ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

A. GOETZ (Wrocław)

Uwagi o definicji jednostajnej ciągłości w wykładzie analizy

W wielu wykładach analizy matematycznej jest stosowana ciągowa definicja ciągłości funkcji (definicja Heinego). Korzyści dydaktyczne płynące ze stosowania tej definicji polegają przede wszystkim na tym, że można w teorii funkcji zastąpić, tak przykre dla początkujących, rozważania „epsilon-deltowe" oparciem się na udowodnionych już twierdzeniach o ciągach. Warto też zwrócić uwagę, że nawet posługując się definicją Cauchy'ego musimy w dowodzie tego, że pewna konkretna funkcja nie jest ciągła w danym punkcie, wykazać w gruncie rzeczy, że spełnione jest zaprzeczenie ciągowego warunku ciągłości.

Gdy przechodzi się jednak do ciągłości jednostajnej, króluje już niepodzielnie definicja „epsilon-deltowa". Stosują ją nawet zwolennicy definicji Heinego. Tymczasem można wprowadzić definicję ciągową także i dla jednostajnej ciągłości. Ma ona wiele zalet definicji Heinego ciągłości w punkcie, w szczególności jest znacznie prostsza do zanegowania. Jest ona szczególnie wygodna w użyciu, gdy własności kontinuum liczbowego są wykorzystane pod postacią twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, podczas gdy do definicji zwykłej lepiej są dopasowane twierdzenia o pokryciach.

. Mówimy, że dwa ciągi $\{x'_n\}$ i $\{x''_n\}$ *zbliżają się nieograniczenie*, jeżeli $|x'_n - x''_n| \to 0$.

Modyfikując nieco definicję ciągłości Heinego możemy powiedzieć, że funkcja $y = f(x)$ jest *ciągła w zbiorze* Z, jeżeli dla każdej pary zbliżających się nieograniczenie ciągów $\{x'_n\}$ i $\{x''_n\}$ o wyrazach z Z, zbieżnych do elementu zbioru Z, jest

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x'_n) - f(x''_n)\right) = 0.$$

Odrzucając tu warunek zbieżności ciągów, otrzymamy definicję jednostajnej ciągłości:

Funkcja $y = f(x)$ jest *jednostajnie ciągła w zbiorze* Z, jeżeli dla każdej pary zbliżających się nieograniczenie ciągów $\{x'_n\}$ i $\{x''_n\}$ o wyrazach z Z jest

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x'_n) - f(x''_n)\right) = 0.$$

Dowód równoważności tej definicji ze zwykłą nie jest trudniejszy od dowodu równoważności definicyj Heinego i Cauchy'ego ciągłości w punkcie i jest w jedną stronę tak samo nieefektywny.

Zauważę jeszcze na zakończenie, że analogicznie można wprowadzić ciągową definicję jednostajnej zbieżności ciągu funkcyj $\{f_n(x)\}$:

Ciąg $\{f_n(x)\}$ funkcji określonych w Z jest w Z *jednostajnie zbieżny* do funkcji $f(x)$, jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach z Z jest

$$\lim_{n\to\infty}\left(f_n(x_n)-f(x_n)\right)=0.$$

INSTYTUT MATEMATYCZNY
UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO