wmptm 1897

S. STRASZEWICZ (Warszawa)

O dowodzie twierdzenia de l'Hospitala w wykładach rachunku różniczkowego

Referat wygłoszony na konferencji metodycznej w Krynicy w lutym 1954 r.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Jako twierdzenie lub „reguła" de l'Hospitala bywają w podręcznikach analizy podawane dwie różne rzeczy. W jednym przypadku stwierdza się, że granica ilorazu dwóch funkcji dążących do zera, gdy $x \to a$, jest równa ilorazowi pochodnych tych funkcji w punkcie a, jeżeli iloraz ten istnieje. W tej postaci twierdzenie, którego dowód jest zresztą bardzo prosty, gdyż trzeba się tylko odwołać do definicji pochodnej, jest mało użyteczne. Reguła ta bowiem zawodzi, gdy któraś z pochodnych w punkcie a nie istnieje lub gdy obie są równe zeru, co się w zastosowaniach praktycznych często zdarza. W drugiej wersji chodzi o równość granicy ilorazu dwóch funkcji i granicy ilorazu ich pochodnych. To twierdzenie ma znacznie szerszy zakres stosowalności i moim zdaniem jedynie ta postać zasługuje na uwzględnienie w naszych wykładach. W znanych mi podręcznikach dowód tego twierdzenia polega na zastosowaniu uogólnionego twierdzenia o wartości pośredniej, czyli tzw. twierdzenia Cauchy'ego. Przy tym wydaje mi się, że owo twierdzenie Cauchy'ego po to tylko się wprowadza, aby można było udowodnić regułę de l'Hospitala, gdyż nie znam innych jego zastosowań niezbędnych w elementarnym kursie analizy. Co więcej, dowód twierdzenia Cauchy'ego podawany w podręcznikach, a korzystający z utworzonej *ad hoc* funkcji pomocniczej, wydaje się naszym studentom — nie bez racji — sztuczny i rzecz cała dydaktycznie jest dość niekorzystna. Dodam, że trudności się piętrzą, gdy chodzi o rozszerzenie twierdzenia na przypadek granic niewłaściwych; większość podręczników dowód tutaj pomija.

Na wykładach w Politechnice stosuję inne ujęcie, które wydaje mi się prostsze i wnoszące pewne wartości kształcące; być może, że nie jest ono nowe.

Rzecz polega na wysunięciu na czoło przypadku szczególnego, który sam przez się zasługuje na uwagę.

Naszkicuję odpowiedni tok wykładu. Operuję w nim granicami jednostronnymi, co jest dogodne, ale nieistotne.

TWIERDZENIE 1. Założenie. 1° $f(x)$ *jest ciągła dla* $0<x<d$, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$.

2° *Istnieje* $f'(x)$ *dla* $0<x<d$, *istnieje* $\lim\limits_{x\to+0} f'(x)$.

Teza.

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+0} f'(x).$$

Dowód. Definiujemy $f(0)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)$; wówczas

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\theta x), \quad \text{gdzie} \quad 0<\theta<1.$$

Jeśli $x\to+0$, to $\theta x\to+0$, a zatem

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+0} f'(x), \quad \text{c. n. d.}$$

Uwaga. Zdolniejszym studentom warto zwrócić uwagę na to, że istotną treścią tego twierdzenia jest następująca ciekawa własność pochodnej: *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest różniczkowalna w otoczeniu punktu* a *(dla* $x\neq a$*) i jeżeli istnieje* $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$, *to* $f(x)$ *jest różniczkowalna także w punkcie* a *i*

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x).$$

TWIERDZENIE 2. Założenie. 1° $f(x)$, $g(x)$ *są ciągłe dla* $a<x<b$;

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+0} g(x)=0.$$

2° *Istnieją* $f'(x)$ *i* $g'(x)$ *dla* $a<x<b$, $g'(x)>0$.

3° *Istnieje* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Teza.

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód. Definiujemy $f(a)=g(a)=0$; oznaczamy $g(x)=u$. Wówczas mamy $x=\varphi(u)$, $f(x)=f(\varphi(u))=F(u)$,

$$F'(u)=\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Jeżeli $x\to a+0$, to $u\to+0$ i na odwrót, a zatem

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{u\to+0}\frac{F(u)}{u}=\lim_{u\to+0} F'(u)=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{c. n. d.}$$

TWIERDZENIE 3. Założenie. 1° $f(x)$, $g(x)$ *są ciągłe dla* $x>a$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0.$$

2° *Istnieją* $f'(x)$ *i* $g'(x)$ *dla* $x>a$, $g'(x)>0$.

3° *Istnieje* $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Teza.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód. Niech $x=1/u$, wtedy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{u\to+0}\frac{f(1/u)}{g(1/u)}=\lim_{u\to+0}\frac{f'(1/u)(-1/u^2)}{g'(1/u)(-1/u^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

TWIERDZENIE 4. Założenie. 1° $f(x)$ *jest ciągła dla* $x>0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

2° *Istnieje* $f'(x)$ *dla* $x>0$, *istnieje* $\lim_{x\to\infty} f'(x)=l$.

Teza.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} f'(x)=l.$$

Dowód. Niech $x>x_0>0$; wtedy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi), \quad \text{gdzie} \quad x_0<\xi<x,$$

stąd

$$\frac{f(x)}{x}=f'(\xi)+\left(\frac{f(x_0)}{x}-\frac{x_0}{x}f'(\xi)\right),$$

$$\left|\frac{f(x)}{x}-l\right|\leqslant|f'(\xi)-l|+\left|\frac{f'(x_0)}{x}\right|+\frac{x_0}{x}|f'(\xi)|.$$

Obieramy $\varepsilon>0$, ustalamy x_0 tak, że gdy $x>x_0$, wtedy

$$|f'(x)-l|<\varepsilon/2$$

(zatem $|f'(x)|$ jest mniejsze od pewnego $a>0$); wówczas

$$\left|\frac{f(x)}{x}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{f'(x_0)}{x}\right|+\frac{x_0}{x}\cdot a,$$

stąd, gdy x_1 jest dostatecznie wielkie, to dla $x>x_1$

$$\left|\frac{f(x)}{x}-l\right|<\varepsilon, \quad \text{c. n. d.}$$

Należałoby tu podać interpretację geometryczną twierdzenia 4: Jeżeli krzywa $y=f(x)$ ma asymptotę $y=mx+b$ i jeżeli istnieje $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, to $m=\lim_{x\to\infty} f'(x)$. Studentów zainteresuje również wiążąca się z tym uwaga, że jeżeli styczna do krzywej dąży przy $x\to\infty$ do pewnej prostej granicznej, to ta prosta jest asymptotą krzywej, ale nie na odwrót.

TWIERDZENIE 5. *W twierdzeniu* 3 *można założenie*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

zastąpić założeniem

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 2 i polega na redukcji do twierdzenia 4.

TWIERDZENIE 6. *W twierdzeniu* 2 *można założenie*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+0} g(x)=0$$

zastąpić założeniem

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a+0} g(x)=\infty.$$

Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3 (redukcja do twierdzenia 5).

W wykładach w Politechnice Warszawskiej podaję zwykle dowody twierdzeń 1 i 2, a na ćwiczeniach 3; pozostałe twierdzenia przyjmuję bez dowodu ilustrując je przykładami.