ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

wmptm 1897

J. MUSIELAK (Poznań)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Prosty dowód wyznacznikowego kryterium określoności formy kwadratowej

Rzeczywistą formę kwadratową

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad a_{ij} = a_{ji}, \tag{1}$$

nazywa się *dodatnio określoną*, jeżeli przyjmuje wartości dodatnie dla $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$. Znane jest następujące wyznacznikowe kryterium określoności formy kwadratowej, mające praktyczne znaczenie np. przy badaniu ekstremów funkcji wielu zmiennych:

Forma kwadratowa (1) *jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyznaczniki*

$$A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

są dodatnie.

Przedstawię tutaj prosty dowód tego kryterium, nie opierający się na teorii przekształceń liniowych form kwadratowych, a wyłącznie na własnościach wyznaczników.

Zauważmy wpierw, że zakładając $a_{11} \neq 0$ i mnożąc wszystkie kolumny wyznacznika A_k z wyjątkiem pierwszej przez a_{11}, a następnie odejmując od elementów drugiej kolumny, elementy pierwszej, pomnożone przez a_{12}, od elementów trzeciej, elementy pierwszej, pomnożone przez a_{13} itd. i rozwijając otrzymany wyznacznik według elementów pierwszego wiersza, mamy dla $k > 1$:

$$A_k = \frac{1}{a_{11}^{k-2}} \det(a_{11} a_{ij} - a_{1i} a_{1j}), \qquad i, j = 2, 3, \ldots, k. \tag{2}$$

Wykażemy teraz kryterium za pomocą indukcji zupełnej względem ilości zmiennych. Dla $n = 1$ jest ono oczywiste. Załóżmy jego prawdziwość dla $n-1$; udowodnimy, że słuszne jest wówczas również dla n.

Dodatnia określoność formy kwadratowej (1) równoważna jest dodatniej określoności trójmianu kwadratowego

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

przy dowolnych $x_2^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$, tj. warunkom

$$a_{11} > 0,$$

$$\Delta(x_2, \ldots, x_n) = a_{11}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j - \Big(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\Big)^2 = \tag{3}$$

$$= \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} (a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j})x_i x_j > 0$$

przy dowolnych $x_2^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$. Ponieważ $a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j} = a_{11}a_{ji} - a_{1j}a_{1i}$, więc $\Delta(x_2, \ldots, x_n)$ jako forma kwadratowa $n-1$ zmiennych jest według założenia indukcyjnego dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczniki $(k-1)$-go stopnia

$$\det(a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}) = a_{11}^{k-2}A_k > 0$$

dla $k = 2, 3, \ldots, n$. Zatem warunki (3) dodatniej określoności formy kwadratowej (1) równoważne są według (2) warunkom

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}^{k-2}A_k > 0 \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

tj. warunkom

$$A_k > 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$