wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. SZARSKI (Kraków)

Uwagi o metodzie wektorowej w geometrii analitycznej

Treść odczytu wygłoszonego na konferencji dydaktycznej poświęconej geometrii analitycznej w dniach 14 i 15 maja 1954 r. w Krakowie

Korzyści i zalety metody wektorowej są wprawdzie powszechnie znane, ale dobrze będzie zestawić je i zilustrować prostymi przykładami. Metoda ta bywa stosowana tylko w liniowej części geometrii analitycznej, w teorii tworów stopnia drugiego naturalniejsza jest metoda algebraiczna.

Ujęcie wektorowe pozwala w prosty sposób zapisywać skomplikowane wzory skalarne. Dzięki wyraźnemu sensowi geometrycznemu wzory wektorowe są łatwiejsze do zapamiętania — zwłaszcza, że często ich postać jest taka sama dla odpowiednich tworów płaskich, jak dla przestrzennych. Jako przykład można przytoczyć równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt X_0 i równoległej do wektora $\boldsymbol{a}$:

$$\overline{X_0X} = \boldsymbol{a}t, \tag{1}$$

gdzie X jest punktem bieżącym prostej, t zaś parametrem. Równanie (1) obowiązuje zarówno na płaszczyźnie, jak i w przestrzeni. Przejście od postaci wektorowej do pisowni we współrzędnych nie przedstawia w zasadzie większych trudności.

Innym dobitnym przykładem jest równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt X_0 o współrzędnych (x_0, y_0, z_0) i prostopadłej do wektora $\boldsymbol{n}$ o współrzędnych (A, B, C), w postaci wektorowej

$$\boldsymbol{n} \cdot \overline{X_0X} = 0,$$

skąd natychmiast otrzymuje się postać skalarną

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Jako dalszy przykład wymieńmy równanie wektorowe płaszczyzny przechodzącej przez punkt X_0 o współrzędnych (x_0, y_0, z_0) i równoległej do dwóch wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{a}'$ o współrzędnych (a, b, c) i (a', b', c')

$$\overline{X_0X} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}') = 0,$$

skąd otrzymujemy równanie skalarne w postaci wyznacznikowej

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

Ujęcie wektorowe pozwala w pewnych przypadkach ominąć trudności, które napotyka się przy metodzie analitycznej. Jeżeli np. dane są współrzędne wierzchołków trójkąta ABC i chodzi o równanie symetralnej kąta wewnętrznego np. przy wierzchołku A, to klasyczna metoda daje, jak wiadomo, równania dwóch prostych i następnie każe rozstrzygnąć, która z tych prostych jest symetralną wewnętrzną, a która zewnętrzną. Rozważanie wektorowe prowadzi zaś od razu do wniosku, że wektor $\overline{AB}/|\overline{AB}|+\overline{AC}/|\overline{AC}|$ jest równoległy do symetralnej wewnętrznej, skąd już łatwo napisać jej równanie parametryczne czy też zwyczajne.

Podamy dalsze przykłady ilustrujące korzyści metody wektorowej. Pierwszy przykład jest zaczerpnięty z geometrii różniczkowej. Gdy dana jest krzywa o równaniu parametrycznym w postaci wektorowej $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, gdzie $\boldsymbol{r}$ jest wektorem wodzącym względem początku układu współrzędnych, a s długością łuku na krzywej, mamy, przy stosownych założeniach regularności, następujący prosty wzór na krzywiznę:

$$\varkappa = \left| \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right|. \tag{2}$$

Aby stąd wyprowadzić wzór na krzywiznę, gdy w równaniu krzywej występuje dowolny parametr t, przepisujemy wzór (2) w postaci

$$\varkappa = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right|, \tag{3}$$

gdyż jak wiadomo, $|d\boldsymbol{r}/ds|=1$ i wektory $d\boldsymbol{r}/ds$ oraz $d^2\boldsymbol{r}/ds^2$ są prostopadłe. Dalej mamy

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds}, \qquad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} \tag{4}$$

oraz

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = \boldsymbol{O}.$$

Wstawiając wyrażenia (4) do wzoru (3) otrzymujemy znany wzór w postaci wektorowej

$$\varkappa = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \right| \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \right| \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3}.$$

Drugi przykład ma na celu pokazanie, że dowody wektorowe pewnych twierdzeń geometrii przestrzeni euklidesowej można przenieść bezpośrednio na przypadek przestrzeni ogólniejszych. Mianowicie podamy wektorowy dowód twierdzenia, że kula jest zbiorem wypukłym. Rozpatrzmy kulę o środku O i promieniu R i oznaczmy przez $\boldsymbol{p}$ wektor wodzący punktu P względem O. Wówczas warunkiem, aby punkt P należał do kuli, jest $|\boldsymbol{p}|\leqslant R$.

Niech P_1 i P_2 będą dowolnymi punktami kuli, tzn.

$$|\boldsymbol{p}_1|\leqslant R, \qquad |\boldsymbol{p}_2|\leqslant R. \tag{5}$$

Mamy wykazać, że każdy punkt P odcinka $\langle P_1,P_2\rangle$ również należy do kuli. Wiadomo, że dla dowolnego punktu tego odcinka jest

$$\boldsymbol{p}=\lambda_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2\boldsymbol{p}_2,$$

gdzie

$$\lambda_1\geqslant 0, \qquad \lambda_2\geqslant 0, \qquad \lambda_1+\lambda_2=1. \tag{6}$$

Korzystając z nierówności trójkątowej oraz z (5) i (6) dostajemy

$$|\boldsymbol{p}|=|\lambda_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2\boldsymbol{p}_2|\leqslant|\lambda_1\boldsymbol{p}_1|+|\lambda_2\boldsymbol{p}_2|=\lambda_1|\boldsymbol{p}_1|+\lambda_2|\boldsymbol{p}_2|\leqslant\lambda_1R+\lambda_2R=R,$$

co należało wykazać. Podany dowód przenosi się bez zmian na przypadek kuli w dowolnej przestrzeni wektorowej z normą jednorodną.

Metoda wektorowa ma także ujemne strony. Wprowadzenie teorii wektorów na początku wykładu geometrii analitycznej może stworzyć dla studentów trudności pojęciowe. Przy systematycznym wykładzie metodą wektorową jest naturalną rzeczą rozważać równocześnie zagadnienia geometrii płaskiej i przestrzennej, co może być trudne dla studentów nie mających dostatecznego przygotowania w zakresie stereometrii. Poza tym ujęcie wektorowe nie nadaje się na ogół do efektywnych rachunków numerycznych. Rachunek wektorowy wymaga często pewnej pomysłowości, natomiast metoda analityczna prowadzi zwykle szybciej do celu i nie wymaga specjalnych pomysłów. Dlatego przy ćwiczeniach należałoby metodę wektorową ograniczyć w zasadzie do tych przypadków, gdzie prowadzi ona szybko do pewnych wzorów wektorowych, które łatwo następnie napisać we współrzędnych. Jako przykład można tu przytoczyć wzór na odległość punktu P_1 od prostej w przestrzeni, przechodzącej przez punkt P_0 i równoległej do wektora $\boldsymbol{a}$, mianowicie

$$\frac{|\overline{P_0P_1}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Wzór ten otrzymuje się bezpośrednio stąd, że szukana odległość jest równa wysokości równoległoboku o bokach $\overline{P_0P_1}$ i $\boldsymbol{a}$, poprowadzonej do boku $\boldsymbol{a}$.

Metoda wektorowa ułatwia studentowi zapamiętanie zwłaszcza większych partii materiału, a wykładowcy ułatwia wykład. Stosowanie metody wektorowej należy ograniczyć w zasadzie do części teoretycznej wykładu, natomiast na ćwiczeniach, zwłaszcza przy rachunkach numerycznych, wskazane jest posługiwanie się zwykłymi środkami analitycznymi. Z teorią wektorów student matematyki musi się zapoznać ze względu na jej zastosowanie w innych działach matematyki, np. w mechanice teoretycznej, geometrii różniczkowej i równaniach różniczkowych. Dlatego wydaje się rzeczą właściwą, by przynajmniej z algebrą wektorów zapoznać studenta w wykładzie geometrii analitycznej i to możliwie wcześnie, aby móc z niej następnie korzystać.