wmptm 1897 277

Marek Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1955, str. 374.

Od kilkudziesięciu lat jesteśmy świadkami bujnego rozwoju statystyki matematycznej zapoczątkowanego pracami R. A. Fishera. Od tej pory nagromadziło się wiele prac dotyczących zagadnień estymacji i testowania hipotez, opierających się na rachunku prawdopodobieństwa. Wiele z nich nie odznaczało się jasnością i nie było wolnych od usterek logicznych. Może w części miało to źródło w stanie rozwoju rachunku prawdopodobieństwa, nad którego ugruntowaniem matematycznym pracowano od początku bieżącego stulecia.

Wysiłki te zostały uwieńczone sukcesem. Od czasu ogłoszenia w 1933 r. pracy A. N. Kołmogorowa pt. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* rachunek prawdopodobieństwa stał się teorią matematyczną.

Od tej pory stoi przed nauką światową zadanie opracowania podręczników-monografii, które by przedstawiły w jednolity, logicznie precyzyjny sposób dotychczasowy dorobek statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa, rozrzucony w wielkiej ilości mniejszych i większych prac. Zadanie to stawało się tym wyraźniejsze, im bardziej zwiększała się liczba prac statystycznych korzystających w istotny sposób z nowego podejścia do rachunku prawdopodobieństwa. Ze względu na to, że w niespotykany przedtem sposób rozwinął się również i sam rachunek prawdopodobieństwa — na przykład powstały całe obszerne teorie procesów stochastycznych — konieczny jest odpowiedni wybór materiału do takiego podręcznika. Jako jeden z programów takiego podręcznika-monografii można by postawić zadanie, by zawierał on poprawny wykład najważniejszych osiągnięć statystyki i tyle z rachunku prawdopodobieństwa, ile jest potrzebne do zapewnienia kompletności wykładu statystyki.

Książka Fisza jest realizacją takiego właśnie programu. Przeglądnijmy pobieżnie jej treść. Jest ona podzielona na dwie części: pierwszą, zatytułowaną *Rachunek prawdopodobieństwa* i drugą, zatytułowaną *Statystyka matematyczna*.

Część pierwsza książki jest wykładem rachunku prawdopodobieństwa przeprowadzonym na gruncie ogólnie w świecie uznanej aksjomatyki Kołmogorowa. Celem przyświecającym autorowi jest przedstawić możliwie przystępnie, z podaniem przykładów ilustrujących, konstrukcję pojęciową rachunku prawdopodobieństwa opartego na tej aksjomatyce i zreferować najważniejsze twierdzenia dotyczące zmiennych losowych niezależnych.

I tak w rozdziale 1 autor precyzuje pojęcia zdarzeń i prawdopodobieństwa, określa prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność zdarzeń, dowodzi podstawowych twierdzeń związanych z tymi pojęciami. W rozdziale 2 określa zmienną losową oraz rozkład zmiennej losowej i rozkład pary zmiennych losowych. Omawia sposoby opisywania rozkładu prawdopodobieństwa przez dystrybuantę, gęstość prawdopodobieństwa itp. Określa niezależność zmiennych losowych. Dalej, w rozdziale 3, opisuje parametry używane do charakteryzowania rozkładów zmiennych losowych, jak wartość oczekiwaną, momenty, kwantyle, dla pary zmiennych losowych także współczynniki regresji i korelacji. Nie brakuje tu przykładów ilustrujących wprowadzane pojęcie. Szkoda tylko, że w przykładach zmiennych losowych autor nie wskazuje, co tam gra rolę zdarzeń elementarnych.

Rozdział 4 zapoznaje czytelnika z funkcjami charakterystycznymi, które są podstawowym narzędziem analitycznym przy badaniu rozkładów granicznych. Kulminacyjnym rozdziałem części pierwszej jest rozdział 6, w którym są zreferowane prawa wielkich liczb i twierdzenia o rozkładach granicznych dla sum niezależnych

zmiennych losowych, dla których wymyślono nazwę *centralne twierdzenie rachunku prawdopodobieństwa* i nadawano ją coraz to mocniejszym wariantom tych twierdzeń. Znajdujący się między tymi rozdziałami rozdział 5 zawiera opis wybranych rozkładów prawdopodobieństwa.

Część druga książki jest poświęcona statystyce matematycznej.

Dwa pierwsze rozdziały tej części omawiają rozkłady prawdopodobieństwa występujące w statystyce matematycznej. Tak więc w rozdziale 7 opisane są między innymi rozkłady: t Studenta, Z Fishera, rozkład chi-kwadrat, rozkład współczynników korelacji dla prób z populacji normalnej. W następnym rozdziale 8 zebrano najważniejsze twierdzenia o rozkładach granicznych różnych statystyk, na przykład momentów z próby i kwantyli z próby. Podano twierdzenia o zbieżności kwantyli z próby do kwantyli populacji. Wreszcie podano (bez dowodu) twierdzenia Gliwenki o zbieżności dystrybuant empirycznych do dystrybuanty populacji oraz twierdzenia Kołmogorowa i Smirnowa o rozkładzie granicznym odpowiednio dla maksimum różnicy między dystrybuantą empiryczną a dystrybuantą populacji oraz dla maksimum różnicy między dwiema dystrybuantami empirycznymi dla prób z tej samej populacji. Są to nowe i bardzo doniosłe osiągnięcia radzieckie z działu tak zwanych statystyk nieparametrycznych.

Rozdział 9 zapoznaje czytelnika z zasadami statystycznego weryfikowania hipotez i z podstawowymi testami używanymi przy tej okazji. Jest tu więc test t Studenta, test chi-kwadrat, test lambda Kołmogorowa i inne. Zastosowania tych testów zademonstrowano na wielu trafnie dobranych przykładach.

Rozwinięciem rozważań rozdziału 9 jest ogólna teoria testów zajmująca się poszukiwaniem właściwych metod weryfikowania hipotez. Główne należące tu wyniki, związane z pojęciami testu jednostajnie najmocniejszego i testu nieobciążonego dla testowania hipotez prostych referuje autor w rozdziale 13.

W związku z zastosowaniami rolniczymi opracowano obszerny dział statystyki zwany *analizą wariancji*. Jest to, z grubsza mówiąc, rozszerzenie metod badania istotności różnic między średnimi dwu populacji na przypadek jednoczesnego badania różnic między średnimi wielu populacji. W krótkim rozdziale 12 autor referuje kilka należących tu sposobów postępowania.

Ważnym i ciągle rozwijającym się działem statystyki jest teoria estymacji zajmująca się badaniem sposobów jak najlepszego szacowania parametrów populacji na podstawie prób. W rozdziale 10 autor referuje główne wyniki tej teorii związane z pojęciami zgodności, dostateczności i efektywności estymatorów. Przedstawia tu także podstawę Neymana metody przedziałów ufności. Warto by tu może szerzej zreferować nowe prace H. Steinhausa powstałe na tle zastosowań do statystycznej kontroli jakości, które stanowią ważny przyczynek do wyjaśnienia kontrowersji związanej z regułą Bayesa.

Dla korzystania z teorii estymacji i z teorii weryfikowania hipotez najczęściej potrzeba, żeby próby były niezależne. W rozdziale 11 autor opisuje praktyczne metody losowania, np. oparte na tablicach liczb losowych, a mające na celu zapewnienie niezależności prób. Rozważa się tu także, jak odbija się na efektywności szacowania średniej losowanie bez zwracania z populacji skończonej oraz tak zwane losowanie warstwowe.

Jedną z nowych metod statystycznych, powstałych w ostatnich latach wokół zagadnień statystycznej kontroli jakości, jest stworzona przez Walda tzw. analiza sekwencyjna. Główną jej ideą jest podejmowanie decyzji o przyjęciu lub odrzuceniu jakiejś hipotezy co do populacji nie na podstawie próbki o danej z góry liczności, ale na podstawie próbki o liczności ustalanej w czasie badania na podstawie kolejnych

wyników badania. Autor przedstawia w rozdziale 14 wybrane osiągnięcia z tego zakresu.

Z tego przeglądu treści widzimy, że materiał przedstawiony w książce jest dość obszerny, biorąc pod uwagę objętość książki, i trafnie dobrany, tak że na jego podstawie można sobie wyrobić zdanie o współczesnym stanie statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa. Jest to bardzo wielkim osiągnięciem tej książki i stawia ją wysoko w rzędzie światowych osiągnięć tego rodzaju.

Zawarty w książce materiał jest podany na ogół z dużą ścisłością. Dlatego bardzo rażą usterki natury logicznej występujące w niektórych sformułowaniach.

Tak np. na str. 211 autor definiuje *statystykę pozycyjną* $\zeta_k^{(n)}$ jako k-tą co do wielkości spośród realizacji n zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (Określenie 8.2.1), następnie stosunek k/n nazywa *rangą statystyki* $\zeta_k^{(n)}$ (Określenie 8.2.2), a potem powiada, że „rozróżniamy dwa typy statystyk pozycyjnych w zależności od tego, do jakiej granicy dąży ranga k/n, gdy n dąży do nieskończoności", mianowicie nazywa statystykę $\zeta_k^{(n)}$ *skrajną* wtedy, gdy granicą tą jest 0 lub 1, a *centralną*, gdy jest nią liczba zawarta między 0 i 1 (określenie 8.2.3).

Ostatnia definicja jest tu bezprzedmiotowa, bo np. nie można na jej podstawie rozstrzygnąć, czy statystyka $\zeta_3^{(10)}$ jest skrajna czy centralna. Nie pomoga poprzedzające tę definicję wyjaśnienie, że przy badaniu granicznych rozkładów statystyk pozycyjnych rozpatrujemy ciągi takich statystyk, w których k zależy od n. Należałoby raczej opuścić tę definicję i poprzestać na zakładaniu w twierdzeniach o rozkładach granicznych, że dla rozpatrywanego ciągu statystyk ranga ma taką czy inną granicę.

Niepotrzebnie też autor włącza do definicji statystyki pozycyjnej założenie, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają taki sam rozkład. Ta uwaga dotyczy także definicji dystrybuanty empirycznej na str. 212. Uważając, że to już jest zawarte w definicji dystrybuanty empirycznej autor opuszcza te założenia w twierdzeniach Gliwenki, Kołmogorowa i Smirnowa na str. 226 i 227, co sprawia, że wyglądają one na same tezy bez założeń.

Spotyka się w książce niektóre sformułowania wręcz błędne.

Np. na str. 165 autor mówi, że szereg $\sum p_k q_k$ „jest zbieżny jedynie wtedy, gdy przy $k \to \infty$, jest $p_k q_k \to 0$", co jest niezręcznym sformułowaniem warunku koniecznego, bo zwrot „jedynie wtedy" rozumie się jako wskazanie warunku koniecznego i dostatecznego.

Na str. 323 w sformułowaniu twierdzenia Neymana w założeniu autor pisze, że mają być dopuszczalne hipotezy $H_1(Q=Q_1)$, gdzie $Q_1<Q_0$ lub $Q_1>Q_0$, zamiast napisać, że wśród dopuszczalnych hipotez $H_1(Q=Q_1)$ muszą być takie, dla których $Q_1<Q_0$, i takie, dla których $Q_1>Q_0$, co sprawia, że w sformułowaniu autora twierdzenie jest fałszywe. Ponadto w tezie opuszczono, że chodzi o jednostajnie najmocniejszy test hipotezy $H_0(Q=Q_0)$.

Niewłaściwym wydaje się wystawianie i obdarzanie numerem niektórych „definicji", które są w istocie tylko wprowadzeniem nowego terminu na pojęcia już zdefiniowane. Np. na str. 254 autor definiuje estymator jako taką statystykę, która „służy za podstawę szacowania nieznanego parametru" (Określenie 10.1.1). Otóż definicja ta nic nie wnosi do wykładanej teorii. Estymator w tej teorii znaczy dokładnie to samo co statystyka. Chyba, że to jest np. nieobciążony estymator wariancji, co trzeba by wyrazić innymi słowy tak: statystyka, której wartość oczekiwana równa się wariancji. A więc to wprowadzenie terminu ma na celu ułatwienie sformułowań.

Wiele zastrzeżeń budzą liczne wypowiedzi i komentarze autora.

Tak np. w odsyłaczu na str. 7 autor informuje, że S. Bernstein pierwszy ujął aksjomatycznie rachunek prawdopodobieństwa, podczas gdy znane są próby wcześniejsze takiego ujęcia (Bohlman 1905).

Tamże autor pisze, że „ostatecznego i całkowitego rozwiązania zagadnienia aksjomatyzacji rachunku prawdopodobieństwa dokonał matematyk radziecki A. Kołmogorow". Otóż stanowczy ton co do ostateczności tego rozwiązania wydaje się niewłaściwy, a jest on tym dziwniejszy, że we wstępie na str. 4 autor pisze o niedostatkach tej aksjomatyzacji, które w niej dostrzegł sam jej autor, Kołmogorow.

W innym miejscu, na str. 115, przy okazji doświadczeń Rutheforda i Geigera, autor wspomina o teorii procesów stochastycznych jako tym specjalnym dziale rachunku prawdopodobieństwa, który zajmuje się badaniem przyczyn i ścisłą interpretacją matematyczną tego faktu, że w wielu doświadczaniach fizycznych i technicznych spotykamy się z rozkładami bliskimi rozkładu Poissona. Podobną informację co do rozkładu normalnego podaje autor na str. 122. Informacje te są nietrafne z dwu powodów. Po pierwsze, wyjaśnieniem roli tych rozkładów zajmuje się nie tylko teoria procesów stochastycznych, o czym świadczy sama omawiana książka, a po drugie, informacje te nic nie mówią o istotnym *novum* teorii procesów stochastycznych w stosunku do klasycznej teorii prawdopodobieństwa, że mianowicie w procesach stochastycznych rozważa się zamiast ciągów zmiennych losowych (niezależnych) nieprzeliczalne rodziny niekoniecznie niezależnych zmiennych losowych.

Do tego rodzaju niewłaściwych komentarzy zaliczyłbym także uwagę na str. 193 dotyczącą precyzyjności rozważań geometrycznych i analitycznych.

Na str. 256 autor stwierdza, że nieobciążony estymator wariancji otrzymuje się dzieląc sumę kwadratów obliczoną z n-elementowej próbki przez $n-1$ zamiast przez n, a bezpośrednio po tym powiada, że ponieważ wartość obciążonego estymatora może wypaść bliższa prawdziwej wartości parametru, więc „nie ma tu powodów do wyróżnienia któregokolwiek z nich". A czy to, że jeden z nich jest nieobciążony, nie ma znaczenia?

Na str. 227 w sformułowaniu założeń twierdzenia Smirnowa autor pisze, że n_1 i n_2 mają tak wzrastać do nieskończoności, żeby stosunek n_2/n_1 zachowywał stałą wartość, co wydaje się dziwne. Zaraz potem następuje niejasne zdanie „Warunek, by stosunek n_2/n_1 zachowywał stałą wartość należy praktycznie zinterpretować tak, że zarówno n_1, jak i n_2 powinny być dostatecznie wielkie". Nasuwa się pytanie, czy czasem właściwe sformułowanie założenia nie jest takie, że n_1 i n_2 mają zmierzać do nieskończoności i już?

Wydaje się, że kosztem niewielkiego trudu przez usunięcie tych i tym podobnych usterek uzyskalibyśmy naprawdę doskonałą książkę.

S. Zubrzycki