. Jasne jest, że wykład początkowy wyłącznie geometrii płaskiej musi prowadzić do pewnych powtórzeń; myślę jednak, że wobec opisanego przed chwilą poziomu słuchaczy, tego rodzaju powtórzenia są nie tylko nieszkodliwe, ale wręcz konieczne. Sądzę też, że przynajmniej na początku należy pisać wzory wyłącznie we współrzędnych prostokątnych ograniczając się jedynie do omówienia przypadków, gdy te same wzory stosują się i we współrzędnych ukośnokątnych. Warto podkreślić niezależność wzorów geometrii analitycznej od położenia figur względem układu współrzędnych.

Jak zawsze, wskazane jest nawiązywanie do zagadnień już znanych, a więc w danym przypadku do geometrii elementarnej. Można np. udowodnić analitycznie twierdzenie Cevy; bardzo pouczające jest też rozwiązanie jednego i tego samego zadania raz za pomocą geometrii analitycznej i powtórnie środkami geometrii elementarnej (nadawałby się tu np. dowód twierdzenia, że 3 wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, lub twierdzenia, że 4 wysokości czworościanu przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwległe krawędzie są do siebie prostopadłe). Słuchacze przekonają się tym sposobem bezpośrednio, jak bardzo metody analityczne, choć mniej eleganckie od geometrycznych, udostępniają dzięki swojemu automatyzmowi rozwiązanie nawet dość trudnych dla przeciętnego słuchacza zagadnień. Oczywiście pożądany jest kontakt z wykładaną jednocześnie algebrą wyższą, jednak sądzę, że powinien się on wyrażać raczej geometryczną ilustracją twierdzeń algebraicznych (np. twierdzeń z teorii równań liniowych), niż nadmierną jak na ten okres abstrakcyjnością wykładu. Sądzę, że w czasie od września do listopada można wyłożyć w ten sposób teorię prostej i koła, a także zapoznać słuchaczy z własnościami poszczególnych stożkowych za pomocą ich równań kanonicznych (dyskusja równania ogólnego stopnia drugiego wydaje mi się w tym okresie przedwczesna). W tym samym czasie można też zapoznać słuchaczy z elementami teorii dwustosunku (ale nie przekształcenia rzutowego). W grudniu można przejść do geometrii przestrzennej wprowadzając jednocześnie elementy teorii wektorów; tempo wykładu powinno być w tym czasie specjalnie powolne ze względu na słabą orientację przestrzenną znacznej większości słuchaczy. Do końca I semestru można wyłożyć częściowo (ale nie wyłącznie) metodą wektorową teorię płaszczyzn i prostych w przestrzeni.

W drugim semestrze można zająć się dyskusją równania ogólnego stopnia drugiego na płaszczyźnie, a później teorią ogólną stożkowych. W tym miejscu należałoby, moim zdaniem, uwzględnić szerzej niż to się na ogół czyni w programach i podręcznikach teorię pęków stożkowych (tak jak poprzednio teorię pęków prostych, kół, płaszczyzn, a później

kul i kwadryk), gdyż metoda pęków pozwala rozwiązać wiele zadań (np. zadanie napisania równania stożkowej przechodzącej przez 5 danych punktów) znacznie prościej od innych metod. Ponadto pęki, np. kół, występują w wielu zastosowaniach matematycznych i fizycznych (np. w hydrodynamice).

W kwietniu można powrócić do geometrii przestrzennej, wykładając teorię kwadryk z głównym naciskiem na szczegółowe przestudiowanie poszczególnych kwadryk za pomocą ich równań kanonicznych oraz teorię powierzchni prostokreślnych i obrotowych. Teorią przekształceń (tj. przekształceniem izometrycznym, jednokładnym, afinicznym, rzutowym i inwersją) należałoby się, moim zdaniem, zajmować przy końcu kursu, gdyż wówczas dopiero można w pełni zilustrować ją przykładami z teorii stożkowych i kwadryk (proszę sobie np. przypomnieć, w jakże piękny sposób Klein udowadnia własności przekształcenia afinicznego odwzorowując kulę na elipsoidę); ponadto teoria przekształceń jest stosunkowo więcej abstrakcyjna, a więc mniej przystępna dla początkujących słuchaczy. Należy kłaść duży nacisk na związek tych przekształceń z rzutami równoległymi i środkowymi i wspomnieć o zastosowaniach inwersji do zadań konstrukcyjnych, nie zapominając o omówieniu przyrządów kreślących krzywe przekształcone.

Za zupełnie zły pomysł uważam znajdujący się w programie, a trwający niecałe dwa tygodnie kurs geometrii wykreślnej. Nie tylko bowiem jest wykluczone, by słuchacze po takim krótkim kursie mogli geometrię wykreślną stosować, ale po paru miesiącach nie pamiętają nawet wyłożonej teorii: przyzwyczaja ich to jedynie do tzw. „studiowania po łebkach", do czego i tak mają naturalne skłonności. W ogóle zresztą program wydaje mi się nieco przeciążony dużą ilością pojęć różnorodnych a nowych dla słabo przygotowanych słuchaczy.

Jest rzeczą bardzo ważną, by przy okazji powiedzieć choć parę słów o zastosowaniach teorii, więc np. przy studiowaniu stożkowych o torach planet, przy paraboloidzie eliptycznej o reflektorach parabolicznych, a przy powierzchniach prostokreślnych o pominiętej niestety w programie powierzchni śrubowej (jako przedstawicielce powierzchni konoidalnych).

Na zakończenie powiem kilka słów o rzeczy, moim zdaniem w ogóle najważniejszej: należy kłaść jak największy nacisk na samodzielne rozwiązywanie zadań. Przecież głównym celem nauczania nie jest bynajmniej wpojenie w słuchaczy jak największej liczby różnorodnych wiadomości, ale wdrożenie ich do samodzielnego matematycznego myślenia i do umiejętności stosowania nabytych wiadomości; ten cel da się osiągnąć przede wszystkim przez urządzenie możliwie często ćwiczeń pisemnych. Ćwiczenia takie dają ponadto możność systematycznego zorientowania

się — już na I roku studiów — którzy słuchacze wyróżniają się jakimiś oryginalnymi pomysłami. Pomimo że istnieją pewne schematy rozwiązania wielu zadań, to jednak można pozostawić dużo miejsca inicjatywie słuchacza nie podając np. położenia układu współrzędnych, ale skłaniając słuchacza do możliwie korzystnego wyboru tego układu lub też do wyboru między układem prostokątnym, ukośnokątnym lub biegunowym. W zadaniach na miejsca geometryczne inicjatywie słuchacza pozostawiony jest wybór parametrów zmiennych, które mają być później rugowane, a także mniej lub więcej zręczne wykonywanie tego rugowania.