ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

L. KUBIK (Warszawa)

Uogólnienie twierdzeń Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego

1. W artykule tym podam uogólnienie twierdzenia Rolle'a (patrz np. [2], str. 107), twierdzenia Lagrange'a ([2], str. 108) oraz twierdzenia Cauchy'ego ([2], str. 110) na przypadek funkcji ciągłych mających pochodne jednostronne. Uogólnienia te są bardzo proste, a ich dowody są bardzo podobne do dowodów odpowiednich nieuogólnionych twierdzeń.

UOGÓLNIENIE TWIERDZENIA ROLLE'A. *Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ i niech w każdym punkcie x tego przedziału istnieje pochodna prawostronna $f'_+(x)$ i pochodna lewostronna $f'_-(x)$. Jeżeli $f(a) = f(b) = 0$, to istnieje takie c, że $a < c < b$ oraz*

$$f'_+(c)\cdot f'_-(c) \leqslant 0. \tag{1}$$

Dowód. Jeżeli $f(x) \equiv 0$, to $f'(x) \equiv 0$ i jako c występujące w tezie twierdzenia można wziąć dowolne x z przedziału (a, b). Załóżmy więc, że $f(x) \not\equiv 0$. Przypuśćmy, że istnieje takie x_0 $(a < x_0 < b)$, że $f(x_0) > 0$. Kres górny M funkcji $f(x)$ jest więc dodatni. Zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa ([2], str. 81) istnieje takie c z przedziału $\langle a, b\rangle$, że $f(c) = M$ (przy tym $a \neq c \neq b$, bo $f(a) = f(b) = 0$, a $M > 0$). Dla każdego $h > 0$ mamy więc $f(c-h) \leqslant f(c) \geqslant f(c+h)$, czyli

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0, \qquad \frac{f(c)-f(c-h)}{h} \geqslant 0,$$

a więc

$$f'_+(c) \leqslant 0, \qquad f'_-(c) \geqslant 0.$$

Gdyby funkcja $f(x)$ przyjmowała wartości ujemne, to podobnie znaleźlibyśmy taki punkt c_1, że $a < c_1 < b$ oraz $f(c_1) = m < 0$, gdzie m oznacza kres dolny funkcji $f(x)$. Mielibyśmy więc

$$f'_+(c) \geqslant 0, \qquad f'_-(c) \leqslant 0.$$

Twierdzenie jest więc udowodnione.

Zauważmy, że gdy funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna, to wzór (1) przyjmuje postać $[f'(c)]^2 \leqslant 0$, czyli $f'(c) = 0$. Nasze twierdzenie staje się w tym szczególnym przypadku zwykłym twierdzeniem Rolle'a.

UOGÓLNIENIE TWIERDZENIA LAGRANGE'A. *Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ i niech w każdym punkcie x tego przedziału istnieje pochodna prawostronna $f'_+(x)$ i pochodna lewostronna $f'_-(x)$. Wówczas istnieje takie c, że $a < c < b$ oraz*

$$\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'_+(c)\right)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'_-(c)\right) \leqslant 0. \tag{2}$$

Dowód. Weźmy pod uwagę funkcję

$$g(x) = f(a)-f(x)+(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Jest to funkcja ciągła, ma w każdym punkcie $x \in \langle a, b\rangle$ pochodną prawostronną i lewostronną:

$$g'_\pm(x) = -f'_\pm(x)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Mamy dalej $g(a) = g(b) = 0$. Funkcja $g(x)$ spełnia zatem założenia uogólnionego twierdzenia Rolle'a. Istnieje więc takie c $(a < c < b)$, że

$$g'_+(c)\cdot g'_-(c) \leqslant 0,$$

co jest równoważne wzorowi (2). Twierdzenie jest więc udowodnione.

Zastanówmy się jeszcze nad interpretacją geometryczną wzoru (2). Jeżeli ma miejsce (2), to albo

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant f'_+(c), \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_-(c), \tag{3}$$

albo

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_+(c), \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant f'_-(c). \tag{4}$$

Wzór (3) mówi nam, że sieczna poprowadzona przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ jest bardziej (lub tak samo) stroma niż styczna prawostronna w punkcie c i mniej (lub tak samo) stroma niż styczna lewostronna w c. Wzór (4) mówi nam, że sieczna jest mniej (lub tak samo) stroma niż styczna prawostronna w c i bardziej (lub tak samo) stroma niż styczna lewostronna w c.

Zauważmy, że gdy funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna, to wzór (2) przyjmuje postać

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),$$

czyli otrzymujemy zwykłe twierdzenie Lagrange'a.

Z uogólnionego twierdzenia Lagrange'a dostajemy następujący wniosek:

WNIOSEK. *Funkcja $f(x)$ ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ i mająca w każdym punkcie pochodną prawostronną i lewostronną ograniczone spełnia w tym przedziale warunek Lipschitza.*

Istotnie, przypuśćmy, że dla każdego $x \in (a, b)$ jest

$$|f'_+(x)| < M, \quad |f'_-(x)| < M. \tag{5}$$

Weźmy dwa dowolne punkty x_1 i x_2 z przedziału $\langle a, b\rangle$:

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

Przypuśćmy, że $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Z uogólnionego twierdzenia Lagrange'a wynika istnienie takiego punktu c $(x_1 < c < x_2)$, że albo

$$f(x_2)-f(x_1) \leqslant (x_2-x_1)f'_+(c),$$

albo

$$f(x_2)-f(x_1) \leqslant (x_2-x_1)f'_-(c).$$

Z założenia (5) wynika więc warunek Lipschitza:

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant M|x_2-x_1|.$$

Jeżeli jest $f(x_1) > f(x_2)$, to korzystamy z tego, że albo

$$f(x_2)-f(x_1) \geqslant (x_2-x_1)f'_+(c), \text{ czyli } f(x_1)-f(x_2) \leqslant (x_2-x_1)f'_+(c),$$

albo

$$f(x_2)-f(x_1) \geqslant (x_2-x_1)f'_-(c), \text{ czyli } f(x_1)-f(x_2) \leqslant (x_2-x_1)f'_-(c).$$

Z (5) wynika warunek Lipschitza:

$$|f(x_2)-f(x_1)| = f(x_1)-f(x_2) \leqslant M|x_2-x_1|.$$

A więc w obu przypadkach ($f(x_1) \leqslant f(x_2)$ oraz $f(x_1) > f(x_2)$) nasz wniosek jest prawdziwy.

Gdy funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna, to z naszego wniosku wynika znany fakt, że funkcja różniczkowalna o ograniczonej pochodnej spełnia warunek Lipschitza.

UOGÓLNIENIE TWIERDZENIA CAUCHY'EGO. *Jeżeli funkcje $f(x)$ i $h(x)$ są ciągłe w przedziale $\langle a, b\rangle$, jeżeli w każdym punkcie x tego przedziału $f(x)$ i $h(x)$ mają pochodne prawostronne i lewostronne i jeżeli $h(a) \neq h(b)$, to istnieje takie c, że $a < c < b$ oraz*

$$\left(\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}h'_+(c)-f'_+(c)\right)\left(\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}h'_-(c)-f'_-(c)\right) \leqslant 0. \tag{6}$$

Dowód. Weźmy pod uwagę funkcję

$$\varphi(x) = f(a)-f(x)+[h(x)-h(a)]\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}.$$

Funkcja ta spełnia oczywiście założenia uogólnionego twierdzenia Rolle'a, a więc istnieje takie c $(a < c < b)$, że

$$\varphi'_+(c)\cdot\varphi'_-(c) \leqslant 0,$$

co jest równoważne wzorowi (6).

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $h(x)$ są różniczkowalne i jeżeli $h'(x) \neq 0$ dla $x \in \langle a, b\rangle$, to wzór (6) przyjmuje postać

$$\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{f'(c)}{h'(c)},$$

czyli otrzymujemy zwykłe twierdzenie Cauchy'ego.

2. Podane wyżej uogólnienie twierdzenia Cauchy'ego potrzebne mi było do dowodu pewnego twierdzenia z rachunku prawdopodobieństwa (patrz [1]). W dowodzie tego twierdzenia rozpatrywałem funkcję $G(x)$ niemalejącą, ograniczoną, taką że $G(0) = 0$, mającą w każdym punkcie pochodną prawostronną i lewostronną i taką, że

$$\frac{1+x^2}{x}\cdot G'(x)$$

jest dla $x > 0$ funkcją nierosnącą, przy czym $G'(x)$ oznacza tutaj pochodną prawostronną lub lewostronną, ewentualnie w jednych punktach prawostronną, a w innych lewostronną.

Określiłem współczynniki a_{nk} za pomocą wzoru

$$a_{nk} = \frac{G\left(\frac{k}{2^n}\right) - G\left(\frac{k-1}{2^n}\right)}{\log\left[1+\left(\frac{k}{2^n}\right)^2\right] - \log\left[1+\left(\frac{k-1}{2^n}\right)^2\right]} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n\cdot 2^n).$$

Chodziło o to, aby wykazać, że

$$a_{n,k+1} \leqslant a_{nk} \tag{7}$$

przy każdej funkcji $G(x)$ o wyżej podanych własnościach. Korzystając z tego, że funkcje $G(x)$ i $\log(1+x^2)$ spełniają dla $x > 0$ założenia uogól-

nionego twierdzenia Cauchy'ego oraz z tego, że $\frac{1+x^2}{x}\cdot G'(x)$ (gdzie dla każdego x $G'(x)$ oznacza dowolną pochodną: prawostronną lub lewostronną) jest funkcją nierosnącą, nietrudno dostać wzór (7).

Prace cytowane

[1] L. Kubik, *A characterization of the class L of probability distributions*, Studia Math. 21 (1962) (w druku).

[2] K. Kuratowski, *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego*, część I, Warszawa 1948.