wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

S. STRASZEWICZ (Warszawa)

Krzywe stopnia drugiego w elementarnym wykładzie geometrii analitycznej

Referat wygłoszony na konferencji metodycznej w Krynicy w lutym 1954 r.

Referat niniejszy dotyczy wykładu prowadzonego na takim poziomie i w takim zakresie, jaki odpowiada programowi pierwszego semestru wydziałów budowlanych. Na geometrię analityczną płaszczyzny razem ze wstępem o wektorach przypada tu 30-32 godzin, z czego na krzywe stopnia drugiego można wydzielić najwyżej 11-12 godzin. Jasne jest, że przy tym wymiarze czasu nie może być mowy o ogólnej dyskusji równania stopnia drugiego w takiej postaci, jak ją podają obszerniejsze podręczniki. Stożkowe muszą być traktowane monograficznie z dodaniem niewielkiego jedynie uzupełnienia o równaniu ogólnym stopnia drugiego. Przyjmuję taki rozkład: okrąg 2 godziny, elipsa 3 godziny, hiperbola 3 godziny, parabola 1-2 godziny, równanie ogólne — 2 godziny. Do tego dochodzą oczywiście ćwiczenia w podobnej ilości godzin. Temat *okrąg* pomijam w dalszym ciągu; zakładam, że w ciągu dwóch godzin podaje się najważniejsze wiadomości w sposób tradycyjny.

Zacznę od uwagi ogólnej. Nauczanie geometrii analitycznej na poziomie elementarnym powinno uwzględniać dwa równie ważne i uzupełniające się nawzajem rodzaje zagadnień, które powstają z chwilą wprowadzenia współrzędnych:

1^0 Interpretację geometryczną związków analitycznych.

2^0 Ujmowanie własności geometrycznych w związki analityczne, np. dowody analityczne twierdzeń geometrycznych, a zwłaszcza układanie równań miejsc geometrycznych.

Trzeba pokazać studentowi te dwa oblicza geometrii analitycznej i wdrożyć go w odpowiednie sposoby postępowania.

Dodam, że materiał nauczania powinien być dobrany starannie pod względem wartości kształcącej i odmierzony bardzo oszczędnie, jeśli w krótkim czasie mają być osiągnięte trwałe wyniki.

Tradycyjnie wprowadza się elipsę i hiperbolę jako miejsca geometryczne punktów, dla których suma lub różnica odległości od ognisk jest stała, parabolę zaś jako miejsce geometryczne punktów równoodległych od ogniska i od kierownicy. Nie znam elementarnego podręcznika, który by od tej tradycji odstępował.

Sposób ten ma, moim zdaniem, bardzo małą wartość metodyczną, a to z następujących powodów:

1^0 Dla techników elipsa — to przede wszystkim przekrój walca lub rzut okręgu; nie wiem, czy potrzebna im jest kiedykolwiek własność ogniskowa. Korzystają z niej ponoć ogrodnicy, ale to wygląda raczej na legendę. Hiperbola (równoosiowa) występuje najczęściej w związku z odwrotną proporcjonalnością, parabola wiąże się z zastosowaniem funkcji kwadratowej. Czy jest celowe wysuwanie na plan pierwszy definicji i własności, z których się w praktyce wcale albo prawie wcale nie korzysta? Poza tym podkreślanie w definicji odrębności tych trzech krzywych nie jest celowe, należy raczej zmierzać do uwydatnienia cech im wspólnych.

2^0 Wyprowadzanie równań stożkowych z wymienionych definicji nie ma tych walorów, jakie powinny mieć ćwiczenia na ustawianie równań miejsc geometrycznych, gdyż jest ono tutaj natychmiastowe; przy elipsie np. — trzeba tylko do równości $r_1+r_2=2a$ podstawić odpowiednie wyrażenia na r_1 i r_2 według wzoru na długość odcinka. Nie występuje tu więc moment poszukiwania związków analitycznych ujmujących własności geometryczne i wartość kształcąca tych zadań jest mała.

3^0 Doprowadzenie równań elipsy i hiperboli do postaci kanonicznej dokonywane bywa z reguły drogą dość niezgrabnego rachunku przez dwukrotne podnoszenie równania do kwadratu. Sprawa się komplikuje przez to, że przy takim postępowaniu trzeba udowodnić, iż otrzymane równanie jest równoważne z początkowym, co niektóre podręczniki czynią w sposób równie niezręczny, inne zaś (jak np. Priwałow) w ogóle pomijają milczeniem. Nie jestem bynajmniej przeciwnikiem opuszczania niektórych dowodów w naszych wykładach — jest ono w wielu przypadkach wskazane. Ale nie należy tego czynić tam, gdzie student sam skłonny jest do błędnego wnioskowania, gdyż nie widzi potrzeby dowodu, a tak właśnie bywa przy równoważności równań.

Jeśli już chcemy wyprowadzać równania elipsy i hiperboli z definicji ogniskowej, lepiej byłoby rozumować w następujący sposób:

Niech $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ będą ogniskami $(c>0)$, $P(x,y)$ dowolnym punktem i niech $F_1P=r_1$, $F_2P=r_2$. Rozważamy równanie

$$(1) \qquad (r_1+r_2-2a)(r_1-r_2-2a)(r_1-r_2+2a)(r_1+r_2+2a)=0,$$

gdzie $a>0$. Ponieważ $r_1+r_2\geqslant 2c$, $|r_1-r_2|\leqslant 2c$, więc gdy $a>c$, równanie (1)

jest równoważne równaniu $r_1+r_2=2a$ i przedstawia *elipsę*, gdy zaś $a<c$, równanie (1) jest równoważne równaniu $(r_1-r_2-2a)(r_1-r_2+2a)=0$ lub równaniu $|r_1-r_2|=2a$, przedstawia zatem *hiperbolę*.

Łatwe przekształcenie lewej strony równania (1) prowadzi do równania

$$(r_1^2-r_2^2+4a^2)^2-16a^2r_1^2=0;$$

po podstawieniu $r_1^2=(x+c)^2+y^2$, $r_2^2=(x-c)^2+y^2$ daje ono równanie

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2), \tag{2}$$

które dla $a\neq c$ przybiera postać

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{3}$$

Równanie (3) zatem przedstawia *elipsę*, gdy $a>c$, lub *hiperbolę*, gdy $a<c$.

Gdy $a=c$, równanie (2), a zatem i równanie (1), przedstawia oś odciętych.

Przytoczone rozumowanie trafia w istotę rzeczy, pozwala uniknąć powtarzania tego samego rachunku przy hiperboli, co przy elipsie, a przy tym jest zgrabne. Studentowi zaś trzeba od czasu do czasu dawać wzorce „elegancji" matematycznej. Podobny sposób traktowania rzeczy jest w podręczniku F. Leji, z tym jednak, że elipsa i hiperbola rozważane są oddzielnie.

Naszkicuję obecnie metodę, którą stosuję w swoich wykładach w rozdziale o krzywych stopnia drugiego.

Zauważę najpierw, że już w poprzednich wykładach opracowuję przesunięcie i obrót układu współrzędnych, ze zwróceniem uwagi na to, że stopień równania algebraicznego nie ulega przy tym zmianie, oraz podaję elementarne własności powinowactwa osiowego prostokątnego, określonego wzorami $\bar{x}=x$, $\bar{y}=ky$.

Piszę równanie

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

i mówię studentom, że przedstawia ono krzywą stopnia drugiego i że zajmiemy się na razie pewnymi przypadkami szczególnymi tego równania. Można by wprawdzie od razu omówić niektóre własności ogólne stożkowych, np. przecięcie z prostą, co by się nawet dobrze wiązało z wiadomościami z algebry szkolnej o układach równań, ale to nie jest konieczne.

Biorę najpierw równanie

$$Ax^2+Cy^2+F=0 \qquad (A\cdot C\cdot F\neq 0)$$

i rozpatruję dwa przypadki:

I. A i C są tego samego znaku; F jest wówczas znaku przeciwnego, jeśli krzywa ma być rzeczywista. Nazywam ją *elipsą*. Równaniu nadaję postać

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

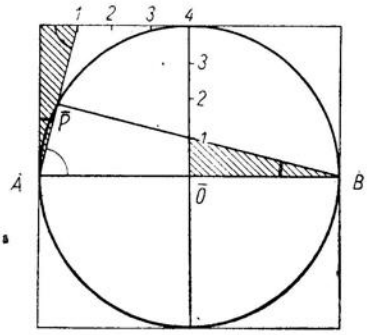
Zestawiam je z równaniem okręgu

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{a^2}=1$$

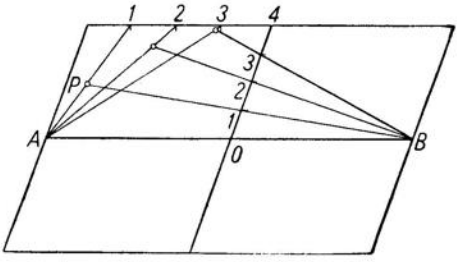
i pokazuję, że elipsa powstaje z okręgu przez powinowactwo („ściśnięcie"):

$$x=\bar{x}, \qquad y=\frac{b}{a}\bar{y}.$$

Stąd wysnuwa się natychmiastowe wnioski co do kształtu elipsy (wypukłość, symetria, istnienie stycznej itd.) oraz konstrukcję punktową (ewentualnie dwoma sposobami: wprost z powinowactwa lub przy użyciu dwóch okręgów współśrodkowych), a także konstrukcję stycznej w punkcie elipsy lub nawet z punktu poza elipsą. Równanie $\bar{x}\bar{x}_0+\bar{y}\bar{y}_0=a^2$ stycznej do okręgu daje od razu równanie $xx_0/a^2+yy_0/b^2=1$ stycznej do elipsy. Innym ważnym bezpośrednim wnioskiem jest twierdzenie, że rzutem prostokątnym okręgu jest elipsa.



Rys. 1



Rys. 2

Biorąc pod uwagę proste powinowate do dwóch prostopadłych średnic okręgu, uzyskujemy pojęcie średnic sprzężonych elipsy, przy czym ze związku $\bar{m}_1\bar{m}_2=-1$ wynika od razu związek $m_1m_2=-b^2/a^2$ dla współczynników kątowych średnic sprzężonych.

Z prostopadłości stycznej okręgu do średnicy przechodzącej przez punkt styczności wysnuwamy wniosek, że kierunek stycznej w punkcie $P(x_0,y_0)$ elipsy jest sprzężony z kierunkiem średnicy OP; ponieważ $m_{OP}=y_0/x_0$, więc współczynnik kątowy stycznej jest równy $(-b^2/a^2)\times$ $\times(x_0/y_0)$, co daje inny sposób otrzymania równania stycznej.

Wreszcie powinowactwo z okręgiem daje prosty i poglądowy dowód konstrukcji *siatkowej* elipsy, gdy dana jest para średnic sprzężonych. Wystarczy przyjrzeć się rysunkowi 1. Proste $\bar{A}1$ i $\bar{B}1$ są prostopadłe, więc $\bar{P}$ leży na okręgu, a zatem P leży na elipsie.

W ten sposób wysuwam na plan pierwszy własności afiniczne elipsy. Są one najważniejsze dla technika, a przy tym są łatwe i interesujące.

Jako uzupełnienie podaję najważniejsze własności metryczne.

a. Własność ogniskowa elipsy. Wprowadzam konstrukcyjnie ogniska, jako punkty $F_1(-c,0)$ i $F_2(c,0)$, gdzie $c=\sqrt{a^2-b^2}$, oraz dla dowolnego $P(x,y)$ oznaczam $F_1P=r_1$, $F_2P=r$. Związki

$$r_1^2=(x+c)^2+y^2, \qquad r_2^2=(x-c)^2+y^2, \qquad y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

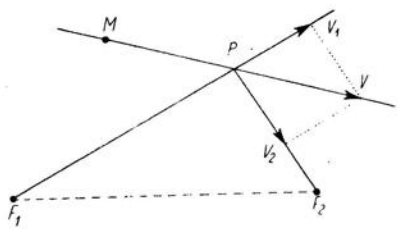
dają po krótkim rachunku

$$r_1=a+\frac{cx}{a}, \qquad r_2=a-\frac{cx}{a},$$

skąd $r_1+r_2=2a$. Zauważam, że dla punktu nie leżącego na elipsie mamy $r_1+r_2\neq 2a$, gdyż r_1 i r_2 rosną wraz z $|y|$ przy stałym x.

Wniosek: *Elipsa jest miejscem geometrycznym punktów, dla których* $r_1+r_2=2a$.

b. Własność „optyczna" elipsy, tj. twierdzenie, że styczna jest dwusieczną kąta zewnętrznego trójkąta F_1PF_2, jest ważną i ciekawą własnością elipsy. Dziwi mnie, że tak dobre podręczniki, jak Priwałowa i Bieskina nic o niej nie mówią; Jefimow podaje to twierdzenie bez dowodu. W innych znowu podręcznikach dowód jest przydługi i niezbyt zręczny. Najprościej jest oprzeć się na twierdzeniu o dwusiecznej w trójkącie (jak w podręczniku W. Pogorzelskiego); polecam to zwykle jako ćwiczenie rachunkowe, na wykładach zaś wolę nie tracić na to cennego czasu i podaję następujący prosty dowód geometryczny: Każdy punkt M stycznej różny od punktu P stycznej leży na zewnątrz elipsy (wynika to z powinowactwa z okręgiem), więc $F_1M+MF_2>2a$. Suma F_1M+MF_2 osiąga zatem w punkcie P minimum, stąd wynika omawiana własność stycznej na podstawie znanego studentowi elementarnego zadania na ekstremum.

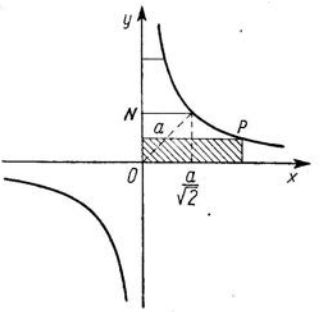


Rys. 3

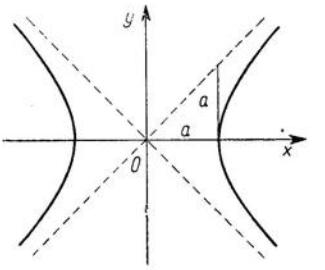
Pokazuję też zwykle na przykładzie elipsy efektowną metodę konstrukcji stycznych Robervala (1602-1675) stosującą rozważania kinematyczne. Kierunek stycznej do elipsy w punkcie P przebiegającym elipsę

wyznaczamy jako kierunek jego prędkości. Rzut v_1 prędkości v na prostą F_1P daje wówczas prędkość, z jaką zmienia się odległość F_1P, gdyż składowa prostopadła do F_1P nie wpływa na zmianę tej odległości. Tak samo rzut v_2 prędkości v na prostą F_2P daje prędkość, z jaką zmienia się F_2P. A ponieważ suma F_1P+F_2P jest stała, więc wektory v_1 i v_2 są równej długości, przy czym jeden jest skierowany od ogniska, a drugi ku ognisku. Zatem v dzieli kąt między v_1 i v_2 na połowy.

c. Na zakończenie opisanej poprzednio krótkiej monografii elipsy, mówię jeszcze o jej kierownicach. Ponieważ nie starczy czasu na opracowanie równania we współrzędnych biegunowych, ograniczam się do



Rys. 4



Rys. 5

rachunkowego stwierdzenia, że dla każdego ogniska istnieje taka prosta, iż elipsa jest miejscem geometrycznym punktów, których odległości od tego ogniska i od tej prostej mają stały stosunek.

Na ćwiczeniach poznają studenci jeszcze parę własności elipsy m. in. tę, na której opiera się użycie elipsografu.

Przechodząc do hiperboli powracam do równania $Ax^2+Cy^2=F$ i rozważam przypadek

II. A i C są różnych znaków, np. $A>0$, $C<0$, $F<0$.

Równaniu można nadać postać

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \tag{4}$$

krzywa nazywa się *hiperbolą*.

Opracowuję najpierw *hiperbolę równoosiową* ($b=a$):

$$x^2-y^2=a^2. \tag{5}$$

Jestem zdania, że na hiperbolę równoosiową należy położyć duży nacisk jako na krzywą ważną w praktyce. Obrót układu o $-\pi/4$ sprowadza równanie do postaci

$$xy=\frac{a^2}{2}. \tag{6}$$

Z równania (6) wysnuwa się opis kształtu hiperboli, istnienie asymptot, stałość pola prostokąta $OMPN$. Stwierdza się, że hiperbola (6) jest wykresem odwrotnej proporcjonalności $y=k/x$, co uważam za szczególnie ważne, gdyż studenci wynoszą ze szkoły średniej mętne o tym pojęcie. Stąd wypływa dalej konstrukcja punktowa hiperboli.

Następny temat stanowi *przecięcie hiperboli* (6) *z prostą* $y=mx+b$ $(m\neq 0)$. Podstawienie do równania (4) daje

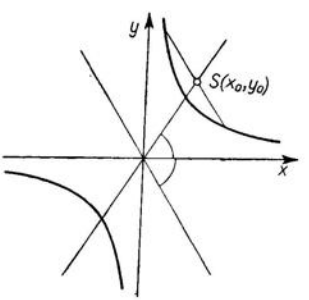
$$mx^2+bx-\tfrac{1}{2}a^2=0.$$

Zwracamy uwagę na środek (x_s,y_s) cięciwy łączącej punkty przecięcia. Przypominając wzór na sumę pierwiastków równania kwadratowego znajdujemy od razu

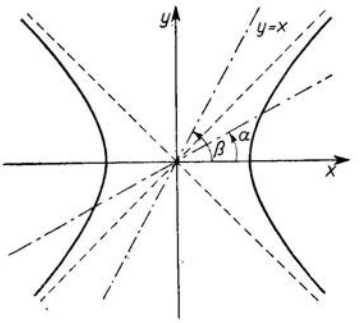
$$x_s=-\frac{b}{2m},\qquad y_s=\frac{b}{2}. \tag{7}$$

Dalsze rozważania polegają na wszechstronnym wykorzystaniu równości (4).

1. Z (7) mamy $y_s=-mx_s$ jako miejsce geometryczne środków cięciw o kierunku m, czyli równanie średnicy sprzężonej ze średnicą $y=mx$.



Rys. 6



Rys. 7

Średnice sprzężone są zatem symetryczne względem asymptot. Osie symetrii są jedyną parą średnic sprzężonych prostopadłych, gdyż z równania $m(-m)=-1$ wynika $m=\pm 1$. Asymptoty wystąpią jako przypadki graniczne — średnice samosprzężone — gdy $m\to 0$ lub $m\to\infty$.

Biorąc osie symetrii za osie współrzędnych wyznaczamy położenie wzajemne kierunków sprzężonych ze związku $(\alpha+\beta)/2=\pi/4$, co daje $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha$ lub $m_1m_2=1$, przy czym mamy okazję do wskazania analogii z okręgiem, gdzie $m_1m_2=-1$.

Do powyższego nawiązuję wyznaczenie *stycznej* w punkcie $P(x_0,y_0)$ hiperboli. Wykazuję w tym celu, że kierunek stycznej jest sprzężony z kierunkiem średnicy przechodzącej przez punkt styczności. Mianowicie

gdy $Q \to P$ (rysunek 8), to sieczna PQ dąży do stycznej PT, a średnica OS sprzężona z kierunkiem PQ — do średnicy OP. A ponieważ kierunki PQ i OS są symetryczne względem asymptot, więc to samo dotyczy kierunków PT i OP, wobec czego kierunek PT jest sprzężony z kierunkiem OP. To twierdzenie, które jest ważne samo przez się (konstrukcja stycznej), pozwala utworzyć natychmiast równanie stycznej w P. W przypadku równania (6) mamy $m_{PT} = -m_{OP} = y_0/x_0$ i równaniem stycznej jest

$$x_0 y + y_0 x = a^2.$$

Dla równania osiowego (5) jest $m_{PT} = 1/m_{OP} = x_0/y_0$; równanie stycznej ma postać

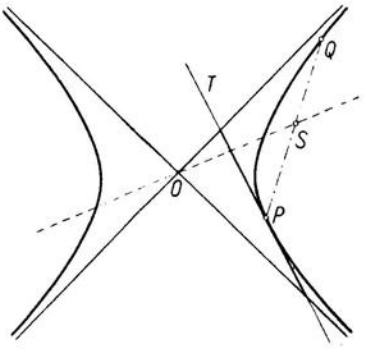
$$xx_0 - yy_0 = a^2.$$

2. Wracam do równań (7) i wysnuwam z nich inny ważny wniosek: x_s i y_s nie zależą od a. Znaczy to, że cięciwy wszystkich hiperbol o tych samych asymptotach wycięte przez tę samą prostą mają wspólny środek. W szczególności dotyczy to również hiperboli zniekształconej ($a = 0$), czyli pary asymptot. Wniosek:

a) odcinki siecznej między hiperbolą i asymptotami są równe,

b) na stycznej punkt styczności jest środkiem odcinka między asymptotami.

Stąd konstrukcja afiniczna hiperboli, gdy dane są asymptoty i jeden punkt krzywej.



Rys. 8

Po opisanym poprzednio monograficznym opracowaniu hiperboli równoosiowej własności afiniczne hiperboli dowolnej objaśnić można w niewielu słowach. Stwierdzamy, że między hiperbolą (5) a hiperbolą równoosiową (6) zachodzi powinowactwo

$$x = \bar{x}, \qquad y = \frac{b}{a}\bar{y}$$

i stąd jako natychmiastowe wnioski wysnuwamy twierdzenia i wzory dotyczące asymptot, średnic sprzężonych, stycznej oraz konstrukcje afiniczne. W szczególności np. związek $m_1 m_2 = 1$ między kierunkami średnic sprzężonych przechodzi na $m_1 m_2 = b^2/a^2$.

Własności ogniskowe opracowujemy podobnie jak dla elipsy.

Własność „optyczną" uzasadniamy metodą kinematyczną Robervala bądź geometrycznie jako własność ekstremalną. Mianowicie styczna

do hiperboli przecina jej asymptoty, leży więc (oprócz punktu styczności) w obszarze, w którym $|r_1-r_2|<2a$; w punkcie styczności mamy maksimum $|r_1-r_2|=2a$. Ponieważ ogniska leżą po przeciwnych stronach stycznej, rzecz się sprowadza do zadania geometrycznego: Dane są punkty A i B po przeciwnych stronach prostej t; znaleźć na prostej t taki punkt C, że $|AC-BC|=$maksimum. Otóż, jeśli B' jest punktem symetrycznym do B względem t, to $|AC-BC|=|AC-B'C|\leqslant AB'$, maksimum zachodzi wobec tego wówczas, gdy $|AC-B'C|=AB'$, tj. gdy C leży na przedłużeniu odcinka AB'; AC i BC są wtedy symetryczne względem t.

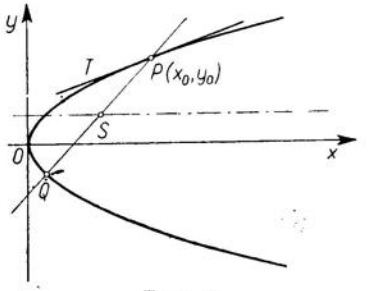
Krótki wykład o *paraboli* prowadzę w podobny sposób jak wykłady poprzednie. Biorę pod uwagę nowy przypadek szczególny ogólnego równania stopnia drugiego

$$Cy^2+2Dx=0 \qquad (C\cdot D\neq 0),$$

któremu nadaję postać

$$y^2=2px.$$

Nazywając tę krzywą *parabolą* zwracam uwagę studentom, że jest to znany im wykres funkcji kwadratowej $x=y^2/2p$ i że mamy poznać niektóre własności tej krzywej.



Rys. 9

Rozważamy przecięcie paraboli z prostą $y=mx+b$ $(m\neq 0)$; rugując x mamy

$$y^2-2\frac{p}{m}y+2\frac{pb}{m}=0,$$

skąd bezpośrednio $y_s=p/m$, gdzie y_s oznacza rzędną środka S cięciwy PQ (rys. 9).

Z wyrażenia dla y_s, które nie zawiera b, wynika, że środki cięciw równoległych leżą na równoległej do osi symetrii, czyli na średnicy sprzężonej z kierunkiem cięciw, przy czym, odwrotnie, każdej średnicy odpowiada określony kierunek z nią sprzężony.

Gdy $Q\to P$, to $y_s\to y_0$, prosta QP dąży do *stycznej* PT o współczynniku kątowym $m=p/y_0$.

Kierunek stycznej jest zatem sprzężony ze średnicą przechodzącą przez punkt styczności; stąd równanie stycznej

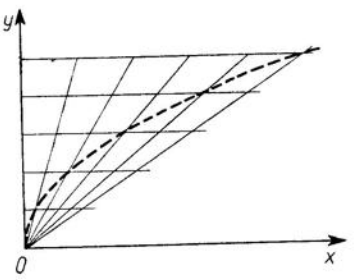
$$yy_0=p(x+x_0).$$

Własność ogniskową paraboli stwierdzamy podobnie jak przy elipsie definiując ognisko jako punkt $F(p/2,0)$, kierownicę jako prostą $x=-p/2$.

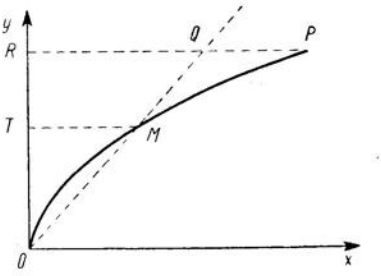
Własność optyczną wykazujemy metodą Robervala bądź też drogą krótkiego rachunku.

Jeśli czas pozwala, podaję konstrukcję „siatkową" paraboli wysnutą ze spostrzeżenia, że na podstawie równania paraboli $RQ/RP = OT/OR$ (rys. 10 i 11).

Na paru ostatnich wykładach o krzywych stopnia drugiego powracam do ogólnego równania kwadratowego. Dotychczas studenci poznali interpretację geometryczną kilku przypadków szczególnych równania. Obecnie stawiam pytanie: Czy są jeszcze inne krzywe stopnia drugiego?



Rys. 10



Rys. 11

Zastosowanie obrotu układu współrzędnych redukuje to zagadnienie do dyskusji równania nie zawierającego wyrazu z xy, która w łatwy sposób prowadzi do pełnej klasyfikacji metrycznej stożkowych. Temat daje się bez trudu opracować na jednym wykładzie dwugodzinnym, gdyż ograniczam się do „jakościowego" przedstawienia sprawy nie wprowadzając kryteriów opartych na niezmiennikach. Pewien nacisk kładę na przypadki zniekształcenia[1]).

[1]) Używane często nazwy *krzywa zdegenerowana* lub *zwyrodniała* brzmią nieprzyjemnie. Proponuję mówić *krzywa zniekształcona*.