wmptm 1897

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



Mieczysław Biernacki

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

J. KRZYŻ (Lublin)

Mieczysław Biernacki

30. III. 1891 - 21. XI. 1959

W dniu 21 listopada 1959 r. zmarł w Lublinie wybitny matematyk, znakomity znawca teorii funkcji analitycznych, profesor Mieczysław Biernacki. Urodzony w tymże mieście 30 marca 1891 r., jako syn Zofii z Weysflogów i dra Mieczysława Biernackiego, popularnego na Lubelszczyźnie lekarza, muzykologa, postępowego publicysty i działacza — po ukończeniu w roku 1909 średniej szkoły filologicznej im. Stanisława Staszica w Lublinie, gdzie przeżył czynnie burzliwe wypadki związane ze strajkiem szkolnym, rozpoczął studia chemiczne na wydziale filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Jednakże w roku 1911 przerwał je w następstwie represji, na jakie się naraził uczestnicząc w tzw. „Zimmermaniadzie", głośnej swego czasu akcji protestacyjnej młodzieży postępowej przeciwko międzywydziałowym wykładom ks. Zimmermana, kolidującym swą treścią z laickim charakterem państwowych uczelni wyższych.

W momencie wybuchu pierwszej wojny światowej był M. Biernacki na studiach w Paryżu. Wstąpił ochotniczo do armii francuskiej w stopniu szeregowca. Walczył długie lata, był dwukrotnie ranny, zagazowany. Do kraju powrócił z Armią Hallera, ale po pewnym czasie znów zjawił się w Paryżu, by uzyskać w roku 1923 licencjat nauk matematycznych na Sorbonie, a w roku 1928 stopień doktora (docteur ès sciences mathématiques) na podstawie dysertacji pt. *Sur les équations algébriques contenant des paramétres arbitraires* [5].

Wkrótce potem powrócił do Polski i przez rok pracował jako asystent na Uniwersytecie Wileńskim, po czym w roku 1929 został powołany na profesora nadzwyczajnego matematyki na Uniwersytecie Poznańskim. Tamże w roku 1937 zostaje profesorem zwyczajnym. Lata wojny i okupacji spędził w Lublinie, udzielając lekcji matematyki. Po wyzwoleniu Lubelszczyzny wziął czynny udział w organizowaniu Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie, kreowanego przez Polski Komitet Wyzwolenia Narodowego 23. X. 1944 roku. Uniwersytetowi temu pozostał wierny do końca. W roku 1946 został wybrany członkiem korespon-

dentem Polskiej Akademii Umiejętności, a w roku 1949 objął obowiązki pracownika Państwowego Instytutu Matematycznego w grupie funkcji analitycznych. W uznaniu zasług naukowych i obywatelskich został M. Biernacki odznaczony między innymi Krzyżem Komandorskim Polonia Restituta, Krzyżem Oficerskim Legii Honorowej francuskiej, państwową nagrodą naukową II stopnia. Niespodziewana śmierć na skutek zapalenia płuc, po przebytym uprzednio zapaleniu woreczka żółciowego, zaskoczyła go w pełni sił twórczych.

Mieczysław Biernacki był człowiekiem o niezwykłej skromności i niezłomnym poczuciu obowiązku. Wkładał wiele serca w swą działalność dydaktyczną. Do jego uczniów z okresu poznańskiego zaliczają się między innymi matematycy: Z. Butlewski, W. Jankowski, J. Mikusiński, L. Włodarski. Na uniwersytecie lubelskim uczniami jego między innymi byli C. Ryll-Nardzewski, F. Jakóbczyk, W. Janowski, Z. Lewandowski, H. Pidek-Łopuszańska, K. Radziszewski, a także i autor niniejszego artykułu.

Zainteresowania naukowe Mieczysława Biernackiego były rozległe i różnorodne. Obok funkcji analitycznych, głównego przedmiotu jego badań, któremu poświęcił przeszło połowę swoich publikacji naukowych, zajmował się on również teorią wielomianów zwykłych i trygonometrycznych, a zwłaszcza rozmieszczeniem ich miejsc zerowych, teorią równań różniczkowych i innymi działami analizy matematycznej. Ogłosił także kilka prac z geometrii i jest autorem jedynego polskiego uniwersyteckiego podręcznika geometrii różniczkowej [69], [70]. Niemożliwe byłoby omówienie w krótkim artykule całego bogactwa wyników naukowych uzyskanych przez M. Biernackiego. Ograniczę się więc do omówienia pewnych tylko wybranych prac, co siłą rzeczy nada temu szkicowi piętno moich osobistych upodobań. Starałem się jednak uwzględnić wyniki najczęściej cytowane i te, które stały się dla innych matematyków bodźcem do dalszych badań.

Zacznę od funkcji analitycznych.

Jednym z centralnych tematów badań współczesnej teorii funkcji analitycznych jest teoria funkcji jednokrotnych i p-krotnych. Każda funkcja analityczna $w = f(z)$, o pochodnej różnej od zera w punkcie z_0, jest jednokrotna w kole $\{z: |z-z_0| < \varrho\} = K(z_0, \varrho)$ o dostatecznie małym promieniu ϱ i ma w tym kole rozwinięcie postaci

$$f(z) = A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \ldots, \quad z \in K(z_0, \varrho),$$

które można zawsze, przez odpowiednie przekształcenia liniowe zmiennych w i z, doprowadzić do postaci normalnej

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, \quad z \in K(0, 1). \tag{1}$$

Badanie lokalnych własności funkcji holomorficznych w otoczeniu punktów, gdzie nie zeruje się pochodna sprowadza się do badania funkcji jednokrotnych o rozwinięciu (1), czyli tzw. funkcji klasy (S). Podobnie, jeśli pochodna funkcji holomorficznej ma w punkcie z_0 miejsce zerowe rzędu $p-1$ $(p \geqslant 2)$, wówczas możemy sprowadzić badanie lokalnych własności tej funkcji do badania odpowiednich własności pewnej funkcji p-krotnej w kole jednostkowym mającej rozwinięcie postaci

$$F(z) = z^p + A_{p+1}z^{p+1} + \ldots, \qquad z \in K(0,1), \tag{2}$$

czyli tzw. funkcji klasy (S_p).

Teoria funkcji jednokrotnych i p-krotnych zajmuje poczesne miejsce w twórczości naukowej Mieczysława Biernackiego. W pracy [28] z roku 1936 dowodzi on dla funkcji $F(z)$ klasy (S_p) następującego związku pomiędzy średnią całkową rzędu $\lambda > 0$ a maksimum modułu $M(r,F) = \max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |F(re^{i\theta})|$ (będącego uogólnieniem wcześniejszego wyniku H. Prawitza, dotyczącego przypadku $p = 1$):

$$I_\lambda(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^\lambda d\theta \leqslant p\lambda \int_0^r \frac{[M(\varrho,F)]^\lambda}{\varrho} d\varrho.$$

Nierówność ta oraz znalezione rok wcześniej przez panią M. Cartwright oszacowanie $M(r,F)$ dla funkcji klasy (S_p), jak również znana zależność pomiędzy współczynnikami taylorowskimi i średnią całkową, posłużyły M. Biernackiemu do oceny współczynników:

$$|A_n| \leqslant C(p)n^{2p-1},$$

gdzie $C(p)$ jest stałą zależną jedynie od p. Można przyjąć, że $C(p) = \frac{p}{2p-1}\exp(8\pi p+1)$ i jakkolwiek oszacowanie przy takiej wartości $C(p)$ nie jest najlepsze (zresztą nawet dla $p = 1$ nie jest jeszcze znana dokładna, najmniejsza wartość stałej $C(p)$), to jednak rząd wielkości został już tu podany dokładnie. Wynik ten był cytowany wielokrotnie [1].

Problem znalezienia dokładnych oszacowań w klasie (S_p) dla modułu funkcji, jej pochodnej i jej współczynników taylorowskich nasunął się matematykom w sposób naturalny jeszcze w latach pierwszej wojny światowej. Pierwsze wyniki w tym kierunku uzyskali dopiero pani M. Cartwright w roku 1935 i M. Biernacki w roku 1936 ([28]). Były to wyniki nieostre, dające jedynie rząd wielkości. Pełne rozwiązanie problemu, przynajmniej co do oszacowania modułu funkcji i jej pochodnej, stało

---

[1] Np. w monografii W. K. Haymana, *Multivalent Functions*, Cambridge 1958, str. 42, 50.

się możliwe dzięki wprowadzonemu przez M. Biernackiego w roku 1946 ([35]) pojęciu funkcji średnio p-krotnej.

Załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w kole $K(0,1)$ i $n(w) \geqslant 0$ oznacza liczbę rozwiązań równania $w = f(z)$ zawartych w tym kole. Jeżeli dla pewnego ustalonego $p > 0$ i dla każdego $R > 0$ spełniona jest nierówność

$$\int_0^{2\pi} n(Re^{i\Phi})\,d\Phi \leqslant 2\pi p,$$

to funkcję $f(z)$ nazywamy *średnio p-krotną* w kole $K(0,1)$, przy czym p może nie być liczbą całkowitą. Funkcje średnio p-krotne mają pewną bardzo cenną własność. Jeżeli mianowicie funkcja $f(z)$ jest średnio p-krotna, to funkcja $[f(z)]^a$, o ile jest holomorficzna, musi być funkcją średnio ap-krotną. W szczególności, jeżeli funkcja średnio p-krotna ma w kole $K(0,1)$ rozwinięcie postaci (2) (z założenia holomorficzności $F(z)$ wynika, że p musi być wówczas liczbą całkowitą dodatnią), to powiemy, że $F(z)$ należy do klasy (B_p). O ile więc $F(z) \in (B_p)$, to $[F(z)]^{1/p} \in (B_1)$ przy odpowiednim doborze gałęzi pierwiastka.

Dzięki tej własności, której pozbawione są funkcje klasy (S_p) (przyjąwszy, że $(S_1) = (S)$), rozmaite problemy ekstremalne w klasach (B_p) znajdują swoje odpowiedniki w klasie (B_1). Oczywiście każda z klas (B_p) jest obszerniejsza od odpowiedniej klasy (S_p). Jednocześnie wiele faktów przemawiało za tym, że niektóre przynajmniej funkcje ekstremalne w klasie (B_p) są już funkcjami p-krotnymi, a więc nasuwało się przypuszczenie, że ostateczne rozwiązanie wielu problemów ekstremalnych dla klasy (S_p) może być sprowadzone do rozwiązania analogicznego problemu w klasie (B_1). Jednakże w owym czasie (rok 1946) brak jeszcze było narzędzi, które by pozwoliły na przeprowadzenie do końca tego, zakreślonego przez M. Biernackiego, programu badań. Dopiero metoda symetryzacji kołowej, którą wprowadził G. Pólya w roku 1950, umożliwiła matematykowi angielskiemu, W. K. Haymanowi, pełniejsze wyzyskanie własności funkcji średnio p-krotnych i rozwiązanie całego szeregu zagadnień ekstremalnych dla klas (S_p) i (B_p). W szczególności, funkcje średnio jednokrotne, klasy (B_1), mają takie same, jak w klasie (S) oszacowanie od góry i od dołu modułu funkcji, modułu pochodnej od góry, a także modułu drugiego i trzeciego współczynnika taylorowskiego.

Warto wspomnieć, że konsekwentne wykorzystanie własności funkcji średnio jednokrotnych doprowadziło W. K. Haymana do udowodnienia tzw. asymptotycznej hipotezy Bieberbacha:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|a_n|}{n}\right) \leqslant 1$$

w przypadku funkcji $f(z)$ klasy (B_1).

Nic więc dziwnego, że w nowoczesnych monografiach z teorii funkcji jednokrotnych całe rozdziały poświęca się funkcjom średnio p-krotnym Biernackiego ([2]).

W roku 1942 matematyk amerykański D. C. Spencer wprowadził klasę funkcji tzw. *polowo p-krotnych*, określonych następującym warunkiem: istnieje $p > 0$ takie, że dla każdego $R > 0$ zachodzi nierówność

$$\iint_{K(0,R)} n(Re^{i\Phi}) R\,dR\,d\Phi \leqslant p\pi R^2.$$

Funkcje polowo jednokrotne o rozwinięciu (1) stanowią klasę jeszcze obszerniejszą niż (B_1), lecz np. nierówność $|a_3| \leqslant 3$ nie zawsze już ma dla nich miejsce. M. Biernackiemu udało się przenieść na funkcje spencerowskie twierdzenie Bieberbacha o polu niepokrytym ([35]).

Uogólniając klasyczny wynik Koebego-Bieberbacha, M. Biernacki wykazał, że wartości każdej funkcji klasy (S_p) pokrywają koło $K(0, \frac{1}{4})$; jak widać na przykładzie funkcji $\varphi(z) = z^p/(1+z^p)^2$, $\varphi(z) \in (S_p)$, liczby $\frac{1}{4}$ nie można już zastąpić przez liczbę mniejszą.

M. Biernacki zajmował się również bardzo trudnym zagadnieniem wzrostu wartości bezwzględnej współczynników funkcji klasy (S). W pracy [78] znalazł on oszacowanie następujące:

$$||a_{n+1}| - |a_n|| \leqslant A(\log n)^{3/2}\ ([3]).$$

W tomie „Prac Matematyczno-Fizycznych" z roku 1936, poświęconym pamięci Leona Lichtensteina znajduje się bardzo ciekawa praca M. Biernackiego [27], w której wprowadza on i bada tzw. klasę (L) funkcji liniowo-osiągalnych, odwzorowujących konforemnie koło $K(0,1)$ na obszar, którego dopełnienie jest sumą mnogościową półprostych domkniętych, z których żadne dwie nie przecinają się w punkcie wewnętrznym względem obu tych półprostych. Zakładamy ponadto, że funkcja $f(z)$, należąca do klasy (L), ma rozwinięcie postaci (1). Wówczas (L) stanowi pewną podklasę klasy (S). W pracy tej, za pomocą metod wariacyjnych zostały znalezione między innymi obszary $\{w : w = z/f(z)\}$, $\{w: w = zf'(z)/f(z)\}$ przy ustalonym $z \in K(0,1)$ i funkcji $f(z)$ przebiegającej całą klasę (L), co umożliwiło znalezienie dokładnych oszacowań argumentów wyrażeń $z/f(z)$, $zf'(z)/f(z)$ dla funkcji klasy (L).

([2]) Np. rozdział 8.6 w monografii J. A. Jenkinsa, *Univalent Functions and Conformal Mapping*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958, lub rozdział V w cytowanej poprzednio monografii W. K. Haymana.

([3]) W. K. Hayman w swym odczycie wygłoszonym na sympozjum w Princeton wysoko ocenia ten wynik: „This result, although probably not best possible, represents a very strong advance on what was known previously and is our only tool available so far for tackling the general problem".

Jeden z uczniów M. Biernackiego, Zdzisław Lewandowski wykazał([4]), że badana ostatnio przez licznych autorów klasa funkcji prawie wypukłych, wprowadzona w roku 1952 przez W. Kaplana na zupełnie innej zasadzie, jest identyczna z klasą (L). Wedle Kaplana funkcja $g(z)$ jest prawie wypukła, jeżeli ma w kole $K(0,1)$ rozwinięcie postaci (1) i jeżeli istnieje funkcja $\Phi(z)$ odwzorowująca koło $K(0,1)$ na obszar wypukły, taka, że $\mathrm{Re}\{g'(z)/\Phi'(z)\} > 0$. Klasa (L) obejmuje między innymi następujące rodziny funkcji klasy (S): funkcje gwiaździste, funkcje wypukłe w pewnym kierunku (badane przez M. S. Robertsona) i funkcje z pochodną o dodatniej części rzeczywistej ([5]).

Na dwa tygodnie przed swą śmiercią M. Biernacki oddał do druku w Biuletynie PAN pracę, w której wykazał oryginalnie zastosowaną metodą wariacyjną, że gdy funkcja $f(z)$ należy do klasy (S), to funkcja $F(z)$ określona wzorem:

$$F(z) = \int_0^z f(\zeta)\zeta^{-1}d\zeta$$

również należy do tej klasy.

Wiele ciekawych wyników([6]) uzyskanych przez M. Biernackiego wiąże się z pojęciem funkcji podporządkowanych. Mówimy, że funkcja $f(z)$ holomorficzna w kole $K(0,1)$ jest w tym kole *podporządkowana funkcji jednokrotnej* $F(z)$ (zapisujemy to w formie $f(z) \prec F(z)$), jeżeli w punkcie $z = 0$ obie funkcje przyjmują tę samą wartość, a jednocześnie każda wartość funkcji $f(z)$ jest zarazem pewną wartością funkcji $F(z)$, co jest równoważne istnieniu takiej funkcji $\varphi(z)$ holomorficznej w kole $K(0,1)$, że $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(z)| < 1$ i $f(z) \equiv F\big(\varphi(z)\big)$. M. Biernacki wykazał, ([25], [26]), że jeżeli $f(z) \prec F(z)$, $f(z) \not\equiv F(z)$, $f(0) = F(0) = 0$ i $\arg f'(0) = \arg F'(0)$, to $|f(z)| < |F(z)|$ $(z \neq 0)$, w kole $K(0, r_0)$, gdzie $r_0 \geqslant 0{,}25$, oraz $|f'(z)| < |F'(z)|$ w kole $K(0, r_1)$, gdzie $r_1 \geqslant 0{,}12$.

Przy dodatkowym założeniu jednokrotności funkcji $f(z)$ znalazł M. Biernacki maksymalną dla całej klasy funkcji jednokrotnych wartość 0,390... stałej r_0, która jest pierwiastkiem równania

$$\log\frac{1+r}{1-r} + 2\operatorname{arctg} r = \frac{\pi}{2}.$$

([4]) Wynik ten referowany był na II Konferencji Funkcji Analitycznych (por. sprawozdanie z tej konferencji w Coll. Math. 7 (1959), str. 145) i ukaże się drukiem w Annales Univ. M. Curie-Skłodowska.

([5]) Później od Kaplana i w nieco odmienny sposób określili raz jeszcze klasę funkcji prawie wypukłych T. Umezawa i I. E. Bazilewicz, lecz jak widać bezsporny priorytet wyodrębnienia tej klasy przysługuje M. Biernackiemu.

([6]) Por. np. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Moskwa-Leningrad 1952, str. 404 i dalsze.

Przy dodatkowym założeniu gwiaździstości lub wypukłości obszarów $f(K(0,1))$ i $F(K(0,1))$, można r_0 zastąpić przez liczby większe: $r^* = \sqrt{2}-1$, $r_c = 0{,}543\ldots$ (r_c jest pierwiastkiem równania $\arcsin r + 2\operatorname{arc\,tg} r = \frac{1}{2}\pi$) i nie dające się już powiększyć ([7]). Z funkcjami podporządkowanymi wiąże się również praca [36], w której autor dał nowy dowód twierdzenia Littlewooda-Rogosińskiego: *jeżeli funkcje* $f(z)$ *i* $F(z)$ *są regularne w kole* $K(0,1)$ *i* $f(0) = F(0) = 0$, $f(z) \prec F(z)$, *to przy dowolnym* $\lambda > 0$, *mamy*

$$J(r,f) \leqslant J_\lambda(r,F)$$

dla każdego r *z przedziału* $(0,1)$.

W roku 1938, na prośbę P. Montela, który był jego nauczycielem i z którym łączyły go więzy długoletniej przyjaźni, napisał M. Biernacki monografię [30], zawierającą zestawienie ważniejszych wyników teorii funkcji wielokrotnych, uzyskanych do tego czasu.

W pracy [32] M. Biernacki uzupełnił w następujący sposób małe twierdzenie Picarda: *jeśli szereg Taylora funkcji całkowitej ma luki tak duże, że szereg odwrotności wykładników potęgowych występujących w rozwinięciu jest zbieżny, to funkcja całkowita przyjmuje każdą wartość nieskończenie wiele razy.* Dowód jest przy tym stosunkowo prosty i czysto algebraiczny.

Wiele prac M. Biernackiego poświęconych jest klasycznej teorii wielomianów. W drugiej swej publikacji ([2]) z roku 1923 podał on twierdzenie: *wielomian* $1+z^p+az^q$ $(p<q)$ *ma zawsze* p *miejsc zerowych w kole* $K\left(0, [q/(q-p)]^{1/p}\right)$. Jest to uogólnienie twierdzenia Landaua dotyczącego przypadku $p=1$. Wynik ten uogólnił jeszcze M. Biernacki wykazując, że *jeśli* $p < q_1 < q_2 < \ldots < q_k$, *to wielomian* $1+z^p+a_1z^{q_1}+a_2z^{q_2}+\ldots+a_kz^{q_k}$ *ma* p *miejsc zerowych w kole* $\left\{z: |z| < \sqrt[p]{\frac{q_1}{q_1-p} \ldots \frac{q_k}{q_k-p}}\right\}$ ([2], [5]). Ponadto dowiódł ([5]), że *jeśli* z_0 *jest miejscem zerowym o najmniejszym module wielomianu* $1+a_1z+\ldots+a_nz^n$, *to wielomian* $W(z) = z^p(1+a_1z+\ldots+a_nz^n)$ *jest funkcją* p*-krotną w kole* $\{z: |z| < p|z_0|/(n+p)\}$, *lecz nie musi być funkcją* p*-krotną w kole większym.*

Nawiązując do prac Sergescu, zajmował się M. Biernacki ([20]) określeniem położenia miejsc zerowych wielomianów trzeciego stopnia przy założeniu, że jeden ze współczynników jest większy co do wartości bezwzględnej od każdego z pozostałych.

Szczególnie interesujący jest wynik, będący poniekąd odwróceniem twierdzenia Gaussa-Lucasa, które mówi, że każdy obszar wypukły, za-

---

([7]) Niektóre z tych wyników zostały później ulepszone przez G. M. Gołuzina, Shah Tao Shing i innych.

wierający wszystkie miejsca zerowe wielomianu, zawiera również wszystkie miejsca zerowe jego pochodnej. Mianowicie dowiódł on ([74]), że *jeżeli wszystkie miejsca zerowe wielomianu* $W(z)$ *leżą wraz z punktem* a *w pewnym zbiorze wypukłym* D, *to wszystkie miejsca zerowe wielomianu* $\Phi(z) = \int_a^z W(\zeta)d\zeta$ *leżą w obszarze domkniętym, ograniczonym krzywą* Γ' *powstałą przez jednokładność o środku* a *i stosunku równym* 2 *z krzywej* Γ_1, *jaką zakreśla rzut punktu* a *na prostą podpierającą zbiór* D. W szczególności, jeżeli zbiór D jest odcinkiem o końcach b, c, to wszystkie miejsca zerowe wielomianu $\Phi(z)$ leżą w obszarze, będącym sumą mnogościową dwóch kół o środkach b, c, stycznych zewnętrznie w punkcie a.

Jeśli D jest kołem $K(a, R)$, to wszystkie miejsca zerowe wielomianu $\Phi(z)$ są zawarte w kole $K(a, 2R)$. Jeżeli stopień wielomianu $W(z)$ jest parzysty, to można nawet zmniejszyć promień tego koła do wartości $2R\cos(\pi/2(n+1))$.

Wyniki te są w pewnym sensie definitywne, co potwierdzają odpowiednie kontrprzykłady.

Jak wiadomo, wielomian o współczynnikach rzeczywistych, mający jedynie rzeczywiste miejsca zerowe, nie może mieć minimów lokalnych dodatnich, ani też maksimów lokalnych ujemnych. Jednocześnie wielomian taki można uważać za iloczyn funkcji harmonicznych jednej zmiennej. W pracy [82] M. Biernacki wykazał, że analogiczną własność mają funkcje wielu zmiennych, dające się przedstawić w postaci iloczynu skończonej ilości czynników, z których każdy jest funkcją harmoniczną i podał szereg zastosowań tego twierdzenia.

Równaniom różniczkowym poświęcił Mieczysław Biernacki około dziesięciu publikacji, lecz i to wystarczyło, by utrwalić jego nazwisko w tej dziedzinie analizy matematycznej. Jeszcze przed opublikowaniem w roku 1933 pierwszej jego pracy z tego zakresu ([19]) wiadomo było, że przy odpowiednich założeniach co do funkcji $A(t)$, rozwiązania równania różniczkowego

$$x''(t) + A(t)x(t) = 0 \tag{3}$$

wykazują pewne analogie z funkcjami sinus i cosinus, np. oscylują, jeśli $A(t)$ jest funkcją dodatnią, monotoniczną, nie dążącą zbyt szybko do zera przy $t \to +\infty$.

W pracy [19] M. Biernacki znajduje dalsze analogie tego rodzaju.

Jeśli $A(t) > 0$ *i* $A'(t) > 0$ *dla* $t > t_0$ *oraz* $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ *są kolejnymi miejscami zerowymi całki równania* (3), *to*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = 1. \tag{4}$$

Jeśli $z_n \in (t_n, t_{n+1})$ *są miejscami zerowymi pochodnej* $x'(t)$, *to, po odrzuceniu pewnych stosownie obranych przedziałów „wyjątkowych"* (t_{m_i}, t_{m_i+1}) *o łącznej długości skończonej,*

$$\lim \frac{z_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{1}{2},$$

gdy n *dąży do nieskończoności omijając wartości „wyjątkowe"* m_i. Przypuszczenie M. Biernackiego, że przedziałów wyjątkowych nie da się z wypowiedzi twierdzenia usunąć, okazało się potem słuszne (8).

W pracy [23] zajmuje się M. Biernacki równaniem różniczkowym $y' = f(x, y)$ i bada wyczerpująco zachowanie się w nieskończoności całek tego równania przy założeniu, że $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(y)$ dla $x \to +\infty$.

Zajmował się on również równaniami dwumiennymi postaci:

$$x^{(n)}(t) + A(t)x(t) = 0. \tag{5}$$

W przypadkach $n = 4$ i $n = 5$, jeśli funkcja $A(t)$ jest rosnąca i ciągła oraz $0 \leqslant A(t) \leqslant M$, to odległości pomiędzy kolejnymi miejscami zerowymi dowolnej całki niebanalnej równania (5) nie przekraczają $M^{-1/4}$ $(n = 4)$ lub $(2+\sqrt{3})M^{-1/5}$ $(n = 5)$, z pominięciem co najwyżej $n-2$ przedziałów wyjątkowych. Twierdzenie to stanowi wzmocnienie w przypadkach $n = 4$ i 5 oszacowania podanego przez Sturma. Z teorią równań różniczkowych związana jest praca [48]. Autor przenosi w niej dobrze znane dla równań różniczkowych postaci (3) twierdzenie o oscylowaniu rozwiązań (gdy $0 < m \leqslant A(t)$), twierdzenie porównawcze Sturma i inne, na rozwiązania równań różnicowych liniowych drugiego rzędu. W pracy [59] przedstawia M. Biernacki wyniki zbliżone do tych, które uzyskał w teorii równania (3), ale odnoszące się tym razem do równania rzędu czwartego

$$y^{(4)} + A(x)y = 0. \tag{5'}$$

Jeśli np. $A(x) > 0$ jest funkcją niemalejącą, klasy $C^{(1)}$ dla $x > x_0$, to równanie (5') posiada zawsze całkę dążącą do zera przy $x \to +\infty$. Jeżeli $A(x) \to +\infty$ przy $x \to +\infty$, to całka dążąca do zera spełnia warunek

$$\lim y(x)[A(x)]^{1/8-\varepsilon} = 0,$$

gdy $x \to +\infty$ omijając pewne przedziały wyjątkowe (o końcach będących kolejnymi zerami funkcji $y(x)$), których łączna długość jest skończona.

Inne bardzo ciekawe prace M. Biernackiego z zakresu równań różniczkowych wydają mi się zbyt skomplikowane, by je omawiać na tym

(8) Odpowiedni przykład skonstruował A. Bielecki.

miejscu. Pomijam również szereg wartościowych wyników, bardzo różnorodnych, dotyczących takich zagadnień ogólnej teorii rachunku różniczkowego i całkowego, jak uogólnione twierdzenie o średniej, nierówności zachodzące pomiędzy pewnymi wyrażeniami całkowymi i tym podobne.

Z kilku prac Mieczysława Biernackiego poświęconych geometrii, szczególnie interesująca wydaje mi się praca [47]. Przypuśćmy, że E oznacza jakieś kontinuum zawarte w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Niech V będzie kresem górnym krzywizny okręgów mających po trzy punkty wspólne z kontinuum E, a W — kresem górnym krzywizny sfer przecinających to kontinuum w czterech punktach. Skończoność tych kresów, dowodzi M. Biernacki, nakłada silne ograniczenie na strukturę kontinuum E; np. z tego, że kres V jest skończony wynika, że zbiór E jest prostowalną krzywą Jordana bez punktów wielokrotnych, posiadającą ciągłą styczną.

Na pograniczu geometrii i teorii wielomianów stoi praca [57]. Autor wykazuje w niej, że *jeśli* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *są punktami przestrzeni trójwymiarowej, a punkt* M *przebiega kontinuum ograniczone* E, *to*

$$\prod_{i=1}^{n} \max_{E} MA_i / \max_{E} \prod_{i=1}^{n} MA_i \leqslant [8(1+\sqrt{2})]^n.$$

Jeżeli punkty A_i leżą na płaszczyźnie, to można stąd otrzymać oszacowanie od dołu na maksimum modułu wielomianu na zbiorze E.

Z długoletnich wykładów geometrii różniczkowej powstał dwutomowy podręcznik tego przedmiotu ([69], [70]), napisany przez M. Biernackiego z myślą o studentach ale zawierający dużo materiału nie spotykanego w tego typu książkach. Wartość dzieła podnoszą liczne, częstokroć oryginalne zadania. Podręcznik ten jest trwałym dowodem talentu pedagogicznego autora, podobnie jak litografowane wykłady geometrii analitycznej, będące dziś rzadkością bibliograficzną.

Chociaż to krótkie omówienie bogatego dorobku Mieczysława Biernackiego nie jest ani kompletne, ani wyczerpujące, to cel mój będzie osiągnięty, jeżeli na podstawie tego skromnego szkicu czytelnik wyrobi sobie niejaki pogląd na wielostronność zainteresowań i klasycznych już osiągnięć tego wielkiego uczonego, którego prace oddziałały wybitnie pobudzająco na wielu matematyków, przynależnych do paru już pokoleń i do różnych narodowości. Śmiałe i wysoce oryginalne idee zawarte w zwięzłych, lakonicznych notach M. Biernackiego długo jeszcze zapewne będą stanowić podnietę i zachętę dla matematyków pasjonujących się trudnymi zagadnieniami analizy klasycznej.

Spis prac Mieczysława Biernackiego

[1] *Sur le déplacement des zéros des fonctions entières par leur dérivation*, C. R. Acad. Sci. Paris 175 (1922), str. 18-20.

[2] *Sur un nouveau théorème d'Algèbre*, C. R. Acad. Sci. Paris 177 (1923), str. 1193-1195.

[3] *Sur un théorème de M. Denjoy*, C.R. Acad. Sci. Paris 182 (1926), str. 916-918.

[4] *Sur le déplacement des zéros des fonctions entières par leur dérivation*, C. R. Acad. Sci. Paris 184 (1927), str. 1530-1533.

[5] *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires*, Bull. Internat. Acad. Polon. Sci. Lettr., cl. Mat. Nat., Serie A, (1927), str. 541-685.

[6] *Sur les droites de Julia des fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris 186 (1928), str. 1260-1262.

[7] *Sur les droites de Julia des fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris 186 (1928), str. 1410-1412.

[8] *Sur les suites des fonctions holomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris 186 (1928), str. 1799-1801.

[9] *Sur les fonctions entières à série lacunaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 187 (1928), str. 477-479.

[10] *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), str. 21-23.

[11] *Sur la théorie des fonctions entières*, Bull. Internat. Acad. Sci. Lettr., cl. Mat. Nat., Serie A, (1929), str. 529-590.

[12] *Remarque sur un théorème de M. Carleman*, Mathematica, Cluj, 1 (1929), str. 125-127.

[13] *Sur l'allure de la représentation conforme dans le voisinage d'un point exceptionnel*, Bull. Soc. Sci., Cluj, 5 (1931), str. 1-9.

[14] *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes*, Acta Math. 56 (1930), str. 197-204.

[15] *Sur les zéros des fonctions holomorphes*, Mathematica, Cluj, 6 (1932), str. 31-35.

[16] *Sur une propriété des séries doubles*, Ann. Soc. Polon. Math. 10 (1931), str. 12-14.

[17] *Sur une limitation du module de la dérivée des fonctions holomorphes*, Ann. Soc. Polon. Math. 10 (1931), str. 15-20.

[18] *Sur le théoreme de Rolle*, Bull. Math. Phys. Pures Appl., Bucarest 2 (1931-1932), No. 3, Fasc. 6, str. 1-7.

[19] *Sur l'équation différentielle* $x''+A(t)x=0$, Prace Mat.-Fiz. 40 (1933), str. 163-171.

[20] *Sur l'équation du troisième degré*, Mathematica, Cluj, 8 (1933), str. 196-200.

[21] *O odwzorowaniu konforemnym*, Pamiętnik XIV Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich w Poznaniu, 1933, str. 205-207.

[22] *O własnościach asymptotycznych całek równań różniczkowych liniowych*, Pamiętnik XIV Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich w Poznaniu, 1933, str. 207-210.

[23] *Sur les valeurs asymptotiques des intégrales des équations différentielles*, Ann. Soc. Polon. Math. 13 (1934), str. 93-99.

[24] *Deux remarques au sujet d'un théorème de M. Rogosiński*, Mathematica, Cluj, 10 (1934), str. 46-48.

[25] *Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes*, C. R. Acad. Sci. Paris 201 (1935), str. 256-258.

[26] *Sur les fonctions univalentes*, Mathematica, Cluj, 12 (1935), str. 49-64.

[27] *Sur la réprésentation conforme des domaines linéairement accessibles*, Prace Mat.-Fiz. 44 (1936), str. 293-314.

[28] *Sur les fonctions multivalentes d'ordre p*, C. R. Acad. Sci. Paris 203 (1936), str. 449-451.

[29] *Zagadnienia nierozwiązalne w dziejach matematyki*, Pamiętnik Lubelski 3 (1937), str. 1-9.

[30] *Les fonctions multivalentes*, Actualités Sci. Ind. 657 (1938), str. 1-66.

[31] *Sur la représentation conforme des domaines étoilés*, Mathematica, Cluj, 16 (1938), str. 44-49.

[32] *Sur les zéros des polynomes et sur les fonctions entières dont le développement taylorien présente des lacunes*, Bull. Sci. Math. 69 (1945), str. 197-203.

[33] *Sur les fonctions univalentes et k-symétriques*, Bull. Sci. Math. 69 (1945), str. 204-214.

[34] *Sur les domaines couverts par des fonctions multivalentes*, Bull. Sci. Math. 70 (1946), str. 45-51.

[35] *Sur les fonctions en moyenne multivalentes*, Bull. Sci. Math. 70 (1946), str. 51-76.

[36] *Sur les moyennes de module des fonctions holomorphes*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 1 (1946), str. 1-8.

[37] *Sur une proposition de Bieberbach-Eilenberg*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 1 (1946), str. 9-12.

[38] *Sur les valeurs moyennes des fonctions sousharmoniques*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 1 (1946), str. 13-17.

[39] *Sur une propriété des suites à termes positifs*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 1 (1946), str. 19-21.

[40] *Sur les fonctions lentement croissantes*, Bulletin Scientifique de l'école Polytechnique de Timisoara 12 (1946), str. 146-162.

[41] *Sur un problème d'interpolation relatif aux équations différentielles linéaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), str. 169-214.

[42] *Commentaire sur les fonctions localement univalentes ou multivalentes*, Selecta, cinquantenaire scientifique de M. Paul Montel, Paris 1947, Gauthier-Villars, str. 146-153.

[43] *Commentaire sur les modules des zéros des polynomes*, Selecta, cinquantenaire scientifique de M. Paul Montel, Paris 1947, Gauthier-Villars, str. 225-228.

[44] *Sur une inégalité entre les moyennes des dérivées logarithmiques*, Mathematica, Timisoara 23 (1947-1948), str. 54-59.

[45] *Sur les zéros des intégrales de l'équation* $x^{(5)}(t)+A(t)x(t)=0$, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), str. 26-37.

[46] *Problème P55*, Colloq. Math. 1 (1948), str. 333.

[47] *Sur les cercles et sur les sphères qui passent par 3 ou 4 points d'un continu*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 3 (1949), str. 85-102.

[48] *Sur l'équation* $\Delta^2 y/h^2+A(x)y=0$, Prace Mat.-Fiz. 47 (1949), str. 49-60.

[49] *Sur un théorème dans la théorie des équations différentielles*, Prace Mat.-Fiz. 47 (1949), str. 129-141.

[50] *Nowsze badania nad geometrią zer wielomianów*, Dodatek do Rocznika PTM 22 (1950), str. 8-16.

[51] *O funkcjach slabo p-listnych*, Dodatek do Rocznika PTM 22 (1950), str. 39.

[52] —, H. Pidek et C. Ryll-Nardzewski, *Sur une inégalité entre des intégrales définies*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 4 (1950), str. 1-4.

[53] *Sur le calcul des aires situées sur une sphère*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 4 (1950), str. 19-21.

[54] *Sur quelques applications de la formule de Parseval*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 4 (1950), str. 23-40.

[55] *Sur le 2 théorème de la moyenne et sur l'inégalité de Tschébycheff*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 4 (1950), str. 123-130.

[56] *Sur une inégalité entre les intégrales due à Tschébycheff*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 5 (1951), str. 23-29.

[57] *Sur quelques propriétés des fonctions de distances*, J. Math. Pures Appl. 31 (1952), str. 305-318.

[58] *Sur la dérivée logarithmique des intégrales des équations différentielles linéaires*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 6 (1952), str. 55-64.

[59] *Sur l'équation différentielle* $y^{(4)} + A(x)y = 0$, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 6 (1952), str. 65-78.

[60] *Sur une inégalité de F. Riesz et sur quelques inégalités analogues*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 6 (1952), str. 79-89.

[61] *Sur quelques applications de la formule de Parseval. II*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 7 (1953), str. 5-14.

[62] *Sur le nombre minimum des zéros des intégrales de l'équation* $y^{(n)} + A(x)y = 0$, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 7 (1953), str. 15-18.

[63] *Sur des inégalités remplies par des expressions dont les termes ont des signes alternés*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 7 (1953), str. 89-102.

[64] *Sur quelques propriétés des ovales*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 7 (1953), str. 103-112.

[65] *Sur un problème de M. Leja relatif à une fonction des distances entre des points*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 7 (1953), str. 113-120.

[66] *O równości wielokątów*, Matematyka 7 (1954), str. 4-6.

[67] *Sur les fonctions en aire multivalentes*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 8 (1954), str. 71-79.

[68] *Sur quelques propriétés des fonctions de distances. II*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 8 (1954), str. 81-88.

[69] *Geometria różniczkowa, część I*, Warszawa, PWN, 1954, Biblioteka Matematyczna, tom 5, str. 240.

[70] *Geometria różniczkowa, część II*, Warszawa, PWN, 1955, Biblioteka Matematyczna, tom 8, str. 247.

[71] *Sur les zéros des polynomes trigonométriques dont la suite des coefficients est monotone*, Ann. Polon. Math. 1 (1955), str. 380-387.

[72] (Rec.) *Franciszek Leja, Funkcje analityczne i harmoniczne*, Wiadomości Mat. 1 (1955), str. 143-145.

[73] *O pewnym szeregu potęgowym lakunarnym*, Prace Mat. 1 (1955), str. 264-271.

[74] *Sur les zéros des polynomes*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 9 (1955), str. 81-98.

[75] *Sur la caractéristique* $T(f)$ *des fonctions méromorphes dans un cercle*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 9 (1955), str. 99-125.

[76] *Sur les coefficientes de Taylor des fonctions univalentes* II, Ann. Univ. M.Curie-Skłodowska, Sect. A, 9 (1955), str. 127-133.

[77] — and J. Krzyż, *On the monotonity of certain functionals in the theory of analytic functions*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 9 (1955), str. 135-147.

[78] *Sur les coefficients tayloriens des fonctions univalentes*, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. 3, 4 (1956), str. 5-6.

[79] *Sur les polynomes dont tous les zéros sont réels*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 10 (1956), str. 61-75.

[80] *Sur les moyennes et les extréma des modules des fonctions analytiques*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 10 (1956), str. 127-136.

[81] *O niektórych zagadnieniach dotyczących wykładu geometrii analitycznej*, Wiadomości Mat. 1 (1956), str. 222-225.

[82] *Sur la position des extrêmes relatifs de certaines fonctions composées par des fonctions surharmoniques ou sousharmoniques*, Rend. Accad. Naz. dei Lincei, serie VIII, 24 (1958), str. 7-11.

[83] *Sur la convergence des intégrales*, Colloq. Math. 6 (1958), str. 247-249.

[84] *Sur le second théorème de la moyenne du calcul intégral*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sect. A, 12 (1958), str. 45-58.

[85] *Sur les travaux de la théorie de fonctions en Pologne*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, 251/1 (1958), str. 1-11.

[86] *Sur le théorème de Cauchy-Goursat*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie sci. math., astr., phys. 8 (1960), No 1, str. 25-28.

[87] *Sur l'intégrale des fonctions univalentes*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie sci. math., astr., phys., 8 (1960), No 1, str. 29-34.