wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

# Recenzje

Jan Mikusiński, Rachunek operatorów, Monografie Matematyczne t. XXX, Warszawa 1953, str. VIII+368.

Rachunek operatorów znany jeszcze w początku XIX w. rozpowszechnił się i rozwinął później dzięki pracom inżyniera O. Heaviside'a, który zastosował go do rozwązywania równań różniczkowych elektrotechniki teoretycznej, nie troszcząc się jednak w ogóle o uzasadnienie matematyczne. Heaviside traktował symbol różniczkowania $d/dt=p$ jako coś, do czego stosują się reguły zwyczajnej algebry i sprowadzał w ten sposób liniowe równania różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach do liniowych równań algebraicznych. Stąd wynikło prawdopodobnie przekonanie, że główną zaletą rachunku operatorów jest to, że można z jego pomocą prosto rozwiązywać niektóre równania różniczkowe. Przekonanie to widocznie nie pozostało bez wpływu na matematyków interesujących się rachunkiem operatorów, skoro w latach 30-tych bieżącego stulecia wysiłki ich szły głównie w tym kierunku, aby zalegalizować przede wszystkim formalizm rachunkowy operatorów. W ten sposób powstały ujęcia matematyczne rachunku operatorów, które dziś są już tradycyjne. Opierały się one na teorii transformacji całkowych, najczęściej transformacji Laplace'a

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt,$$

która funkcji $f(t)$ przyporządkowuje inną funkcję zmiennej zespolonej $s$. Transformacja Laplace'a dawała istotnie wzór sprowadzający różniczkowanie funkcji $f(t)$ do mnożenia jej transformaty $L\{f(t)\}$ przez liczbę zespoloną $s$. W ten sposób operatory stały się zwykłymi funkcjami zmiennej zespolonej. Nie można odmówić takiemu ujęciu pewnych zalet, bo przedstawiało ono już poprawną metodę matematyczną i pozbawiało operatory ich „magii" robiąc z nich po prostu zwykłe funkcje zmiennej zespolonej.

Rachunek operatorów oparty na transformacji całkowej szybko stał się narzędziem techników i zajął mocną pozycję w ich arsenale matematycznym. Jednakże cena, którą trzeba było zapłacić za takie ujęcie rachunku operatorów, nie była bynajmniej umiarkowana. Należy tu przytoczyć przede wszystkim fakt ważny ze względów dydaktycznych, że oparcie operatorów na transfomacji Laplace'a (lub innych analogicznych transformacjach całkowych) wprowadzało od razu do samej metody skomplikowane środki teorii funkcji zmiennej zespolonej, które nie są adekwatne prostocie algebraicznej samego rachunku operatorów. Są jednak również inne, poważniejsze wady tego ujęcia. Rachunek operatorów oparty na transformacjach całkowych ogranicza dość istotnie zakres stosowalności tej metody tylko do tych funkcji, dla których transformacja całkowa jest wykonalna. A więc np. funkcja $e^{t^2}$ już jest wyłączona z zasięgu rachunku operatorów opartego na transformacji Laplace'a,

bo całka $\int_0^\infty e^{-st}e^{-t^2}dt$ jest rozbieżna. Stąd płynie konsekwencja dla zastosowań do równań różniczkowych, że w rachunku operatorów opartym na transformacjach całkowych nie można udowodnić w całej ogólności jedyności rozwiązań równań różniczkowych, lecz tylko dla klasy funkcji transformowalnych. Ta okoliczność w zastosowaniu do liniowych równań różniczkowych zwyczajnych wydaje się niezbyt „groźna", gdyż dla takich równań mamy przecież inne dowody jedyności. Nie jest tak jednak już w przypadku liniowych równań o pochodnych cząstkowych (dwóch zmiennych) o stałych współczynnikach, dla których to równań albo są znane fakty niejedyności (na przykład dla równania przewodnictwa ciepła), albo też zgoła o jedyności nie zawsze coś wiadomo na podstawie klasycznych teorii tych równań. Kwestie istnienia i jedyności przestały już być dawno przedmiotem „dewocji" wyłącznie matematyków i grają we współczesnych zagadnieniach fizycznych lub technicznych pierwszorzędną rolę. Jeżeli więc rachunek operatorów oparty na transformacjach całkowych kwestii tych nie potrafi rozstrzygnąć w całej ogólności potrzebnej dla zastosowań, należy to uznać niewątpliwie za jego poważną wadę.

Inna poważniejsza wada tradycyjnego ujęcia polega na tym, że transformacje całkowe niedostatecznie uwypuklają i wykorzystują znacznie głębsze aspekty rachunku operatorów niż te, które polegają na uproszczonej pisowni i automatyzmie całkowania równań różniczkowych. Operatory nie dlatego „zrobiły karierę" w fizyce i technice, że ułatwiają rozwiązywanie równań różniczkowych, ale z innego, poważniejszego powodu. (Nawiasem mówiąc, samo uproszczenie pisowni i techniki rozwiązywania równań różniczkowych wydaje się praktycznie dość wątpliwe, bo np. „zwykłe", nieoperatorowe rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach nawet przy „masowej produkcji" tych równań nie wydaje się znacznie uciążliwsze niż rozwiązywanie za pomocą operatorów.)

Głównym ważnym i nowym aspektem rachunku operatorów jest to, że pojęcie operatora stanowi uogólnienie pojęcia funkcji. Fizycy i technicy dlatego właśnie chętnie posługują się rachunkiem operatorów, że są w nim narzędzia pozwalające opisać takie pojęcia jak np. impuls, siła skupiona lub pewne przebiegi nieciągłe, których zwykła klasyczna analiza albo w ogóle opisać nie może, albo robi to w sposób ciężki, mało przejrzysty i nie przydatny do rachunków. Potrzeby fizyki i techniki narzucały konieczność takiego uogólnienia pojęcia funkcji, by wspomnieć tylko o *funkcji delta* Diraca. Rachunek operatorów oparty na transformacjach całkowych prowadzi wprawdzie również do uogólnienia pojęcia funkcji, ale jest ono tam jak gdyby „produktem ubocznym", a nie głównym wątkiem teorii.

Monografia Mikusińskiego stanowi systematyczny wykład rachunku operatorów i jego zastosowań oparty nie na transformacjach całkowych, lecz na innej oryginalnej koncepcji autora, która stanowiła przedmiot jego prac opublikowanych w latach 1950-1952. Główną ideą teorii Mikusińskiego jest właśnie to, że pojęcie operatora traktuje się jako uogólnienie pojęcia funkcji. Okazuje się, że w ten sposób teoria nie tylko staje się głębsza i ogólniejsza, ale równocześnie znacznie prostsza niż teorie oparte na transformacjach całkowych.

Książka składa się z pięciu części. Część pierwsza przedstawia w 7 rozdziałach algebrę operatorów i jej zastosowania do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach. Autor w sposób jasny, prosty i bezpośredni wprowadza czytelnika w tej części od razu w ideę przewodnią swojej teorii. Mianowicie Mikusiński konstruuje algebrę, której elementami są (na razie) ciągłe funkcje zespolone $\{a(t)\}$ zmiennej rzeczywistej $t \geqslant 0$, oznaczane krótko $a$. W algebrze

tej określa się dodawanie elementów $a+b$ w sposób „zwykły" jako $\{a(t)+b(t)\}$, ale mnożenie — i to jest właśnie istota pomysłu — jako splot

$$ab = \Big\{ \int_0^t a(\tau)\, b(t-\tau)\, d\tau \Big\}.$$

(Nawiasem dodam, że doskonały termin *splot* wprowadzony przez Mikusińskiego przyjął się obecnie powszechnie w polskiej terminologii matematycznej.) Już w krótkim rozdziale I czytelnik nie tylko znajduje definicję i przykłady splotu, ale też przekonuje się, że splot jest przemienny, łączny, a ponadto dowiaduje się o właściwościach operatora całkowego $\{1\}=l$.

W rozdziale II jest podstawowe dla dalszego ciągu twierdzenie Titchmarsha, że splot nie ma dzielników zera, to znaczy, że jeżeli funkcje ciągłe $a$ i $b$ nie są tożsamościowo równe zeru, to ich splot $ab$ też nie jest tożsamościowo równy zeru. Podany w książce oryginalny dowód tego głębokiego twierdzenia nie tylko nie korzysta z teorii funkcji analitycznych, ale jest prostszy i krótszy niż inne znane dowody wymagające mocnych środków. Oczywiście prostota tego dowodu jest wyrafinowana. Czytelnik interesujący się głównie zastosowaniami może zresztą przy pierwszym (a nawet i drugim) czytaniu przyjąć twierdzenie Titchmarsha bez dowodu i nie przestanie rozumieć dalszej oryginalnej konstrukcji ciała operatorów rozwiniętej w rozdziale III. Konstrukcja ta polega na tym, że operatory określa się jako „ułamki" splotowe $a/b$. Ogólność i wytworna prostota tej konstrukcji daje od razu niemal całą algebrę operatorów. Okazuje się np. bezpośrednio, że odwrotność splotowa $1/l=s$ operatora całkowego $l$ jest operatorem różniczkowania, a stąd prowadzi prosta i naturalna droga do wielomianów i funkcji wymiernych operatora różniczkowego $s$. Nie-matematyk otrzymuje w ten sposób bardzo szybko środkami elementarnymi znaczną część algebry operatorów, potrzebną do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach (ilustrowaną w rozdziale IV wieloma przykładami), a matematyk dostrzeże tu oryginalną i piękną konstrukcję nowego ciała algebraicznego, stanowiącego istotne rozszerzenie ciała liczb zespolonych i otwierającego pole do ciekawych, ważnych, ale też i trudnych dociekań teoretycznych z pogranicza wielu działów matematyki nowoczesnej (algebra abstrakcyjna, analiza funkcjonalna, teoria funkcji zmiennej zespolonej i inne). Autor o tych aspektach w swej książce nie pisze.

Rozdział V, jeden z najpiękniejszych w całej książce, pokazuje naocznie, jak metody operatorowe pasują pojęciowo do teorii obwodów elektrycznych. Widać tu wyraźnie, że operatory rozumiane jako uogólnienie pojęcia funkcji ujmują prosto i naturalnie wiele faktów technicznych, bo np. operator liczbowy przedstawia impuls, a operator impedancji w zupełności charakteryzuje prosto i ogólnie dynamiczne właściwości układów elektrycznych. Autor też przedstawia szczegółowo zastosowania rachunku operatorów do opisu przebiegów w obwodach elektrycznych liniowych, wyjaśniając i porządkując wiele pojęć i kwestii od najprostszych aż do teorii czwórników oraz ilustrując konkretnymi przykładami technicznymi przerachowanymi do końca. Po krótkim rozdziale VI, omawiającym ogólne rozwiązanie liniowych równań różniczkowych zwyczajnych i zagadnień brzegowych dla nich, rozszerza się w rozdziale VII teorię na funkcje bezwzględnie całkowalne w każdym przedziale skończonym $(0,t)$ i mające tam co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości. Pozwala to nie tylko opisać za pomocą operatorów zjawiska nieciągłe, co jest bardzo ważne dla zastosowań, ale pokazuje też, że początkowe ograniczenie się do funkcji ciągłych było dla teorii nieistotne.

Na tym kończy się część pierwsza książki i autor przerywa przedstawianie schematu algebraicznego teorii operatorów. W części tej jest wyraźnie pokazane, jak wiele można otrzymać z samej tylko konstrukcji algebraicznej. Widać też, że w tym ujęciu posługiwanie się transformacją Laplace'a jest zupełnie zbędne (autor nie wspomina nawet o niej, dopiero na końcu książki poświęca jej kilka zdań), a formalne rachunki są nie tylko równie proste, ale i ogólniejsze, bo w tych przypadkach, do których stosuje się transformacja Laplace'a, formalizm rachunkowy Mikusińskiego jest zupełnie analogiczny, lecz za to stosuje się do szerszej klasy funkcji. Dzięki temu tablice transformat, cieszące się wielkim powodzeniem u techników, nie straciły bynajmniej swojego znaczenia dla rachunków, ale mogą być śmielej stosowane nadal.

Część pierwsza tej książki (a także zresztą i pozostałe) napisana jest tak urzekająco, że warto też poświęcić jej kilka uwag krytycznych, mających na celu udoskonalenie książki przy drugim jej wydaniu. Zwolennicy tradycyjnego ujęcia za pomocą transformacji Laplace'a mogliby mianowicie tutaj — niezupełnie bez racji — wysunąć następujące zarzuty: Do tego miejsca książki, gdzie kończy się, na razie, „czysta" algebra operatorów, nie zostały jeszcze wprowadzone niektóre operatory bardzo ważne dla zastosowań, np. operator przesunięcia, który w teorii „transformacyjnej" uzyskuje się w sposób naturalny i nadzwyczaj łatwy od razu niemal na początku teorii. A tymczasem w książce Mikusińskiego czytelnik musi przestudiować około 20 stronic, dość dalekich (str. 110-129) i nie należących już do algebry operatorów, lecz do ich analizy, aby w sposób — moim zdaniem — niedość naturalny i intuicyjnie przekonywujący dowiedzieć się o tym operatorze. Niewątpliwie operator przesunięcia można i należy wprowadzić czysto algebraicznie bez takich — dość subtelnych — pojęć, jak funkcje operatorowe, ich ciągłość, pochodne i operatorowe równania różniczkowe, jak to robi Mikusiński w rozdziałach I i II części drugiej swej książki. Czysto algebraiczne wprowadzenie operatora przesunięcia nie tylko wzbogaciłoby samą algebrę operatorów, ale pozwoliłoby też znacznie rozszerzyć zakres jej zastosowań i zilustrować metodę autora na takich przykładach, w których ten operator gra istotną rolę. Niektóre z takich przykładów są wprawdzie przytoczone w książce, ale są one właśnie dopiero w dalszych jej częściach i — jak się wydaje — jest ich zbyt mało. Przecież już teoria obwodów elektrycznych zyskałaby znacznie, gdyby wprowadzić do niej także impulsy włączane w pewnej chwili $t_0$ nie mówiąc już o szeregu impulsów. Można by dalej pokazać prosty sposób operatorowy rozwiązywania liniowych równań różnicowych o stałych współczynnikach, co ma znaczenie dla elektrotechniki i statyki. Zresztą w książce nie ma w ogóle mowy o statyce. Zastosowania rachunku operatorów do statyki są obecnie przedmiotem publikacji w polskich czasopismach technicznych i wymagałyby gruntownego, poprawnego a zarazem prostego i jasnego wyłożenia. Byłoby pożądane, by w następnym wydaniu tej książki autor zwrócił uwagę na te sprawy i wydobył możliwie jak najwięcej z konstrukcji algebraicznej, a nie przerzucał niektórych pojęć i metod dających się ująć czysto algebraicznie do części posługującej się analizą operatorów. Wydaje się, że takie rozgraniczenie „kompetencji" nie tylko zwiększyłoby jeszcze bardziej wysokie zalety dydaktyczne książki i odebrałoby argumenty zwolennikom transformacji Laplace'a, ale także zwiększyłoby samą wartość matematyczną teorii, bo pokazałoby wyraźnie, jakie rzeczy można jeszcze osiągnąć środkami algebraicznymi, a jakie wymagają już w sposób istotny pojęcia zbieżności w ciele operatorów.

Zbieżność w ciele operatorów autor wprowadza w rozdziale III części drugiej. Najpierw definiuje pojęcie funkcji operatorowej $f(\lambda)=\{f(\lambda,t)\}$, która wartościom liczbowym $\lambda$ (z pewnego przedziału) przyporządkowuje operator lub w szczególności funkcję zmiennej $t\geqslant 0$ zwaną wtedy funkcją parametryczną. Dalej wprowadza odpowiednie pojęcia ciągłości i pochodnej, co pozwala już rozpatrywać operatorowe rów-

nania różniczkowe. Dzięki temu zaś można wprowadzić operatorowe funkcje wykładnicze $e^{w\lambda}$ jako rozwiązanie równania $x'(\lambda)=wx(\lambda)$ z warunkiem $x(0)=1$, gdzie $w$ jest danym operatorem. W szczególności, jeżeli $w=-s$, otrzymuje się wspomniany już operator przesunięcia. W końcu tego rozdziału autor wprowadza ciągi i szeregi operatorów, a następnie przechodzi w dalszym rozdziale do twierdzenia o jedyności rozwiązań operatorowego równania różniczkowego $x''(\lambda)=wx(\lambda)$ przy danych warunkach początkowych dla $x$ i $x'$ w punkcie $\lambda=\lambda_0$. Twierdzenia tego rozdziału są podstawą dla zastosowań rachunku operatorów do liniowych równań o pochodnych cząstkowych, o których jest mowa w dalszych rozdziałach. Jest rzeczą charakterystyczną dla teorii Mikusińskiego, że jego ujęcie prowadzi w sposób naturalny do kwestii jedyności rozwiązań abstrakcyjnych równań różniczkowych i rozstrzygnięcie tej kwestii daje mocne narzędzie do badania zwykłych równań o pochodnych cząstkowych. Tego rodzaju badania są nie do pomyślenia w teorii operatorów opartej na transfomacjach całkowych, bo ona — jak wspomniałem — zapewnia jedyność tylko w wąskiej klasie funkcji.

Siłę abstrakcyjnego ujęcia poznaje się już w rozdziale V części drugiej, gdzie jest mowa o rzeczach zupełnie klasycznych, a mianowicie jest szczegółowa dyskusja równania struny drgającej. Na przykładzie tego równania autor pokazuje też, jak w zakresie operatorów otrzymuje się ogólniejszą klasę rozwiązań niż w zakresie zwykłych funkcji, które na to, by spełniać równanie struny, muszą mieć drugie pochodne, podczas gdy dla operatorów ten warunek jest automatycznie spełniony, bo wszystkie rozważane funkcje są zawsze różniczkowalne w sensie operatorowym. Siła metody jest tym bardziej przekonywująca, że pozwala dać efektywne rozwiązanie różnych zagadnień brzegowych lub początkowych w sposób jednolity i ogólny. Dzięki temu autor może omówić różne kwestie, o których nie zawsze mówi się w podręcznikach traktujących równanie struny metodami klasycznymi. Podobny charakter ma następny rozdział VI, mówiący o równaniu przewodnictwa ciepła w pręcie. Podstawową rolę gra tu operatorowa funkcja wykładnicza $e^{-\lambda\sqrt{s}}$, która dla $\lambda>0$ jest funkcją parametryczną; wyłożone są jej właściwości analityczne potrzebne do efektywnego rozwiązywania różnych zagadnień równania przewodnictwa ciepła. Ujęcie operatorowe tych klasycznych spraw jest i tutaj nie tylko ogólniejsze, bo pozwala rozpatrywać rozwiązania nieróżniczkowalne w sensie funkcyjnym, ale dzięki udowodnionym poprzednio twierdzeniom daje ogólne, proste i jednolite dowody jedyności rozwiązań dla poszczególnych rodzajów warunków początkowych lub brzegowych, bez żadnych krępujących założeń, które musi się przyjmować w rachunku operatorów opartym na transformacji Laplace'a. Ażeby się o tym przekonać, wystarczy porównać odpowiednie miejsca w książce Mikusińskiego z przedstawieniem tych samych kwestii w innych książkach, w których autorzy albo przemilczają te drażliwe sprawy regularności warunków początkowych i brzegowych, albo — sumienniejsi — muszą narzucać silne ograniczenia, które są nie tylko nieprzyjemne pod względem analitycznym (bo widać, że wynikają nie z istoty zagadnienia, lecz z użytej metody), ale też nie mają chyba żadnej interpretacji fizycznej[1]). W rozdziale VII jest operatorowe przedstawienie funkcji Bessla $J_n(t)$ dla $n$ całkowitego, a w następnym, jest omówione równanie telegrafistów, oczywiście też potraktowane operatorowo.

Ostatni, krótki rozdział IX części drugiej zatytułowany *Pochodna algebraiczna* zasługuje na osobne omówienie. Autor wprowadza tutaj operację $D$ zdefiniowaną przez równość $D\{a(t)\}=\{-ta(t)\}$. Operacja ta ma wiele właściwości formalnych

---

[1]) Por. np. G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin 1937, str. 346 i następne.

wspólnych z operacją „różniczkowanie względem $s$"; zastosowana zręcznie do funkcji wymiernych operatora $s$ pozwala przedstawić efektywnie te wyrażenia za pomocą zwykłych funkcji zmiennej $t$. Uważny czytelnik dostrzeże tu, że operacja $D$ gra ważną rolę w przytoczonym na początku książki eleganckim dowodzie twierdzenia Titchmarsha (chociaż oczywiście nie ma tam o niej wyraźnie mowy). Uważny czytelnik dostrzeże jednak też tutaj, jak w sprawie tej operacji „różniczkowania względem $s$" drogi rachunku operatorów Mikusińskiego różnią się od rachunku operatorów opartego na transformacji Laplace'a. Transformacja Laplace'a przyporządkowuje funkcji $f(t)$ funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej $s$. Fakt, że w transformacji Laplace'a operator $s$ jest zmienną zespoloną liczbową, nie dawał — jak widzieliśmy — transformacyjnemu ujęciu rachunku operatorów przewagi nad ujęciem abstrakcyjno-algebraicznym, a nawet powodował niektóre poważne kłopoty. Nie można się jednak oprzeć wrażeniu, że właśnie tu, w sprawie „różniczkowania względem $s$", ujęcie za pomocą transformacji Laplace'a jest w nieco korzystniejszym położeniu niż ujęcie abstrakcyjne. Pomijając już fakt natury metodologiczno-dydaktycznej, że pomysł „różniczkowania względem $s$" w transformacie Laplace'a nasuwa się w sposób zupełnie naturalny (co trudno powiedzieć o ujęciu abstrakcyjnym), można by przytoczyć jeszcze inne okoliczności natury czysto matematycznej. Otóż już sama możność różniczkowania względem $s$ transformaty Laplace'a może być wykorzystana z powodzeniem do rozwiązywania niektórych równań różniczkowych liniowych o współczynnikach zmiennych[2]). Wprawdzie da się to ostatecznie też zrobić w ujęciu Mikusińskiego, ale nie widać — na razie — jak uzyskać inne twierdzenia, np. typu $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} F(s)$ [3]), znane w teorii transformacji Laplace'a i wykorzystujące w istotny sposób fakt, że $s$ jest zmienną liczbową. Twierdzenia te są bardzo pożyteczne w zastosowaniach.

Nie chciałbym, by uwagi te były rozumiane jako zarzut pod adresem teorii Mikusińskiego, ale raczej jako ewentualne punkty programu jej dalszego rozwoju. Teoria Mikusińskiego bowiem — jak już wspominałem — wykazuje swoją przewagę w wielu innych aspektach, ważnych pod względem zarówno naukowym, jak i dydaktycznym. Do przytoczonych już przedtem argumentów część trzecia omawianej książki dorzuca jeszcze jeden walny argument. W części tej naszkicowana jest mianowicie teoria cząstkowych równań liniowych dwóch zmiennych o współczynnikach stałych, z punktu widzenia metod operatorowych rozwiniętych przez autora. Równania te sprowadzają się do operatorowych równań różniczkowych zwyczajnych, które autor omawia w początkowych rozdziałach tej części. Wprowadzając pojęcie logarytmu operatorowego, klasyfikuje Mikusiński operatorowe równanie różniczkowe na trzy typy: logarytmiczny, czysty i mieszany. Ta klasyfikacja wraz z twierdzeniami o jedyności jest podstawą do pełnej dyskusji równania cząstkowego

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}\,\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,t)/\partial\lambda^{\mu}\partial\lambda^{\nu} = \varphi(\lambda,t)$$

z warunkami danymi na brzegu półpasa $0\leqslant t\leqslant\infty$, $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2\leqslant\infty$. W książce są podane tylko przykłady ilustrujące fragmenty tej teorii z odesłaniem czytelnika do oryginalnych prac autora. Przykłady te pokazują doskonale metodę pozwalającą stwier-

---

[2]) Por. np. R. V. Churchill, *Modern operational mathematics in engineering*, New-York 1944.

[3]) В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, *Справочник по операционному исчислению*, Москва-Ленинград 1951, str. 37.

dzić, czy i jakie warunki brzegowe zapewniają rozwiązania i jego jedyność. Wystarczy przeczytać choćby § 24 i § 25 rozdziału III, zatytułowane *Błędne rozwiązanie* i *Wyjaśnienie pozornej sprzeczności*, by zobaczyć, że chociaż w tej części książki jest tylko szkic ogólnej teorii, to jednak metoda operatorowa, rozwinięta przez autora, wnosi do — zdawałoby się klasycznych — zagadnień fizyki matematycznej nie tylko prostotę, ogólność i porządek, ale też wiele nowych wyników rozstrzygających sporo kwestii dotąd otwartych. Wypada żałować, że w tej książce, przeznaczonej nie tylko dla matematyków, ale i dla fizyków i inżynierów, nie znalazło się miejsca na pełniejsze przedstawienie ogólnej teorii tych równań liniowych o pochodnych cząstkowych, do których metoda operatorowa doskonale pasuje. Zwłaszcza teoria i metody rozwiązywania zagadnień mieszanych, opublikowane przez autora w jego pracach, powinny być omówione szerzej w książce, ponieważ zagadnienia te są bardzo ważne dla zastosowań.

Część czwarta książki wprowadza rachunek całkowy operatorów. Pozwala to np. na „ucinanie" funkcji poza danym przedziałem lub napisanie operatorowego rozwiązania równania różniczkowego przy danych warunkach brzegowych, co ma bezpośrednie znaczenie dla (funkcyjnych) równań cząstkowych. *Nota bene* i tutaj można by postawić pod adresem autora pytanie, czy nie dałoby się tego materiału umieścić nieco wcześniej, chociażby już połączyć go z rachunkiem różniczkowym operatorów. Pojęcia i środki wprowadzone w tej części są bowiem bardzo przydatne do wielu zastosowań technicznych rachunku operatorów i byłoby poręczniej mieć je wcześniej niż przy końcu książki. W części piątej, ostatniej, są zebrane wzory wyprowadzone poprzednio w tekście i potrzebne w rachunku operatorów, a nadto skrócone tablice kilku funkcji specjalnych.

Niniejszy przegląd treści książki nie daje oczywiście pełnego obrazu jej bogactwa i wysokich zalet formalnych, do których należy zaliczyć przede wszystkim walory dydaktyczne. Książka jest skomponowana prosto i jasno, wykład nadzwyczaj przystępny, szczegółowy, ale nie rozwlekły. Autor ma doskonałe wyczucie potrzeb czytelnika i dba pieczołowicie o zaspokojenie tych potrzeb. Niemal wszystkie wywody teoretyczne są ilustrowane przykładami zaczerpniętymi często z konkretnych zagadnień fizycznych lub technicznych, przy czym prawie zawsze w przykładach tych czytelnik znajdzie jakiś nowy aspekt teorii. Wartość dydaktyczną książki powiększa znakomicie ponad 170 pouczających ćwiczeń, zaopatrzonych w rozwiązania. Godne podkreślenia jest, że książka wymaga od czytelnika przed przystąpieniem do jej czytania bardzo skromnego przygotowania matematycznego, ograniczającego się chyba tylko do elementów rachunku różniczkowego i całkowego w zakresie programu politechniki. Jeżeli po drodze potrzeba niektórych pojęć lub twierdzeń, autor wprowadza je we właściwym miejscu krótko i przystępnie. W ten sposób np. czytelnik dowiaduje się o funkcji gamma Eulera, o szeregach trygonometrycznych, o funkcjach Bessla, nie potrzebując sięgać do innych książek. Dzięki temu monografia Mikusińskiego jest dydaktycznie autonomiczna i to stanowi też jej niepoślednią zaletę.

Nie będzie przesadą powiedzieć, że ukazanie się *Rachunku operatorów* Mikusińskiego jest ważnym wydarzeniem w naszym życiu matematycznym. W dziele tym są bowiem zebrane główne osiągnięcia autora (i współpracowników) w dziedzinie teorii operatorów, opublikowane wcześniej w cyklu oryginalnych rozpraw naukowych, będących niewątpliwie poważnym dorobkiem matematyki polskiej, uwieńczonym zresztą nagrodą państwową II stopnia w 1953 r. Ukazanie się tej książki jest godne uwagi z jeszcze innego powodu. Jest to mianowicie jedna z nielicznych pozycji naukowych w naszej literaturze matematycznej, adresowana nie tylko do mate-

matyków, lecz także do fizyków i inżynierów. Nie ulega wątpliwości, że adres ten jest trafny.

Strona graficzna tej książki przyjemna, wydaje się jednak, że papier, na którym jest wydrukowana książka, jest mniej trwały niż jej treść naukowa.

*S. Drobot*

Jan Oderfeld, *Zarys statystycznej kontroli jakości*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1954, str. 156.

Wśród coraz to liczniej pojawiających się w Polsce wydawnictw matematycznych ukazały się w roku 1954 dawno oczekiwane podręczniki rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej oraz statystycznej kontroli jakości. *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna* M. Fisza i *Zarys statystycznej kontroli jakości* J. Oderfelda, wydane przez Państwowe Wydawnictwo Naukowe, wypełniają częściowo lukę spowodowaną brakiem podręczników polskich w tych dziedzinach.

W ostatnich czasach daje się zauważyć coraz większe zainteresowanie rachunkiem prawdopodobieństwa i jego zastosowaniami zarówno matematyków, jak i specjalistów rozmaitych innych dziedzin nauki i techniki. Nowe warunki ekonomiczne i szybki rozwój naszego przemysłu wymagają coraz częściej stosowania nowych metod statystycznej kontroli jakości. Niestety, metody statystyczne są polskim technikom wciąż jeszcze prawie zupełnie nieznane. W walce całego narodu o wykonanie ambitnych planów produkcyjnych znikomo małą rolę spełnia dotychczas statystyczna kontrola jakości. Jej wprowadzenie i konsekwentne stosowanie mogłoby się wydatnie przyczynić do podniesienia jakości produkcji, zmniejszenia ilości braków i obniżenia kosztów produkcji. Dlatego ukazanie się pierwszego polskiego podręcznika statystycznej kontroli jakości ma duże znaczenie.

Książka J. Oderfelda jest przeznaczona przede wszystkim dla praktyków. Z obszernej już dzisiaj specjalności autor wybrał najważniejsze problematy i najprostsze metody, kładąc główny nacisk nie na rozważania teoretyczne, lecz na praktyczne rozwiązania najważniejszych zagadnień. Przejrzyjmy pokrótce treść tej książki.

Rozdział I jest jakby obszernym wstępem. Omówione są w nim zadania i cele statystycznej kontroli jakości w aktualnych warunkach technicznych i ekonomicznych, jej znaczenie jako narzędzia planowania oraz zakres zastosowań w całym procesie wytwórczym od przygotowania produkcji aż do użytkowania gotowych wyrobów. Specjalny paragraf autor poświęcił ważnemu zagadnieniu organizacji statystycznej kontroli jakości, szkoleniu specjalistów i omówieniu aktualnego stanu w Polsce.

Rozdział II zatytułowany *Podstawy statystycznej kontroli jakości* ma za zadanie przypomnieć czytelnikowi potrzebne później podstawowe wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Autor zakłada w swej książce pewne przygotowanie czytelnika w tych dziedzinach i dlatego rozdział ten nie miał być wcale skrótem wykładu, lecz encyklopedycznym przeglądem zasadniczych pojęć: zmiennej losowej, wartości oczekiwanej, wariancji, ich podstawowych własności oraz stosowanych w dalszym tekście rozkładów zmiennych losowych. Na zakończenie omówione są zasady pobierania próbek, eksperymentalne rozkłady pomiarów i elementy teorii tolerancji i pasowania.

Najobszerniejszy w całej książce rozdział III jest poświęcony najważniejszym zagadnieniom statystycznej kontroli jakości w czasie produkcji. Omówione są w nim następujące karty kontrolne: karta „$z$", karta „$w$", modyfikacja karty „$z$" w przypadku zwężonych granic tolerancji, karta „$X-R$" i karta „$X-S$". Pierwsza z nich, karta „$z$" nadaje się do kontroli produkcji towaru sztukowego kwalifikowanego alternatywnie. Polega ona na rejestrowaniu ilości sztuk wadliwych w próbkach o sta-