ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

wmptm 1897

J. MIKUSIŃSKI (Katowice)

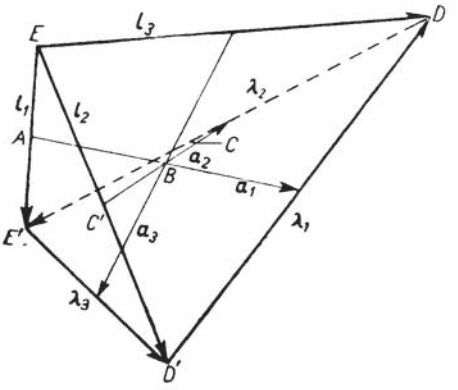
O czworościanie

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Dobrze znany jest z nauki w szkole średniej „wzór Herona", wyrażający pole trójkąta przez jego boki. Mniej znany jest analogiczny wzór dla czworościanu, wyrażający jego objętość przez długość krawędzi. Wiadomo, że nie da się na ogół z trzech dowolnych odcinków zbudować trójkąta. Aby to było możliwe, długości boków muszą spełniać „prawo trójkąta", tzn. suma dwóch dowolnych boków musi być większa od pozostałego boku. Jest to warunek konieczny i wystarczający. Jak wygląda analogiczny warunek dla czworościanu? — Odpowiemy w tym artykule.

Na początku wyprowadzimy wzór na objętość czworościanu. Istnieją na to różne sposoby. Tutaj wzór ten wyprowadzimy za pomocą rachunku wektorowego. Sposobu tego, który nie jest dłuższy od innych, autor nie spotkał w literaturze.

Krawędzie czworościanu oznaczamy tak, jak na załączonym rysunku, i traktujemy jako wektory. Wektory $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ wychodzą z wspólnego wierzchołka E, przeciwległe zaś im wektory $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3$ obiegają cyklicznie podstawę.



Wektor łączący środek $\boldsymbol{l}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ze środkiem $\boldsymbol{\lambda}_i$ oznaczamy przez $\boldsymbol{a}_i$.

Z rachunku wektorowego wiadomo, że objętość czworościanu wyraża się wzorem

$$V = \tfrac{1}{6}[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3],$$

gdzie $[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3]$ jest iloczynem mieszanym wektorów $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Stąd, na podstawie wzoru Gramma,

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}}, \tag{1}$$

gdzie jako elementy wyznacznika występują iloczyny skalarne.

Aby wyrazić a_1, a_2, a_3 przez krawędzie $l_1, l_2, l_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, posuwamy się wzdłuż łamanej $ABCDEABCE'A$, wykonując dodawanie odpowiednich wektorów. Ponieważ łamana jest zamknięta, suma jest równa zeru:

$$\tfrac{1}{2}a_1+\tfrac{1}{2}a_2-\tfrac{1}{2}\lambda_2-l_3+\tfrac{1}{2}l_1+\tfrac{1}{2}a_1+\tfrac{1}{2}a_2+\tfrac{1}{2}\lambda_2-\tfrac{1}{2}l_1=0,$$

czyli

$$a_1+a_2=l_3.$$

Podobnie, posuwając się wzdłuż łamanej $ABC'D'E'ABC'EA$, otrzymujemy równość

$$\tfrac{1}{2}a_1-\tfrac{1}{2}a_2+\tfrac{1}{2}l_2-\lambda_3-\tfrac{1}{2}l_1+\tfrac{1}{2}a_1-\tfrac{1}{2}a_2-\tfrac{1}{2}l_2+\tfrac{1}{2}l_1=0,$$

czyli

$$a_1-a_2=\lambda_3.$$

Ze względu na cykliczną symetrię wskaźników zachodzi

$$a_i+a_j=l_k, \qquad a_i-a_j=\lambda_k, \tag{2}$$

dla dowolnej permutacji i, j, k wskaźników $1, 2, 3$. Z (2) otrzymujemy przez wykonanie bardzo prostych rachunków algebraicznych wzory

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 4a_i\cdot a_j = l_k^2-\lambda_k^2, \\ A_{ii} &= 4a_i\cdot a_i = -l_i^2-\lambda_i^2+l_j^2+\lambda_j^2+l_k^2+\lambda_k^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Podstawiając te wartości w (1), otrzymujemy

$$V=\frac{1}{48}\sqrt{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}}; \tag{4}$$

w tym wyznaczniku uwolniliśmy się już od interpretacji wektorowej, gdyż w wyrażeniach na A_{ij} możemy iloczyny skalarne $\lambda_k^2, \ldots$ traktować po prostu jako kwadraty długości odpowiednich krawędzi.

Wzór (4) jest szukanym analogonem wzoru Herona.

Powodem, dla którego przy zadanych z góry dowolnych długościach $l_1, l_2, l_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ odpowiedni czworościan może w ogóle nie istnieć, jest okoliczność, że dla każdych 3 krawędzi, ograniczających ścianę czworościanu, musi być zachowane prawo trójkąta i analogiczne prawo musi być zachowane dla każdej trójki kątów płaskich tworzących naroże (tzn. suma dowolnych 2 kątów płaskich należących do wspólnego naroża musi być większa od trzeciego kąta, dopełniającego to naroże). Z drugiej strony, jeżeli są spełnione wszystkie 24 nierówności, wyrażające prawo trójkąta dla ścian i naroży, to zawsze można zbudować odpowiedni czworościan. Mamy w ten sposób warunek konieczny i wystarczający na to, by istniał czworościan o zadanych wartościach $l_1, l_2, l_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, wyrażony przez 24 nierówności między $l_1, \ldots$ (nierówności między kątami

można sprowadzić do nierówności między krawędziami za pomocą twierdzenia Carnota).

Udowodnimy, że także warunek złożony z dwóch nierówności

$$A_{11}A_{22}A_{33} > 0, \quad W > 0, \tag{5}$$

gdzie W oznacza wyznacznik pod pierwiastkiem we wzorze (4), jest konieczny i wystarczający dla istnienia czworościanu o zadanych długościach krawędzi.

Konieczność warunku jest oczywista wobec $A_{ii} = 4\boldsymbol{a}_i^2$ oraz wobec wzoru (4). Pozostaje więc udowodnić wystarczalność.

Jest widoczne, że czworościan jest określony w zupełności przez wektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, przy czym długości $|\boldsymbol{a}_1|, |\boldsymbol{a}_2|, |\boldsymbol{a}_3|$ tych wektorów mogą być dane zupełnie dowolnie, na kąty zaś między nimi nałożony jest jedyny warunek, by zachowały prawo trójkąta. Warunek ten możemy napisać w postaci 3 nierówności

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} > \alpha_{31}, \quad \alpha_{23} + \alpha_{31} > \alpha_{12}, \quad \alpha_{31} + \alpha_{12} > \alpha_{23}, \tag{6}$$

gdzie $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$ $(0 < \alpha_{ij} < \pi)$ oznaczają kąty między parami odpowiednich wektorów $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$; $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$; $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1$.

Na podstawie (3) mamy

$$|\boldsymbol{a}_i| = \tfrac{1}{2}\sqrt{A_{ii}}, \quad \cos\alpha_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sqrt{A_{ii}A_{jj}}}, \tag{7}$$

gdyż $A_{ij} = 4\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 4\sqrt{\boldsymbol{a}_i^2 \boldsymbol{a}_j^2}\cos\alpha_{ij} = \sqrt{A_{ii}A_{jj}}\cos\alpha_{ij}$.

Jeżeli są spełnione nierówności

$$A_{11} > 0, \quad A_{22} > 0, \quad A_{33} > 0, \tag{8}$$

$$|A_{12}| < \sqrt{A_{11}A_{22}}, \quad |A_{23}| < \sqrt{A_{22}A_{33}}, \quad |A_{31}| < \sqrt{A_{33}A_{11}}, \tag{9}$$

o wartości $|\boldsymbol{a}_1|, |\boldsymbol{a}_2|, |\boldsymbol{a}_3|, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$, obliczone na podstawie wzorów (7) wypadną rzeczywiste (i dodatnie). Jeżeli więc są spełnione równocześnie wszystkie nierówności (8) i (9) i oprócz tego nierówności (6), to zawsze da się skonstruować odpowiedni czworościan.

Dla udowodnienia wystarczalności warunku (5) wystarczy wykazać, że jeżeli nie jest spełniona choć jedna z nierówności (8), (9) lub (6), wówczas jest też fałszywa co najmniej jedna z nierówności (5).

Przypuśćmy najpierw, że $A_{11} \leqslant 0$; ponieważ na podstawie (3) jest $A_{11} + A_{22} = 2(\boldsymbol{l}_3^2 + \boldsymbol{\lambda}_3^2) > 0$ i $A_{11} + A_{33} = 2(\boldsymbol{l}_2^2 + \boldsymbol{\lambda}_2^2) > 0$, więc musi być $A_{22} > 0$, $A_{33} > 0$ i w konsekwencji $A_{11}A_{22}A_{33} \leqslant 0$. Do tej samej nierówności doszlibyśmy, zakładając $A_{22} \leqslant 0$ lub $A_{33} \leqslant 0$. Przypuśćmy teraz, że są spełnione nierówności (8), ale że jest np. $|A_{12}| \geqslant \sqrt{A_{11}A_{22}}$. W takim razie pisząc wyznacznik W w postaci rozwiniętej i uwzględniając, że

$A_{ij} = A_{ji}$, mamy

$$A_{ij} = A_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) - (A_{11}A_{23}^2 - 2A_{12}A_{23}A_{31} + A_{22}A_{31}^2)$$

i widzimy, że

$$|A_{ij}| \leqslant -(\sqrt{A_{11}}\,A_{23} \pm \sqrt{A_{22}}\,A_{31})^2 \leqslant 0.$$

Podobny rezultat otrzymujemy zakładając $|A_{23}| \geqslant \sqrt{A_{22}A_{33}}$ lub $|A_{31}| \geqslant \sqrt{A_{33}A_{11}}$.

Przyjmijmy wreszcie, że są spełnione nierówności (8) i (9), ale że jest np. $\alpha_{12} + \alpha_{23} \leqslant \alpha_{31}$. W takim razie $\cos(\alpha_{12} + \alpha_{23}) \geqslant \cos\alpha_{31}$, czyli

$$\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{23} - \sqrt{(1-\cos^2\alpha_{12})(1-\cos^2\alpha_{23})} \geqslant \cos\alpha_{31};$$

korzystając ze związków (7) możemy napisać

$$\frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}} \cdot \frac{A_{23}}{\sqrt{A_{22}A_{33}}} - \sqrt{\left(1 - \frac{A_{12}^2}{A_{11}A_{22}}\right)\left(1 - \frac{A_{23}^2}{A_{22}A_{33}}\right)} \geqslant \frac{A_{31}}{\sqrt{A_{33}A_{11}}}.$$

Stąd przez elementarne algebraiczne przekształcenie otrzymujemy

$$A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{23}A_{31} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{31}^2 - A_{33}A_{12}^2 \leqslant 0,$$

czyli $W \leqslant 0$. To samo otrzymalibyśmy, przyjmując $\alpha_{23} + \alpha_{31} \leqslant \alpha_{12}$ lub $\alpha_{31} + \alpha_{12} \leqslant \alpha_{23}$.

Wystarczalność warunku jest więc udowodniona.