ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

wmptm 1897

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O liczbach naturalnych D, dla których okres rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny ma trzy wyrazy

Łatwo jest znaleźć wszystkie liczby naturalne D, dla których $\sqrt{D}$ daje rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny o okresie, składającym się z jednego tylko wyrazu: są to wszystkie liczby postaci $D = a_0^2+1$, gdzie $a_0 = 1, 2, 3, \ldots$; mamy tu $\sqrt{D} = a_0 + \dfrac{1}{a_0+\sqrt{D}}$, a więc okres rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ składa się z jednego tylko wyrazu $2a_0$ (1).

Nietrudno jest też znaleźć wszystkie liczby naturalne D, dla których liczba $\sqrt{D}$ daje rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny o okresie, składającym się z dwóch różnych wyrazów: są to wszystkie liczby postaci $D = a_0^2+2a_0/a_1$, gdzie a_0 jest dowolną liczbą naturalną, a_1 zaś jest liczbą naturalną $< 2a_0$, będącą dzielnikiem liczby $2a_0$: mamy wtedy $\sqrt{D} = a_0+1/a_1+1/(a_0+\sqrt{D})$ i okres rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ składa się z dwóch różnych wyrazów: a_1 i $2a_0$.

Zbadamy teraz, jakie liczby naturalne $\sqrt{D}$ mają tę własność, że $\sqrt{D}$ daje rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny o okresie, mającym trzy wyrazy.

Jak wiadomo, jeżeli D jest liczbą naturalną, nie będącą kwadratem liczby naturalnej, to $\sqrt{D}$ daje rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny okresowy i jeżeli okres składa się z s wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_s$, to liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ tworzą ciąg symetryczny. Stąd wynika, że na to, żeby dla liczby naturalnej D okres rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny miał trzy wyrazy, potrzeba i wystarcza, żeby istniały liczby naturalne a_0 i a_1 takie, iż $a_1 \neq 2a_0$ oraz

$$\sqrt{D} = a_0+1/a_1+1/a_1+1/(a_0+\sqrt{D}). \tag{1}$$

(1) Zob. np. W. Sierpiński, *Teoria liczb*, wyd. 3-cie, Warszawa-Wrocław 1950, str. 288.

Wzór (1) jest, jak łatwo sprawdzić, równoważny wzorowi

$$D = a_0^2 + \frac{2a_0a_1+1}{a_1^2+1}. \tag{2}$$

A więc te i tylko te liczby naturalne D mają tę własność, że rozwinięcie liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny ma okres trójwyrazowy, które przy pewnych naturalnych a_0 i $a_1 \neq 2a_0$, dają się przedstawić w postaci (2). Okażemy, że na to żeby liczba D, określona przez wzór (2), była naturalną, potrzeba i wystarcza, żeby a_1 było liczbą parzystą, oraz żeby było

$$a_0 = (a_1^2+1)n + a_1/2, \quad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Warunek jest wystarczający, gdyż jeżeli a_1 jest liczbą naturalną parzystą i jeżeli zachodzi wzór (3), to a_0 jest liczbą naturalną, $2a_0 > a_1$ i mamy

$$2a_0a_1+1 = 2(a_1^2+1)a_1n + a_1^2+1 = (a_1^2+1)(2a_1n+1)$$

liczba (2) jest więc naturalną.

Z drugiej strony, jeżeli przy pewnych naturalnych a_0 i $a_1 \neq 2a_0$ liczba (2) jest naturalną, to, wobec nieparzystości liczby $2a_0a_1+1$, liczba a_1+1 musi być nieparzystą, zatem liczba a_1 parzystą i wobec całkowitości liczby D, zatem też liczby $\dfrac{2a_0a_1+1}{a_1^2+1} - 1 = \dfrac{(a_0-\frac{1}{2}a_1)2a_1}{a_1^2+1}$, liczba $(a_0-\frac{1}{2}a_1)\,2a$, jest podzielna przez a_1^2+1, a ponieważ $(2a_1, a_1^2+1) = 1$ (gdyż a_1 jest parzyste), więc liczba $a_0-\frac{1}{2}a_1$ jest podzielna przez a_1^2+1 i przeto $a_0-\frac{1}{2}a_1 = (a_1^2+1)n$, gdzie n jest liczbą całkowitą, skąd mamy wzór (3). Lecz skoro a_0 jest liczbą naturalną i $2a_0 \neq a_1$, to musi być $n > 0$, zatem n jest liczbą naturalną. Warunek jest więc konieczny. Udowodniliśmy więc

TWIERDZENIE. *Wszystkimi liczbami naturalnymi D, dla których rozwinięcie liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny ma okres trójwyrazowy, są liczby*

$$D = \big((a_1^2+1)n + a_1/2\big)^2 + 2a_1n + 1,$$

gdzie a_1 jest liczbą naturalną parzystą, zaś $n = 1, 2, \ldots$

Łatwo byłoby dowieść, że

$$D = \big((a_1^2-1)n + a_1/2\big)^2 + (2a_1n+1)^2.$$

WNIOSEK. *Dla dowolnej liczby parzystej a_1 istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych D, dla których rozwinięcie $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny ma okres trójwyrazowy, którego pierwsze dwa wyrazy są równe liczbie a_1.*

Z twierdzenia naszego wynika w szczególności, że wszystkimi liczbami naturalnymi D, dla których $\sqrt{D}$ daje rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny o okresie trójwyrazowym, którego pierwsze dwa wyrazy są równe liczbie 2, są liczby $D = (5n+1)^2+4n+1$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$ Najmniejszymi siedmioma takimi liczbami są: 41, 130, 269, 458, 697, 986, 1325. Wszystkimi liczbami naturalnymi D, dla których $\sqrt{D}$ daje rozwinięcie o okresie trójwyrazowym, którego pierwsze dwa wyrazy są równe 4, są liczby

$$D = (17n+2)^2+8n+1, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Najmniejszymi dwiema takimi liczbami są 370 i 1313. Wszystkimi liczbami naturalnymi D, dla których $\sqrt{D}$ daje okres trójwyrazowy o dwóch pierwszych wyrazach równych 6 są liczby

$$D = (37n+3)^2+12n+1.$$

Najmniejszą taką liczbą jest $D = 1613$. Tak więc jest tylko 7 liczb $D \leqslant 1000$, dla których $\sqrt{D}$ daje rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny o okresie, mającym trzy wyrazy: są to liczby 41, 130, 269, 370, 458, 697 i 986.