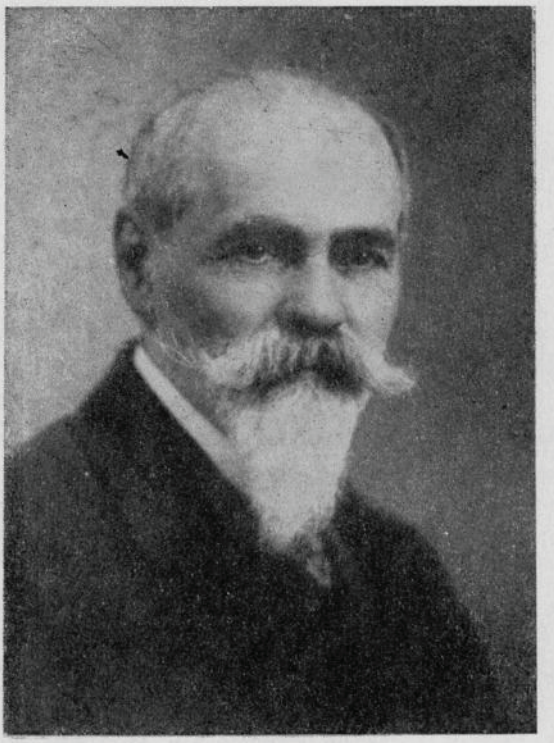
wmptm 1897

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



Stanisław Zaremba

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

J. SZARSKI (Kraków)

Stanisław Zaremba

(1863-1942)

Stanisław Zaremba urodził się dnia 3 października 1863 w Romanówce. Po ukończeniu w roku 1881 szkoły realnej w Petersburgu rozpoczął studia techniczne w Petersburskim Instytucie Technologicznym. Już od wczesnej młodości Stanisław Zaremba interesował się żywo problemami fizyki matematycznej, toteż po uzyskaniu w roku 1886 dyplomu inżyniera technologa wyjeżdża do Paryża na studia matematyki. Tu, w roku 1889 na Sorbonie uzyskał stopień doktora nauk matematycznych. W latach 1892-1900 pełnił funkcje profesora matematyki kolejno w liceach francuskich w Digne, Nîmes i Cahors. W roku 1900 został Zaremba powołany na stanowisko profesora nadzwyczajnego matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie, a w roku 1905 otrzymał nominację na profesora zwyczajnego. W Krakowie rozwija Stanisław Zaremba swą bogatą działalność naukową i pedagogiczną stając się jednym z pionierów nowoczesnej matematyki w Polsce. W roku akademickim 1914/1915 pełnił funkcje dziekana Wydziału Filozoficznego U. J. W roku 1903 został wybrany na członka korespondenta Polskiej Akademii Umiejętności w Krakowie, a w roku 1926 został członkiem czynnym tej Akademii. Również Rosyjska Akademia Nauk w Leningradzie wybrała Zarembę w roku 1925 na swego członka korespondenta. Był on także członkiem wielu towarzystw naukowych w kraju i za granicą. W roku 1930 Uniwersytet Jagielloński nadał Stanisławowi Zarembie najwyższą godność doktora honoris causa. Otrzymał on również doktorat honorowy Uniwersytetu w Caen w roku 1932 oraz Uniwersytetu Poznańskiego w roku 1934. Po przejściu na emeryturę w roku 1935 Stanisław Zaremba zostaje mianowany profesorem honorowym U. J. i rozwija w dalszym ciągu żywą działalność naukową, której kres położyła śmierć w roku 1942.

Stanisław Zaremba dokonywał swych wspaniałych odkryć naukowych w bardzo trudnych warunkach. Był to okres, gdy Polska pozostawała w niewoli pod rządami zaborców, a nieliczni matematycy polscy, wśród nich Zaremba, pracowali w odosobnieniu. Zaremba, który we

Francji przebywał w środowisku znakomitych matematyków i znalazł tam doskonałe warunki pracy, wiedziony głębokim patriotyzmem, zdecydował się powrócić do Polski i objąć katedrę na Uniwersytecie Jagiellońskim. Na tej najstarszej polskiej uczelni, do której garnęła się młodzież polska ze wszystkich zaborów, rozwija Zaremba swoją działalność naukową i pedagogiczną, przyczyniając się w wysokim stopniu do rozwoju naukowego młodych matematyków, którzy później stali się wybitnymi specjalistami w różnych gałęziach matematyki.

Stanisław Zaremba potrafił za pomocą prostych i nieoczekiwanych pomysłów rozwiązywać trudne problemy, z którymi nie mogli się uporać inni badacze. Ze wspomnianych pomysłów rodziły się nowe metody i powstawały nowe kierunki badań. Źródłem tych cech charakterystycznych twórczości Zaremby były umiejętność filozoficznego spojrzenia na naturę problemu, intuicja fizyczna oraz głęboka erudycja, dzięki której Zaremba był w stanie wykrywać analogie między pozornie odległymi zagadnieniami. Dla Zaremby matematyka nie była celem samym w sobie. Tematyka jego prac badawczych świadczy dobitnie o głębokim przekonaniu, że ostatecznym celem matematyki są zastosowania w naukach przyrodniczych. Mimo to Stanisław Zaremba doceniał olbrzymie znaczenie tzw. czystej matematyki, widząc w niej źródło nowych narzędzi i metod teoretycznych w badaniach matematycznych. Najlepiej świadczy o tym fakt, że kiedy z początkiem bieżącego stulecia powstały w Polsce dwie nowoczesne szkoły matematyczne w Warszawie i we Lwowie, Zaremba interesował się żywo badaniami w tych ośrodkach. O tym, jak wysoko cenione były w Polsce osiągnięcia naukowe Zaremby, mówi dobitnie następujący wyjątek z przemówienia, które na uroczystości nadania Zarembie doktoratu honorowego U. J. wygłosił przedstawiciel szkoły warszawskiej Stanisław Saks: „*...Ale mogę — możemy my wszyscy — wyrazić swój podziw dla wyników Twej twórczości, wyrazić wdzięczność za to, że jeden z najpiękniejszych rozdziałów Analizy — któreś przeorał pługiem Swej wiedzy i Swego talentu — uczyniłeś bardziej jasnym i bardziej dostępnym. Boć to, co właściwością jest niemal wszystkich odkryć naukowych wyróżniało i Twoje, Panie, prace: ścisłość i ogólność synonimem w nich były prostoty i jasności.*

Jesteś, Panie, zresztą nie tylko Naszym Nauczycielem. Byłeś jednocześnie organizatorem Nauki Polskiej."

Obok wytężonej pracy naukowej rozwijał Zaremba owocną i szeroką działalność pedagogiczną. Wykłady uniwersyteckie Zaremby odznaczały się głębokim ujęciem traktowanych zagadnień i niezwykłą ścisłością. Właściwy mu styl wykładów, polegający na operowaniu długimi i na pozór zawiłymi okresami zdaniowymi, których żelazna konsekwencja logiczna uderzała dopiero po bliższej analizie, odstraszał nierzadko studentów. Jednakowoż właśnie ta ścisłość wykładów oraz wdrażanie stu-

dentów do dyscypliny logicznej stały się podstawową i wielką zasługą pedagogiczną Zaremby w okresie, kiedy powstawała nowoczesna matematyka polska. Podobnie jak wykłady, ćwiczenia prowadzone przez Stanisława Zarembę były wzorem doskonałej szkoły matematycznej. Tematy ćwiczeń były zawsze trafnie dobrane, pouczające, choć często niezbyt łatwe. Opracowanie ich wymagało od studenta wiele wysiłku i samodzielności myślenia. Wszelkie niedociągnięcia w wypracowaniach studentów krytykował Zaremba bez ogródek, ale zawsze życzliwie. Przy egzaminach był bardzo wymagający, zgodnie ze swym przekonaniem, że tylko gruntowne i ścisłe opanowanie przedmiotu zasługuje na pozytywną ocenę. O żywym zainteresowaniu Zaremby młodzieżą studiującą świadczy najlepiej fakt, że był on przez długie lata kuratorem Kółka Matematycznego Uczniów U.J. W uznaniu zasług na tym polu został mu nadany tytuł członka honorowego tej organizacji.

Młodych pracowników nauki otaczał Zaremba życzliwą opieką, służył im chętnie wskazówkami, radą i pomocą. Czytając z właściwą sobie wnikliwością rękopisy prac uczniów i opatrując je swymi głębokimi uwagami, wywierał często wpływ na tok ich badań. Uważał on, że młodzi, rokujący nadzieję matematycy powinni wyjeżdżać do ośrodków naukowych za granicą dla pogłębienia swych studiów i nawiązania osobistych kontaktów z przedstawicielami matematyki światowej. W okresie działalności Zaremby warszawska szkoła teorii mnogości i topologii oraz lwowska szkoła analizy funkcjonalnej przeżywały okres żywiołowego rozwoju. Tymczasem reprezentowana przez niego ważna dziedzina fizyki matematycznej zdobywała sobie dopiero młodych adeptów w Polsce. Konieczność rozległych i gruntownych studiów wstępnych stwarzała dodatkowe trudności w szkoleniu młodej kadry w zakresie fizyki matematycznej. Sam Zaremba wyniósł olbrzymie korzyści ze swych studiów za granicą, a w szczególności we Francji. Widział on więc w wyjazdach zagranicznych skuteczny środek szkolenia. Słuszność tego stanowiska, które było w pełni uzasadnione w ówczesnej sytuacji, potwierdza także dzisiejsza praktyka wysyłania młodych matematyków za granicę, obok szkolenia ich w kraju. Stworzenie przez Zarembę fundamentów pod rozwój tzw. klasycznych dyscyplin matematyki w Polsce było możliwe między innymi dzięki utrzymywaniu łączności z problematyką badań światowych w dziedzinie analizy.

Na wstępie omówienia twórczości i zasług naukowych Stanisława Zaremby wypada zacytować jego własne słowa, którymi poprzedził autoreferat swych prac naukowych. Słowa te najlepiej charakteryzują kierunek badań, którym poświęcił się Zaremba, a równocześnie wyjaśniają właściwy mu sposób ujmowania i rozwiązywania problemów matematycznych. Oto wypowiedź Zaremby: *„Już od młodości pociągały mnie problemy analizy występujące we fizyce matematycznej. Otóż fakt ten, oraz*

moje głębokie przekonanie, że badania w zakresie analizy matematycznej osiągają pełną wartość naukową jedynie wtedy, gdy są zupełnie ścisłe, wyznaczyły charakter mojej twórczości naukowej."

Głównym przedmiotem badań Stanisława Zaremby były więc równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego wszystkich trzech typów, które — jak wiadomo — stanowią podstawowe narzędzie matematyczne fizyki i techniki. Na terenie równań cząstkowych rzędu drugiego był Zaremba nie tylko pionierem w skali krajowej, lecz również w wielu wypadkach wyznaczał nowe kierunki badań i zainteresowań w skali światowej. Niezwykła inwencja twórcza oraz zdolność uchwycenia istoty problemu pozwoliły Zarembie wprowadzić do analizy niejeden przełomowy pomysł, dzięki któremu zostały usunięte podstawowe trudności w problemach teorii równań cząstkowych.

Wysoce znamienną jest opinia Henryka Lebesgue'a, który wyraził się, że Stanisław Zaremba nie ogłosił żadnej pracy niepotrzebnie. Istotnie, wśród prac Zaremby, z których wiele ma podstawowe znaczenie w matematyce, nie ma pozycji o charakterze przyczynkowym.

Już pierwsza praca naukowa Stanisława Zaremby, stanowiąca jego tezę doktorską, ogłoszona w roku 1889 pod tytułem *Sur un problème concernant l'état calorifique d'un corps homogène indéfini*, zwróciła uwagę na młodego Polaka. W roku 1858 Paryska Akademia Nauk ogłosiła konkurs na rozwiązanie problemu dotyczącego stanu cieplnego nieograniczonego ośrodka jednorodnego. W roku 1861 Riemann przedstawił Akademii wyniki swych badań nad tym problemem. Rozprawa Riemanna nie została jednak nagrodzona, gdyż zawierała tylko szkicowane dowody, które nie miały dostatecznej siły przekonywającej. Otóż w swej rozprawie doktorskiej Zaremba pokazał, że uwadze Riemanna uszły pewne klasy rozwiązań problemu oraz podał ścisłe dowody dla przypadków rozpatrywanych przez Riemanna.

W roku 1890 ogłasza Zaremba krótką pracę pt. *Note concernant l'intégration d'une équation aux dérivées partielles* (Annales de L'Ecole Normale, 3$^{\text{ième}}$ Série, 7, mai 1890, str. 135-142). Praca ta dotyczyła pewnego problemu postawionego przez Darboux w czasie jednego z wykładów.

Podaje w niej Zaremba uogólnienie oraz ścisły dowód wzoru wprowadzonego bez dowodu przez Riemanna. Wzór ten pozwala w pewnych wypadkach sprowadzić całkowanie równania cząstkowego do całkowania odpowiedniego równania różniczkowego zwyczajnego oraz do kwadratur.

W pracy *Sur le problème de Dirichlet* (Annales de l'Ecole Normale, 3$^{\text{ième}}$ Série, 14, juillet 1897, str. 251-258) wyprowadzone zostały własności funkcji Greena w przestrzeni trójwymiarowej, które pozwoliły

Analyse des principaux travaux scientifiques de Stanisław Zaremba, professeur à l'Université de Cracovie.

Pour ne pas allonger outre mesure cette notice, j'ai dû faire un choix des travaux qui seuls y seront pris en considération. En particulier, j'ai laissé entièrement de côté les quelques livres d'enseignement que j'ai publié en langue polonaise ainsi que les articles de polémique. J'ajoute que je me suis dispensé de citer mes notes insérées dans les C. R. des Séances de l'Ac. des Sciences de Paris pour aucune d'elles a été développée dans un mémoire détaillé qu'il suffisait, m'a-t-il semblé, d'annoncer.

Dès ma jeunesse je me suis senti particulièrement attiré par les problèmes d'Analyse

Pierwsza strona autoreferatu S. Zaremby o swej pracy naukowej

wykazać, że funkcja dana wzorem

$$u = \int_S \frac{\partial G}{\partial n} \sigma ds$$

jest rozwiązaniem problemu Dirichleta z ciągłym obłożeniem σ, oraz zbadać własności funkcji u, gdy obłożenie σ ma punkty nieciągłości.

Praca *Sur la méthode des approximations successives de M. Picard* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5ième Série, 3, fasc. 3, 1897, str. 311-329) poświęcona jest rozwiązaniu problemu Dirichleta dla równania

$$\Delta u = f\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

za pomocą metody kolejnych przybliżeń.

Pod wpływem pewnych idei, pochodzących od Poincarégo, rozwija Stanisław Zaremba w całej serii prac swój prosty i piękny pomysł, który okazał się przełomowym w teorii równań eliptycznych. Pomysł ten pozwolił mu rozwiązać wiele problemów wówczas jeszcze otwartych lub rozstrzygniętych tylko w szczególnych przypadkach. Pomysł Zaremby polegał na następującej uwadze. Niech będzie dane równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \xi u = 0 \tag{1}$$

oraz obszar ograniczony D o brzegu dostatecznie regularnym. Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej α, różnej od wielokrotności liczby 2π, istnieje liczba dodatnia M_α taka, że przy każdej wartości parametru ξ spełniającej warunki

$$\arg \xi = \alpha, \qquad |\xi| > M_\alpha$$

problem Dirichleta i problem Neumanna dla równania (1) w obszarze D da się rozwiązać metodą średnich arytmetycznych Neumanna przy pomocy uogólnionego potencjału warstwy podwójnej względnie pojedynczej. Przez potencjały uogólnione, wprowadzone przez Zarembę, rozumie się tu potencjały, które powstają z potencjałów newtonowskich przez zastąpienie funkcji $1/r$ funkcją $e^{-\mu r}/r$, gdzie μ jest pierwiastkiem równania $\mu^2 + \xi = 0$, posiadającym część rzeczywistą dodatnią.

W pracy *Sur l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u + \xi u + f = 0$ *et sur les fonctions harmoniques* (Annales de l'Ecole Normale, 3ième Série, 16, octobre 1899, str. 427-464) wykorzystuje Zaremba swój pomysł rozważając równanie

$$\Delta u + \xi u + f = 0 \tag{2}$$

z warunkiem brzegowym na brzegu S obszaru D

$$\frac{\partial u}{\partial n} = hu, \tag{3}$$

gdzie h jest stałą nieujemną, a $\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza pochodną w kierunku normalnej wewnętrznej. Dla problemu jednorodnego (2), (3) (tzn. dla przypadku, gdy $f = 0$) wykazał Zaremba istnienie ciągu wartości własnych oraz odpowiadającego mu ortonormalnego ciągu funkcji własnych U_k. Ponadto Zaremba udowodnił, że jeśli wartość parametru ξ nie jest wartością własną, to problem (2), (3) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wreszcie pokazał, że każda funkcja spełniająca warunek brzegowy (3) rozwija się na szereg Fouriera według funkcji własnych U_k. Wyniki powyższe przeczuwał Poincaré, lecz dopiero Zaremba uzyskał je po raz pierwszy w ścisłej postaci.

Praca *Sur le developpement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5ième Série, 6, fasc. 1, 1900, str. 47-72) zawiera analogiczne wyniki — uzyskane zresztą wcześniej — dotyczące problemu, w którym warunek brzegowy (3) zastąpiono warunkiem $u = 0$.

W pracy *Contribution à la théorie de l'équation aux dérivées partielles* $\Delta v + \xi v = 0$ (Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 2ième Série, 3, str. 5-21) podane są warunki wystarczające na to, by pochodne wszystkich rzędów rozwiązania problemu Dirichleta dla równania

$$\Delta v + \xi v = 0$$

w pewnym obszarze D były ciągłe w domknięciu tego obszaru.

Praca *Sur l'intégration de l'équation* $\Delta u + \xi u = 0$ (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5ième Série, 8, fasc. 1, 1902, str. 59-117), której recenzję ogłosił w *Bulletin des Sciences Mathématiques* H. Poincaré, dotyczy następującego problemu: Niech D oznacza obszar ograniczony w przestrzeni, D' jego dopełnienie, a S wspólny brzeg obszarów D i D'. Niech n będzie wersorem normalnej do S, skierowanej do wnętrza obszaru D. Dla dowolnej funkcji $u(X)$, gdzie $X = (x, y, z)$, oraz dowolnego punktu $X_0 \in S$ przyjmijmy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \lim_{t \to 0+} \frac{u(X_0 + nt) - u(X_0)}{t},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = \lim_{\to 0-} \frac{u(X_0 + nt) - u(X_0)}{t}.$$

Oznaczmy wreszcie dla dowolnej funkcji $v(X)$ i $X_0 \in S$

$$(v)_i = \lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in D}} v(X), \qquad (v)_e = \lim_{\substack{X \to X_0 \\ X \in D'}} v(X).$$

Problem polega na znalezieniu dla równania

$$\Delta w + \xi w = 0$$

dwóch rozwiązań u i v takich, by u było uogólnionym potencjałem warstwy pojedynczej, a v uogólnionym potencjałem warstwy podwójnej, oraz by

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i\right] + 2\varphi,$$

$$(v)_i - (v)_e = \lambda[(v)_i + (v)_e] + 2\varphi,$$

gdzie λ jest parametrem, a φ funkcją daną na S. Jak pokazał Zaremba, problem powyższy ma przy bardzo ogólnych warunkach regularności rozwiązanie analityczne względem parametru λ. Rozwiązanie to ma co najwyżej jeden punkt istotnie osobliwy w nieskończoności oraz pojedyncze bieguny w punktach, które należą do pewnego ciągu liczb rzeczywistych, niezależnego od funkcji φ. Wyniki te pozwoliły Zarembie uzasadnić metodę Neumanna przy słabych założeniach regularności.

W pracy *Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée des polygones curvilignes* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5ième Série, 10, fasc. 4, 1904, str. 395-444) rozpatrywany jest analogiczny problem na płaszczyźnie z tym, że nie zakłada się tu ciągłości normalnej n.

Praca *Solution générale du problème de Fourier* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, février 1905, str. 69-168) podaje rozwiązanie problemu Fouriera ogólniejsze od wszystkich znanych w tym czasie.

W pracy *Contribution à la théorie d'une équation fonctionnelle de la physique* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 19, 1905) udowodnione zostało między innymi twierdzenie, z którego wynika — jak pokazał W. Wilkosz [1] — następujący wniosek: funkcja ciągła (bez żadnych dodatkowych założeń regularności) w pewnym obszarze i spełniająca w nim równanie Laplace'a jest w tym obszarze analityczna.

Praca *Sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, avril 1909, str. 561-564) zawiera twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania problemu Dirichleta przy pewnych nieciągłościach wartości brzegowych. Był to pierwszy wynik tego typu.

---

[1] W. Wilkosz, *Sur un point fondamental de la théorie du potentiel*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 173, février 1922.

W pracy *Sopra un teorema d'unicità relativo alla equazione delle onde sferiche* (R. C. della R. Accademia dei Lincei, 2 maggio, 1915, str. 904-908) stosuje Zaremba po raz pierwszy pewien sposób oceny całki z sumy kwadratów pierwszych pochodnych rozwiązania równania fali sferycznej. Pomysł ten wykorzystali później K. Friedrichs i H. Lewy w celu uzyskania znanych dziś dobrze nierówności całkowych dla rozwiązań ogólnego równania hiperbolicznego. Nierówności te, uogólnione następnie przez Schaudera, odegrały ważną rolę w rozwoju teorii równań hiperbolicznych.

Praca *Sur un théorème fondamental relatif à l'équation de Fourier* (Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens tenu à Strasbourg en 1920) dotyczy ogólnego twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania problemu Fouriera.

Stanisław Zaremba interesował się również problemami numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych. Tak np. w pracy *Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, février 1909, str. 125-195) podaje pewną metodę numeryczną rozwiązywania problemu Dirichleta, polegającą na obliczaniu stosownych całek rozciągniętych na obszar, w którym szukane jest rozwiązanie.

Praca *Le problème biharmonique restreint* (Annales de l'Ecole Normale, 26, août 1909, str. 337-404) stanowi rozwinięcie noty, przedstawionej Paryskiej Akademii Nauk, która wyróżniła ją jako *extrêmement honorable*. W pracy tej rozważa Zaremba następujący problem, nazwany problemem biharmonicznym w znaczeniu węższym. W danym obszarze ograniczonym D szukane jest rozwiązanie równania biharmonicznego

$$\Delta^2 w = 0,$$

spełniające następujące warunki brzegowe. Wartości brzegowe rozwiązania oraz jego pierwszych pochodnych mają być równe wartościom brzegowym danej funkcji φ oraz jej pierwszych pochodnych. Zakłada się przy tym, że: 1° funkcja φ jest klasy C^1 w domknięciu obszaru D, 2° funkcja ψ określona wzorem

$$\psi = \Delta\varphi \tag{4}$$

(która może być nieciągła a nawet nieograniczona) jest całkowalna z kwadratem w D i potencjał objętościowy o gęstości ψ jest klasy C^1 w domknięciu obszaru D. Zaremba dowodzi, że wyżej sformułowany problem sprowadza się do problemu wyznaczenia funkcji v harmonicznej i całkowalnej z kwadratem w D oraz mającej tę własność, że dla każdej funkcji h harmonicznej i całkowalnej z kwadratem w D zachodzi równość

$$\int_D \psi h \, d\tau = \int_D v h \, d\tau.$$

Powyższy problem ma, jak wykazał Zaremba, dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnie zadanej funkcji ψ całkowalnej z kwadratem, niekoniecznie spełniającej związek (4). Zaremba wykazuje w końcu, że rozpatrywany problem biharmoniczny jest równoważny wyznaczeniu minimum stosownej całki rozciągniętej na obszar D i podaje pewną metodę numeryczną rozwiązywania problemu.

W cyklu prac: *Sur le principe du minimum* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, juillet 1909, str. 197-264), *Sur le principe de Dirichlet* (Acta Mathematica, 34, 1911, str. 293-316) oraz *Sur un problème toujours possible, comprenant à titre de cas particuliers, le problème de Dirichlet et celui de Neumann* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4, fasc. 2, 1927, str. 127-163) rozwija Zaremba piękny pomysł polegający na tym, że problem Dirichleta można zastąpić innym problemem (P'), który jest zawsze rozwiązalny i który redukuje się do problemu Dirichleta w przypadku, gdy problem ten ma rozwiązanie w danym obszarze. Problem (P') okazał się szczególnym przypadkiem pewnego problemu (P), sformułowanego przez Zarembę w następujący sposób. Niech w obszarze D będzie dane pole wektorowe $\boldsymbol{V}$, którego kwadrat jest całkowalny w D. Szukana jest funkcja v harmoniczna w obszarze D taka, że kwadrat jej gradientu jest całkowalny w D oraz dla każdej funkcji h spełniającej ostatni warunek zachodzi równość

$$\int_D (\boldsymbol{V} - \operatorname{grad} v)\cdot(\operatorname{grad} h)\, d\tau = 0.$$

Zaremba dowodzi, że problem (P) jest zawsze rozwiązalny dla dowolnego obszaru D. Jeżeli w szczególności dane pole wektorowe $\boldsymbol{V}$ jest gradientem funkcji φ, oraz problem Dirichleta z obłożeniem φ na brzegu obszaru D ma rozwiązanie, wówczas rozwiązanie problemu (P) (który w tym przypadku redukuje się do problemu (P')) stanowi rozwiązanie wspomnianego problemu Dirichleta z dokładnością do stałej addytywnej. Jeżeli natomiast $\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0$, to przy dość ogólnych założeniach regularności brzegu obszaru D problem (P) jest równoważny problemowi Neumanna.

Stanisław Zaremba interesował się żywo problemami przyrodniczymi i fizycznymi. Zainteresowania te znalazły swój wyraz w publikacjach poświęconych bezpośrednio tym problemom.

Profesor mineralogii na Uniwersytecie Jagiellońskim S. Kreutz zwrócił się do Stanisława Zaremby w sprawie wyjaśnienia pewnych wątpliwości dotyczących podstaw krystalografii geometrycznej. W czasie dyskusji i badań na ten temat profesorowie doszli do wniosku, że nieporozumienia występujące w wielu pracach z zakresu krystalografii, wynikały z braku równoważności różnych hipotez, przyjmowanych przez poszczególnych autorów przy budowie podstaw krystalografii geometrycznej. Stwierdzenie tego faktu było dla Zaremby i Kreutza punktem

wyjścia do przeprowadzenia podziału hipotez krystalograficznych na klasy obejmujące hipotezy równoważne. Następnym krokiem była konfrontacja hipotez, należących do poszczególnych klas, z faktami obserwowanymi w przyrodzie. Okazało się, że żadna ze znanych hipotez krystalograficznych nie tłumaczyła pewnej tezy opartej na eksperymentach, której słuszność została uznana przez wszystkich mineralogów. To spostrzeżenie doprowadziło Zarembę do stwierdzenia, że każda z hipotez krystalograficznych daje się zmodyfikować w ten sposób, by implikowała wyżej wspomnianą tezę. Wyniki tych badań, które pozwoliły między innymi sformułować ścisłą definicję systemu krystalograficznego, zostały opublikowane przez Zarembę i Kreutza w książce *Sur les fondements de la cristallographie géométrique* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, numer dodatkowy, 1917, str. 473). W książce tej Zaremba umieścił również notę o grupach Bravais'a i grupach krystalograficznych.

Zainteresowania dla problemów fizyki skłoniły Zarembę do napisania pracy *La théorie de la relativité et les faits observés* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1, fasc. 2, 1922, str. 105-139). W rozprawie tej poddaje on krytyce ówczesny sposób formułowania podstaw teorii względności jako niewystarczający. Dziś, zwłaszcza wobec nowoczesnej, nawiązującej jaśniej do eksperymentu, definicji metryki w czasoprzestrzeni relatywistycznej, obiekcje Zaremby przestały być aktualne. Jednakże w owym czasie, poprzedzającym ugruntowanie odnośnych pojęć, krytyczne uwagi były wysuwane z wielu stron. Było to uzasadnione potrzebą wyjaśnienia skomplikowanej pojęciowo sytuacji występującej u podstaw teorii względności. Zresztą Zaremba sam podkreślał, że celem jego pracy nie było bynajmniej obalenie teorii względności, jako że nic nie wskazywało na to, by wysunięte przez niego trudności nie dały się przezwyciężyć.

Dwie prace: *Sur un groupe de transformations qui se présente en électrodynamique* (Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 5, 1926, str. 3-19) oraz *Sur le changement du système de référence pour un champ électromagnétique déterminé* (Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 6, 1927, str. 8-49), poświęcone są badaniom nad zależnością od układu odniesienia sił w polu elektromagnetycznym. Problem sprowadza się do wyznaczenia pewnej grupy transformacji. Dla wyznaczenia tej grupy wyprowadza Zaremba stosowny układ równań różniczkowych cząstkowych, dla którego znajduje następnie ogólne rozwiązanie.

Wśród prac Zaremby, które wiążą się ściśle z fizyką, wymienić należy jeszcze prace: *Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, juillet 1903, str. 381-403), dotyczącą teorii tarcia wewnętrznego, *Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les con-*

sidérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, juin 1903, str. 404-422) odnoszącą się do problemu podwójnego załamania światła w cieczach, oraz *Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1903, str. 595-614), w której Zaremba zajmuje się teorią relaksacji.

Działalność naukowa Stanisława Zaremby objęła również logikę. *„Głębokie przekonanie, że w naukach metematycznych należy dążyć do maksimum precyzji i ścisłości skłoniło mnie do zajęcia się logiką"* pisze Zaremba o sobie. W rozprawie *La logique des mathématiques* (Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. 15) przedstawia Zaremba w sposób jasny i prosty te działy logiki matematycznej, które jego zdaniem stanowiły nieodzowne przygotowanie do studiów w różnych dziedzinach nauki. Wykorzystując pewne idee pochodzące od Poincaré'go podaje również wyjaśnienie kilku paradoksów logicznych.

Omówione tu najważniejsze prace Stanisława Zaremby stanowią tylko część bogatego dorobku naukowego, obejmującego ponad 100 publikacji.

Na zakończenie omówienia działalności naukowej Stanisława Zaremby wypada zacytować fragmenty z listów nadesłanych przez dwóch czołowych matematyków francuskich z okazji nadania Zarembie doktoratu honorowego U.J.

Oto wyjątek z listu Lebesgue'a: *„Aktywność naukowa Zaremby zaważyła na tak wielu terenach badań, że nazwisko jego nie może być obce nikomu, kto się interesuje matematyką. Wydaje mi się jednak, że przede wszystkim ci będą mogli ocenić w pełni potęgę kreowanych przezeń metod i swobodę jego fantazji twórczej, którzy zajmowali się specjalnie równaniami fizyki matematycznej. Tam okazał swój styl, tam imię jego zapisało się na zawsze"*.

Hadamard natomiast pisał o Zarembie: *„Jakże nie wspomnieć o ideach, które tchnął w dziedzinę badań należącą do terenów, którym nauka francuska poświęciła najwięcej wysiłków. Głębokie, pochodzące odeń uogólnienie przekształciło niedawno podstawy teorii potencjału i stało się natychmiast punktem wyjścia do badań młodych matematyków szkoły francuskiej. Uogólnienie to, w stopniu naprawdę nieoczekiwanym w tej dziedzinie, posiada znamię tej prostoty i elegancji, które cechują idee trafnie i głęboko ujmujące istotę rzeczy"*.

Osobny rozdział twórczości Stanisława Zaremby stanowią jego podręczniki: *Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych* (Kraków, 1907, stron 166), *Teoria wyznaczników i równań liniowych* (Kraków, 1909, stron 134), *Arytmetyka teoretyczna* (Kraków, 1912, stron 859), *Wstęp do analizy, cz. I* (Warszawa, 1915, stron 124), *Wstęp do analizy, cz. II* (Warszawa, 1918, stron 287), *Zarys mechaniki teoretycznej, tom I* (Kraków, 1933, stron 310) oraz *Zarys mechaniki teoretycznej tom II* (Kraków, 1939, stron 219).

O tym, jaką wagę przypisywał Zaremba podręcznikom pisanym w języku polskim, mówi najlepiej następujący fragment przedmowy do *Teorii wyznaczników*: „*Moim zdaniem chodzi przede wszystkim o to, żeby nasza młodzież mogła pobierać ogólne wykształcenie z książek napisanych w języku ojczystym, albowiem nabycie tego ogólnego wykształcenia, od jakości którego zależy wynik wszystkich dalszych studiów, połączone jest z największymi trudnościami i dlatego należy przede wszystkim to pierwsze stadium studiów, o ile możności, młodzieży ułatwić, dostarczając jej podręczników napisanych w języku najlepiej jej znanym, w języku ojczystym*".

Lektura podręczników Zaremby nie jest łatwa z podobnych powodów jak wykłady Zaremby nie były łatwe do śledzenia. Podręczniki te stanowiły jednak twardą szkołę ścisłości i precyzji matematycznej i wywarły głęboki wpływ na młodych naukowców, przyczyniając się w znacznym stopniu do rozwoju nowoczesnej matematyki polskiej.

Podręcznik *Arytmetyki teoretycznej* wyraźnie wskazuje na głębokie zrozumienie potrzeb przyszłego nauczyciela szkoły średniej. Świadczy o tym np. fakt, że wprowadzenie definicji iloczynu liczb wymiernych poprzedza Zaremba wskazaniem powodów natury geometrycznej, dla których przyjmuje się taką a nie inną definicję.

Zarys mechaniki teoretycznej Zaremby, ujmujący mechanikę w sposób aksjomatyczny, jest właściwie nie podręcznikiem lecz głębokim traktatem, w którym autor, w sposób niezwykle ścisły i precyzyjny, nadaje postać matematyczną pojęciom i faktom zaczerpniętym z doświadczenia. Zaremba uwidocznił i wyjaśnił gruntownie pewne niejasno sformułowane, a nierzadko milcząco przyjmowane postulaty mechaniki. Widać to już np. w podanym przez Zarembę, niezwykle skrupulatnym sformułowaniu pierwszej i drugiej zasady mechaniki newtonowskiej. Frapujące jest ujęcie zasady równoległoboku przy dodawaniu sił, którą Zaremba wyprowadza z pewnych prostych postulatów w oparciu o dobrze znane fakty eksperymentalne. Wypada również podkreślić, że Zaremba wprowadził ścisłe pojęcie tzw. siły nieskoncentrowanej, które jest nieodzowne przy formułowaniu podstaw mechaniki ośrodków ciągłych. Tego rodzaju dzieło mogło wyjść tylko spod pióra uczonego obdarzonego tak głębokim spojrzeniem filozoficznym na stosunek matematyki do przyrody, jakie posiadał Stanisław Zaremba. Trzeci tom *Mechaniki* Zaremby znajduje się w rękopisie i dotychczas nie został wydany.

Zasługi pedagogiczne Zaremby nie ograniczają się do wykładów i podręczników. Był on również współtwórcą reformy uniwersyteckich studiów matematyki i przyczynił się do wprowadzenia systemu magisterskiego.

Stanisław Zaremba brał udział w organizowaniu życia matematycznego w Polsce w najszerszym tego słowa znaczeniu. Był współzałożycielem Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz twórcą i długoletnim

redaktorem jego organu *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, który stał się wkrótce znanym i powszechnie cenionym w świecie matematycznym czasopismem.

Jedna z trzech nagród naukowych, przyznawanych dziś przez Polskie Towarzystwo Matematyczne, została nazwana imieniem Stanisława Zaremby.

Zaremba posiadał rozległe kontakty z matematykami zagranicznymi, których często gościł u siebie. Sam także wyjeżdżał za granicę, głównie do Francji. Również dzięki tym kontaktom przyczynił się Zaremba wydatnie do rozwoju matematyki polskiej i do postawienia jej na jej dzisiejszym poziomie.

W uznaniu wielkich zasług dla nauki polskiej otrzymał Zaremba wysokie odznaczenia państwowe: Krzyż Komandorski Orderu Odrodzenia Polski oraz Złoty Krzyż Zasługi. Był on również oficerem francuskiego orderu Legii Honorowej.

Stanisław Zaremba był człowiekiem bezkompromisowym i twardych zasad. Przekonany o słuszności jakiejś sprawy bronił jej otwarcie, a interesy matematyki były zawsze przewodnim motywem w jego postępowaniu. Jedną z cech jego niezłomnego charakteru był głęboki patriotyzm. W przededniu śmierci interesował się jeszcze żywo sytuacją wojenną, będąc przekonany o zwycięstwie sprawiedliwej sprawy i odrodzeniu Polski, a w niej polskiej matematyki, której rozwój został brutalnie zdeptany przez hitlerowskiego okupanta.

Przy opracowaniu niniejszego artykułu zostały wykorzystane między innymi materiały, udostępnione autorowi przez docenta M. Starka, oraz przemówienie prof. T. Ważewskiego, (Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego 21(1950), str. 8-20) wygłoszone na akademii poświęconej uczczeniu pamięci prof. Stanisława Zaremby.