ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

A. Lelek (Wrocław)

Osobliwe zbiory spójne

Zbiory spójne stanowią dzisiaj w matematyce, a zwłaszcza w topologii i geometrii, jeden z podstawowych obiektów badań. Mówi się więc o powierzchniach spójnych, wielościanach spójnych, rozmaitościach spójnych, grupach spójnych itd. To, że są one spójne, znaczy, z grubsza biorąc, że składają się tylko z jednego kawałka, że nie dadzą się potraktować jako całości złożone z kilku, czy też bardzo wielu części oddzielnych. Owa własność zbiorów „być złożonym tylko z jednego kawałka", własność bardzo intuicyjna i nasuwająca się od razu przy pierwszym zetknięciu z tworami geometrycznymi, wymaga jednak dokładniejszego sprecyzowania. Nazwano ją spójnością — i to się przyjęło — chociaż wyraża ona i stanowi jak gdyby pierwsze przybliżenie tego bliskiego praktyce pojęcia, o którym myślimy mówiąc: ciągłość, nierozerwalność, spoistość.

Zanim podamy definicję zbioru spójnego, przypomnimy co to znaczy, że dany punkt p jest punktem granicznym zbioru punktowego A. Otóż jest tak wtedy, gdy dowolnie blisko punktu p znajduje się punkt należący do zbioru A. Dokładniej, p nazywa się punktem *granicznym* zbioru A, jeśli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje punkt zbioru A, oddalony od punktu p o mniej niż ε. Każdy punkt zbioru A jest więc punktem granicznym zbioru A. Natomiast mogą istnieć punkty graniczne zbioru, nie należące do tego zbioru — np. punkt leżący na brzegu trójkąta jest punktem granicznym zbioru złożonego z punktów wewnętrznych trójkąta. Zbiór punktów granicznych zbioru A oznacza się przez $\bar{A}$ i nazywa *domknięciem* zbioru A. Widzimy zatem, że każdy zbiór jest zawarty w swoim domknięciu, co zapisuje się wzorem: $A \subset \bar{A}$. Zbiorem *domkniętym* nazywa się zbiór, który jest równy swojemu domknięciu, tj. $A = \bar{A}$.

Zbiór A nazywa się *spójny*, jeżeli przy każdym jego rozkładzie na dwa zbiory niepuste M i N co najmniej jeden z tych zbiorów zawiera punkt graniczny drugiego zbioru.

Oznaczając przez 0 zbiór pusty, przez $X \cup Y$ *sumę* zbiorów X i Y (tj. zbiór złożony z punktów należących do zbioru X lub do zbioru Y), a przez $X \cap Y$ *iloczyn* zbiorów X i Y (tj. zbiór złożony z punktów nale-

żących równocześnie do zbioru X i do zbioru Y), możemy więc powiedzieć, że zbiór A jest spójny wtedy, gdy przy każdym rozkładzie:

$$A = M \cup N, \quad M \neq 0 \neq N,$$

spełniony jest warunek:

$$(\bar{M} \cap N) \cup (M \cap \bar{N}) \neq 0.$$

Powyższa definicja zbioru spójnego została podana przez Knastera i Kuratowskiego [7] (1) w 1921 r. Praca [7] jest w literaturze światowej jedną z pierwszych publikacji poświęconych zbiorom spójnym. Zawierając gruntowną analizę pojęcia spójności, stanowi ona początek systematycznych, trwających do dzisiaj i uwieńczonych już wieloma ciekawymi odkryciami badań w tym zakresie.

Zgodnie z intuicjami, zbiory punktowe takie, jak trójkąt, koło, kwadrat, płaszczyzna, czworościan, kula, sześcian i dużo innych, są spójne. Zbiór złożony z dwu punktów nie jest spójny, podobnie jak zbiór punktów hiperboli. Ten ostatni rozkłada się bowiem na dwa zbiory niepuste — gałęzie hiperboli — z których żaden nie zawiera punktów granicznych drugiego.

Przytoczymy kilka twierdzeń o zbiorach spójnych. Tak więc, suma dwu (a nawet dowolnej ilości) zbiorów spójnych, mających co najmniej jeden punkt wspólny, jest zbiorem spójnym. Zbiór B powstały ze zbioru spójnego A przez dołączenie jakichkolwiek jego punktów granicznych, tzn. taki, że $A \subset B \subset \bar{A}$, jest zbiorem spójnym. W szczególności domknięcie każdego zbioru spójnego jest zbiorem spójnym. Jeżeli f jest funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych i argumentach przebiegających zbiór spójny A, oraz przyjmuje dwie różne wartości rzeczywiste $t_1 < t_2$, to dla każdej liczby t rzeczywistej z przedziału $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ istnieje punkt a należący do zbioru spójnego A i taki, że $f(a) = t$. Ostatnie twierdzenie stanowi uogólnienie znanego twierdzenia o własności Darboux funkcji ciągłych, na mocy którego funkcja ciągła rzeczywista przechodzi od jednej wartości do drugiej poprzez wszystkie wartości pośrednie. Uogólnienie to można posunąć jeszcze dalej. Okazuje się mianowicie, że obraz ciągły zbioru spójnego, tj. zbiór wartości dowolnej funkcji ciągłej określonej na zbiorze spójnym, jest zbiorem spójnym.

Twierdzenia powyższe, jak zresztą wiele innych twierdzeń dotyczących pojęcia spójności i zawartych np. w rozdziale V monografii [11], są zgodne z intuicjami i stanowią o wartości tego pojęcia.

Okazało się jednak niebawem, że istnieją zbiory spójne o dziwnych własnościach, nie przysługujących najprostszym zbiorom spójnym, spo-

(1) Liczby w nawiasach kwadratowych oznaczają numery pozycji w spisie literatury, umieszczonym na końcu niniejszego artykułu.

tykanym w geometrii i analizie. Już we wspomnianej poprzednio pracy [7] z 1921 r. Knaster i Kuratowski odkryli istnienie tzw. zbioru dwuspójnego. W ślad za tym przyszły odkrycia dalsze i z pewnością lista osobliwości spotykanych wśród zbiorów spójnych nie jest jeszcze zamknięta.

Można by zatem sądzić, że pojęcie spójności okazało się — jak to często bywa — zbyt ogólnym, i że dopiero zbiory spójne z nałożonymi na nie warunkami dodatkowymi będą wolne od tych osobliwości. W istocie, warunkiem takim jest np. *zwartość* zbioru, tzn. ta jego własność, że z każdego ciągu nieskończonego punktów tego zbioru można wybrać podciąg nieskończony zbieżny do jakiegoś punktu należącego do tego zbioru. Zbiory jednocześnie spójne i zwarte, czyli tzw. *continua*, stanowią klasę zbiorów o wiele bardziej regularnych, niż zbiory spójne. Jednakowoż już np. wnętrze koła, linia prosta lub cała płaszczyzna nie są zbiorami zwartymi. Tak więc warunek zwartości nazbyt zacieśnia klasę zbiorów spójnych, nie chroniąc jej zresztą przed innymi, niemniej wielkimi osobliwościami (2).

Celem tego artykułu jest przegląd osobliwości odkrytych do tej pory wśród zbiorów spójnych. Ująłem je w pięć rozdziałów odpowiadających pięciu wyraźnie wyróżniającym się grupom osobliwych zbiorów spójnych. Starałem się też podać dość kompletną literaturę odnoszącą się do każdej z tych grup. Tam, w cytowanych pracach, należy szukać informacji bardziej szczegółowych.

Wydaje się godne uwagi to, że wszystkie przykłady podane w dalszym ciągu i reprezentujące główne osobliwości zbiorów spójnych, są zbiorami leżącymi na płaszczyźnie. Rzeczywiście, podzbiory spójne linii prostej wyróżniają się swoją prostotą — jest ich w ogóle tylko sześć typów: odcinek z końcami, odcinek z jednym końcem, odcinek bez końców, półprosta z końcem, półprosta bez końca i cała prosta. Przechodząc z prostej na płaszczyznę znajdujemy już natomiast całe bogactwo zbiorów spójnych. Wśród nich — te osobliwe, mające jeszcze jedną cechę wspólną: nie da się ich narysować.

1. Zbiory dwuspójne. Każdy ze zbiorów spójnych takich, jak kwadrat, sześcian lub płaszczyzna, daje się łatwo rozłożyć na dwa zbiory spójne, niejednopunktowe i nie mające punktów wspólnych (czyli *rozłączne*). Tak np. płaszczyznę można rozłożyć na półpłaszczyznę otwartą $y < 0$ i półpłaszczyznę domkniętą $y \geqslant 0$, które są spójne i rozłączne. Okazuje się jednak, że ta własność rozkładu przysługuje nie wszystkim

(2) Istnieją np. continua *nierozkładalne* (tj. nie będące sumą dwu continuów, z których żadne nie jest zawarte w drugim), a nawet — jak wykazał Knaster w 1922 r. — *dziedzicznie nierozkładalne* (tj. takie, których każde podcontinuum jest nierozkładalne).

zbiorom spójnym. Istnieją bowiem zbiory *dwuspójne*, tzn. takie zbiory spójne i niejednopunktowe, które nie dają się rozłożyć na dwa zbiory spójne, niejednopunktowe i rozłączne.

Najprostszy i jednocześnie pierwszy chronologicznie przykład zbioru dwuspójnego, podany przez Knastera i Kuratowskiego [7], może być otrzymany w sposób następujący.

Weźmy pod uwagę odcinek $[0, 1]$ osi x-ów. Podzielmy go na trzy równe odcinki i usuńmy punkty wewnętrzne odcinka środkowego, tj. przedział $(1/3, 2/3)$. Pozostaną dwa odcinki $[0, 1/3]$ i $[2/3, 1]$, z którymi uczyńmy to samo: podzielmy każdy z nich na trzy równe odcinki i usuńmy zeń przedział środkowy, tj. z odcinka $[0, 1/3]$ — przedział $(1/9, 2/9)$, a z odcinka $[2/3, 1]$ — przedział $(7/9, 8/9)$. Z otrzymanymi w ten sposób czterema odcinkami $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$ i $[8/9, 1]$ wykonajmy znowu tę samą operację, co poprzednio, tj. podzielmy każdy z nich na trzy równe odcinki i usuńmy przedział środkowy. Postępowanie to można kontynuować do nieskończoności. W rezultacie, po usunięciu z odcinka $[0, 1]$ nieskończonego ciągu przedziałów, otrzymamy zbiór C zwany *zbiorem Cantora*. Zbiór ten jest domknięty i nie zawiera żadnego przedziału. Należą do niego punkty 0 i 1 osi x-ów, jak również wszystkie końce opisanych wyżej przedziałów usuniętych z odcinka $[0, 1]$. Oznaczmy przez P zbiór złożony z punktów 0, 1 osi x-ów i wszystkich końców przedziałów usuniętych. Inaczej mówiąc, zbiór P składa się z punktów *trójkowo wymiernych* zbioru Cantora C, tzn. takich punktów x należących do zbioru C, które są postaci $x = m/3^n$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi. Wszystkie elementy zbioru P można więc ustawić w ciąg nieskończony. Zbiór P nie wypełnia zbioru C, ponieważ, jak się okazuje, elementy zbioru Cantora nie dają się ustawić w ciąg nieskończony (zbiór Cantora jest *nieprzeliczalny*). Jednakowoż każdy punkt zbioru Cantora jest punktem granicznym zbioru P, czyli zbiór P jest *gęsty* w zbiorze Cantora: $C = \overline{P}$.

Oznaczmy teraz przez $C-P$ *różnicę* zbiorów C i P (tj. zbiór złożony z punktów należących do zbioru C i nie należących do zbioru P) i weźmy pod uwagę punkt q na płaszczyźnie, mający współrzędne $x = 1/2$ i $y = 1/2$. Niech dla dowolnego punktu p należącego do zbioru Cantora, L_p będzie odcinkiem linii prostej, którego końcami są punkty p i q. Otóż wybierając na odcinkach L_p punkty, których rzędna jest liczbą wymierną, jeśli p należy do zbioru P, a — niewymierną, jeśli p należy do zbioru $C-P$, otrzymujemy właśnie żądany zbiór dwuspójny Z.

Dowód spójności zbioru Z wymaga pewnych wiadomości z topologii. Natomiast łatwo jest pokazać, że zbiór Z nie daje się rozłożyć na dwa zbiory spójne, niejednopunktowe i rozłączne. Co więcej, można dowieść, że każdy zbiór spójny, niejednopunktowy i zawarty w zbiorze Z musi zawierać punkt q (punkt q należy oczywiście do zbioru Z, bo ma rzędną

wymierną 1/2 i jest końcem wszystkich odcinków L_p, a więc również tych, dla których p należy do zbioru P).

Rzeczywiście, niech A będzie podzbiorem spójnym zbioru Z, zawierającym więcej niż jeden punkt. Gdyby zbiór A był zawarty w jednym odcinku L_p, to rzędne punktów zbioru A byłyby wszystkie jednocześnie liczbami wymiernymi, jeśli punkt p należałby do zbioru P, albo — wszystkie jednocześnie liczbami niewymiernymi, jeśli punkt p należałby do zbioru $C-P$. Zwracając uwagę na to, że rzędna zależy od punktu w sposób ciągły, otrzymalibyśmy zatem sprzeczność ze wspomnianym wyżej twierdzeniem, na mocy którego funkcja ciągła, określona na zbiorze spójnym, przechodzi przez wszystkie wartości pośrednie. A więc zbiór A nie jest zawarty w jednym odcinku L_p, czyli ma punkty wspólne co najmniej z dwoma różnymi odcinkami $L_{p'}$ i $L_{p''}$. punkty p' i p'' należą do zbioru Cantora C, który nie zawiera żadnego przedziału. Istnieje zatem punkt p_0 należący do odcinka $[p', p'']$ osi x-ów i nie należący do zbioru C. Niech x_0 będzie odciętą punktu p_0 (którego rzędna jest równa 0). Wynika stąd, że prosta

$$\frac{x}{2} + \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) y - \frac{x_0}{2} = 0,$$

przechodząca przez punkty p_0 i q, przecina zbiór Z jedynie w punkcie q.

Przypuśćmy teraz, że zbiór A nie zawiera punktu q. Wtedy A rozkłada się na dwa następujące zbiory niepuste: zbiór M złożony z tych punktów zbioru A, które leżą w półpłaszczyźnie

$$\frac{x}{2} + \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) y - \frac{x_0}{2} < 0,$$

i zbiór N złożony z tych punktów zbioru A, które leżą w półpłaszczyźnie

$$\frac{x}{2} + \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) y - \frac{x_0}{2} > 0.$$

Mamy też

$$(\bar{M} \cap N) \cup (M \cap \bar{N}) = 0,$$

co przeczy spójności zbioru A. Zatem punkt q należy do zbioru A.

A więc każdy zbiór spójny, niejednopunktowy i zawarty w zbiorze Z zawiera punkt q. Jeśli ze zbioru Z, który sam jest spójny, odrzucimy punkt q, reszta nie tylko nie będzie spójna, ale nawet nie będzie zawierać żadnego podzbioru spójnego, złożonego z więcej niż jednego punktu. Zbiór spójny Z przez odrzucenie punktu q staje się więc „pyłem", w którym jedynymi częściami spójnymi są pojedyncze punkty. Jest to eksplo-

zja, która niweczy całkowicie spójność dużego zbioru, będąc wszak skutkiem wypalenia ładunku bardzo małego — jednego punktu. Dlatego też punkt q nazywany jest niekiedy *punktem eksplodującym*. Zbiór Z jest zatem zbiorem dwuspójnym z punktem eksplodującym.

Jak wykazał Miller [13], istnieje zbiór dwuspójny bez punktu eksplodującego. Zgodnie z twierdzeniem Kline'a [6], zbiór spójny nie może zawierać dwu punktów eksplodujących.

Rozkłady przestrzeni euklidesowych na zbiory dwuspójne były badane w pracach Erdösa [2] i Swingle'a [18].

Badaniu zbiorów dwuspójnych i zagadnieniom pokrewnym poświęcone też były prace [3], [5], [8], [17] oraz [20]-[25].

2. Zbiory szeroko spójne. Jak widzieliśmy, istnieje zbiór dwuspójny, którego wszystkie podzbiory spójne i niejednopunktowe muszą zawierać jeden ustalony punkt q. Jednakowoż podzbiory te mogą być dowolnie małe. Niech bowiem ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Biorąc te wszystkie punkty zbioru dwuspójnego określonego w rozdziale poprzednim, które leżą w półpłaszczyźnie $y \geqslant 1/2-\varepsilon$, otrzymamy zbiór A, którego budowa jest taka sama jak budowa całego zbioru dwuspójnego. Zbiór A jest zatem spójny (i dwuspójny) oraz może być uczyniony dowolnie małym przez odpowiednie dobranie liczby ε — odległość każdych dwu punktów zbioru A jest mniejsza lub równa 2ε. Istnieją więc podzbiory spójne zbioru dwuspójnego, które zawierają więcej niż jeden punkt, ale których wielkość może być dowolnie mała.

Własność tę mają oczywiście również wszystkie takie zbiory spójne, jak koło, kula, kwadrat, sześcian lub płaszczyzna. W każdym z nich daje się wydzielić część spójna, która nie wypełnia całości. Słowa „nie wypełnia" rozumiemy tu jako „nie jest gęsta". Przypominamy, że zbiór X jest gęsty w zbiorze Y, jeśli każdy punkt zbioru Y jest punktem granicznym zbioru X, czyli jeśli zachodzi warunek: $Y \subset \overline{X}$.

Taki podzbiór spójny, nie będący gęstym w całym zbiorze, daje się wybrać jednak nie we wszystkich zbiorach spójnych. Jak udowodnił Swingle [16] w 1931 r., istnieją zbiory *szeroko spójne*, tzn. takie zbiory spójne i niejednopunktowe, w których każdy podzbiór spójny i niejednopunktowy jest gęsty. Zbiór szeroko spójny Z ma więc tę osobliwość, że jeśli tylko jego podzbiór A jest spójny i zawiera więcej niż jeden punkt, to zbiór A wypełnia szczelnie zbiór Z, czyli jest on tak wielki, jak cały zbiór Z, lub inaczej mówiąc, dowolnie blisko każdego punktu zbioru Z znajduje się zawsze jakiś punkt zbioru A.

Własnością słabszą od szerokiej spójności zbioru jest jego nierozkładalność. Zbiór spójny i niejednopunktowy nazywa się *nierozkładalny*, jeśli nie daje się przedstawić jako suma dwu zbiorów spójnych, z których żaden nie jest zawarty w domknięciu drugiego. Można inaczej powiedzieć,

że zbiór spójny i niejednopunktowy Z jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym rozkładzie zbioru Z na dwa zbiory spójne A i B:

$$Z = A \cup B,$$

co najmniej jeden z nich jest gęsty w zbiorze Z, czyli spełniony jest warunek:

$$Z \subset \bar{A} \quad \text{lub} \quad Z \subset \bar{B}.$$

Widać stąd, że każdy zbiór szeroko spójny jest nierozkładalny, ale nie na odwrót.

Przez dołączenie punktu granicznego do zbioru szeroko spójnego zbiór ten może przestać być szeroko spójny (zob. [20], str. 182). Natomiast, jak wykazała Rudin [14] w 1957 r., jest to niemożliwe dla zbiorów płaskich nierozkładalnych. Mianowicie, jeżeli zbiór spójny Z jest nierozkładalny, leży na płaszczyźnie i p jest punktem granicznym zbioru Z, to zbiór $Z \cup (p)$ jest też nierozkładalny ([3]).

Pewne związki zbiorów szeroko spójnych ze zbiorami dwuspójnymi i nierozkładalnymi, jak również inne twierdzenia z tego zakresu, znajdują się także w pracach [4], [19], [20], [22] i [23].

3. Zbiór spójny i całkowicie niedoskonały. Takie zbiory, jak wnętrze koła, linia prosta lub płaszczyzna, nie będąc same continuami zawierają jednakże pewne continua. Powstaje naturalne pytanie, czy każdy zbiór spójny i niejednopunktowy zawiera continuum niejednopunktowe? Zanim odpowiemy na to pytanie, wprowadzimy pewne inne pojęcia.

Zbiór A nazywa się zbiorem *w sobie gęstym*, jeśli każdy punkt p zbioru A jest punktem granicznym zbioru $A-(p)$. Inaczej mówiąc, to, że zbiór A jest w sobie gęsty, znaczy, iż każdy punkt p należący do zbioru A jest granicą ciągu punktów należących do A i różnych od p. Zbiór równocześnie domknięty i w sobie gęsty nazywa się *doskonały*.

Każdy zbiór spójny i niejednopunktowy jest w sobie gęsty. Rzeczywiście, jeśli zbiór niejednopunktowy A nie jest w sobie gęsty, to istnieje punkt p należący do zbioru A i nie będący punktem granicznym zbioru $A-(p)$, a zatem

$$(p) \cap \overline{A-(p)} = 0.$$

Oczywiście każdy zbiór jednopunktowy jest domknięty, czyli

$$(p) = \overline{(p)}.$$

([3]) Przez (p) oznaczamy zbiór jednopunktowy, złożony z pojedynczego punktu p.

Ponieważ jednak punkt p nie należy do zbioru $A-(p)$, więc

$$\overline{(p)} \cap [A-(p)] = (p) \cap [A-(p)] = 0.$$

Niech teraz $M = (p)$ i $N = A-(p)$. Mamy zatem rozkład $A = M \cup N$ spełniający warunek:

$$(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = 0 \cup 0 = 0,$$

przy czym zbiory M i N są niepuste, bo zbiór A jest z założenia niejednopunktowy. Wynika stąd, że A nie jest zbiorem spójnym. A więc z tego, że A jest zbiorem spójnym, wnosimy, że A jest zbiorem w sobie gęstym.

Każdy zbiór zwarty jest domknięty. Rzeczywiście, jeśli p jest punktem granicznym zbioru zwartego A, to p jest punktem zbioru A, albo jest granicą ciągu punktów należących do zbioru A i różnych od p. W tym drugim przypadku ciąg ów musi, wobec zwartości zbioru A, zawierać podciąg zbieżny do jakiegoś punktu p' należącego do zbioru A. Ponieważ jednak każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy, co cały ciąg, przeto punkty p i p' są identyczne, a zatem p jest punktem zbioru A. Wykazaliśmy, że każdy punkt graniczny zbioru A należy do A, czyli $\bar{A} \subset A$. Ponieważ jednak jest zawsze $A \subset \bar{A}$, więc $A = \bar{A}$ i zbiór A jest domknięty.

Z powyższego wynika, że każde continuum niejednopunktowe jest zbiorem doskonałym (bo jest zbiorem równocześnie spójnym i zwartym).

Możemy teraz z należytą dokładnością odpowiedzieć na postawione wyżej pytanie. Otóż nie tylko nie każdy zbiór spójny i niejednopunktowy zawiera continuum niejednopunktowe, ale nawet nie każdy taki zbiór zawiera podzbiór doskonały. Jak udowodnili Knaster i Kuratowski [9] w 1927 r., istnieje zbiór spójny, niejednopunktowy i *całkowicie niedoskonały*, tzn. nie zawierający żadnego podzbioru doskonałego. Zbiór ten ma jeszcze tę osobliwą własność, że jest podzbiorem krzywej płaskiej, dość regularnej.

Podamy teraz za Knasterem i Kuratowskim definicję zbioru Z spójnego, niejednopunktowego i całkowicie niedoskonałego.

Niech T będzie trójkątem równobocznym. Podzielmy trójkąt T na cztery równe trójkąty za pomocą trzech prostych łączących środki boków trójkąta T i usuńmy punkty wewnętrzne trójkąta środkowego. Pozostaną wtedy trzy trójkąty równoboczne T_1, T_2 i T_3. Z każdym z nich uczyńmy to samo: podzielmy na cztery trójkąty za pomocą linii prostych przechodzących przez środki boków i usuńmy punkty wewnętrzne trójkąta środkowego. W ten sposób z każdego trójkąta T_i $(i = 1, 2, 3)$ pozostaną trzy trójkąty równoboczne T_{i1}, T_{i2} i T_{i3}. Z każdym z otrzymanych dziewięciu trójkątów T_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ wykonajmy znowu tę samą operację, co poprzednio z trójkątem T. Dostaniemy 27 trójkątów równobocznych T_{ijk} $(i, j, k = 1, 2, 3)$. Postępowanie to można kontynuować

do nieskończoności. W ten sposób otrzymuje się z trójkąta T zbiór R zwany *krzywą trójkątową Sierpińskiego*. Zbiór R jest continuum i nie zawiera żadnego obszaru płaskiego. Oznaczmy przez V zbiór złożony z wierzchołków trójkąta T i wierzchołków wszystkich trójkątów

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

gdzie $i_m = 1, 2, 3$ oraz $n = 1, 2, \ldots$ Zbiór V jest gęsty w krzywej R.

Otóż zgodnie z twierdzeniem Bernsteina z 1908 r., istnieje rozkład płaszczyzny na dwa zbiory E i F rozłączne i całkowicie niedoskonałe. Żądany zbiór Z jest określony wzorem:

$$Z = (E \cap R) \cup V.$$

Zbiór Z będąc całkowicie niedoskonałym, jest przeto wolny od continuów zawierających więcej niż jeden punkt. Zbiory takie nazywają się *punktokształtne* bowiem jedynymi continuami, które w nich istnieją, są pojedyncze punkty. Mimo to zbiór Z jest spójny. Co więcej, jest on *lokalnie spójny*, tzn. każdy punkt zbioru Z ma dowolnie małe otoczenie (4) spójne. Dokładniej, znaczy to, że dla każdej liczby dodatniej ε i dowolnego punktu p zbioru Z istnieje w zbiorze Z otoczenie spójne punktu p takie, że odległość dowolnych dwu punktów tego otoczenia jest mniejsza od ε.

Nawiązując do rozważań z rozdziału poprzedniego, możemy zatem powiedzieć, że zdefiniowany wyżej zbiór spójny, całkowicie niedoskonały Knastera i Kuratowskiego jest jak najbardziej nie szeroko spójny. Zawiera on dowolnej wielkości podzbiory spójne, będąc przy tym zbiorem punktokształtnym. Własności te ma również zbiór dwuspójny z punktem eksplodującym, określony w rozdziale 1. Nie jest on wszakże całkowicie niedoskonały: zawiera zbiory nie różniące się topologicznie od zbioru Cantora — ten zaś jest zbiorem doskonałym.

Inny zbiór spójny, lokalnie spójny i punktokształtny został podany przez Bolanda [1]. Pewne wiadomości dotyczące zbiorów punktokształtnych można też znaleźć w pracy [8] Knastera i Kuratowskiego oraz w monografii [11] Kuratowskiego (str. 130 i 203).

4. Zbiór spójny Rudin. Istnieją w topologii i teorii mnogości pewne pojęcia, które wyróżniają spośród innych zbiorów zbiory pod jakimś względem ubogie, małe, zawierające niewiele punktów. Takim jest np. pojęcie zbioru brzegowego. Zbiór X nazywa się *brzegowy* w zbiorze Y, jeżeli X nie zawiera żadnego otoczenia żadnego punktu w zbiorze Y. Inaczej mówiąc, zbiór X jest brzegowy w zbiorze Y wtedy i tylko wtedy, gdy

(4) Zbiór G zawarty w zbiorze Z nazywa się *otoczeniem* punktu p w zbiorze Z, jeśli 1° punkt p należy do G i 2° istnieje liczba dodatnia η taka, że każdy punkt należący do zbioru Z i oddalony od punktu p o mniej niż η należy do zbioru G.

różnica $Y - X$ jest zbiorem gęstym w Y. Jeśli więc usuniemy ze zbioru Y zbiór brzegowy X, reszta, która pozostanie, będzie zbiorem gęstym. Znaczy to, że zbiór Y zawiera poza zbiorem X dużo innych punktów, jest zatem bogatszy od zbioru X.

Jeszcze uboższe są tzw. zbiory rzadkie. Zbiór X nazywa się *rzadki* [5] w zbiorze Y, jeśli X nie jest gęsty w żadnym otoczeniu żadnego punktu w zbiorze Y. Innymi słowy, zbiór X jest rzadki w zbiorze Y wtedy i tylko wtedy, gdy jego domknięcie $\overline{X}$ jest zbiorem brzegowym w Y.

Oczywiście każdy zbiór X rzadki w zbiorze Y jest brzegowy w Y. Twierdzenie odwrotne jest fałszywe: zbiór liczb wymiernych jest brzegowy w zbiorze Q wszystkich liczb rzeczywistych, ale nie jest rzadki w Q. Zarówno bowiem zbiór liczb wymiernych jak i zbiór liczb niewymiernych, są gęste w Q.

Z uwagi na ilość punktów najuboższe są oczywiście zbiory skończone. Istnieją jednak zbiory nieskończone, które stanowią wśród bogactwa innych zbiorów klasę zbiorów dość ubogich. Są to zbiory przeliczalne. Zbiór X nazywa się *przeliczalny*, jeśli wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg nieskończony:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Znaczy to, że istnieje przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne wszystkim punktom zbioru X liczb całkowitych dodatnich. Każdemu punktowi x zbioru X przyporządkowuje się jego „numer" n taki, że różnym punktom przyporządkowane są różne „numery", i wtedy zamiast x pisze się x_n.

Jak już wspomnieliśmy w rozdziale 1, zbiór Cantora nie jest przeliczalny. Również zbiór liczb rzeczywistych i zbiór liczb niewymiernych nie są przeliczalne. Natomiast zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.

W pewnym sensie ubogie są też zbiory niespójne, a zwłaszcza te, które ponadto nie zawierają żadnych podzbiorów spójnych (prócz pojedynczych punktów). Te ostatnie zbiory nazywają się *całkowicie niespójne*. Zbiór całkowicie niespójny jest więc wolny od podzbiorów spójnych niejednopunktowych, podobnie jak zbiór punktokształtny — od podcontinuów niejednopunktowych.

Można dowieść, że każdy zbiór przeliczalny jest całkowicie niespójny (zob. [11], str. 80).

Każdy zbiór całkowicie niespójny jest oczywiście punktokształtny, ale nie na odwrót. Jak widzieliśmy w rozdziale poprzednim, istnieją zbiory jednocześnie punktokształtne i spójne (nawet lokalnie spójne).

Przejmijmy, że dla danego zbioru spójnego S zbiór S' będzie zawsze dowolnym podzbiorem spójnym i niejednopunktowym zbioru S. W terminach tych możemy teraz sformułować twierdzenia następujące:

[5] Inni autorzy nazywają też te zbiory *nigdziegęstymi*.

I. *Jeśli S jest zbiorem dwuspójnym, to $S-S'$ jest zbiorem niespójnym.*

II. *Jeśli S jest zbiorem dwuspójnym z punktem eksplodującym, to $S-S'$ jest zbiorem całkowicie niespójnym* (6).

III. *Jeśli S jest zbiorem szeroko spójnym, to $S-S'$ jest zbiorem brzegowym w S.*

W 1944 r. Paul Erdös ogłosił w Biuletynie Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego notę [2] zaczynającą się od słów: „This note will consist of a few disconnected remarks on connected sets". Postawił tam między innymi zagadnienie następujące:

Czy istnieje zbiór spójny S taki, że $S-S'$ jest zawsze zbiorem rzadkim w S?

Zagadnienie to pozostało do dzisiaj nie rozwiązane.

W tej samej nocie [2] podany został dowód twierdzenia należącego do A. H. Stone'a, które głosi, że z każdego zbioru spójnego i niejednopunktowego można usunąć podzbiór spójny i niejednopunktowy tak, żeby reszta była nieskończona. A zatem zgodnie z tym twierdzeniem, w każdym zbiorze spójnym i niejednopunktowym S istnieje podzbiór S' taki, że $S-S'$ jest zbiorem nieskończonym. Powstało przeto wtedy naturalne pytanie, i było to inne zagadnienie Erdösa z pracy [2], czy w każdym zbiorze spójnym i niejednopunktowym S istnieje podzbiór S' taki, że $S-S'$ jest zbiorem nieprzeliczalnym?

Zagadnienie to zostało rozwiązane negatywnie w 1958 r. przez Mary Rudin [15], która udowodniła, że istnieje na płaszczyźnie zbiór spójny, niejednopunktowy i taki, że po usunięciu zeń jakiegokolwiek podzbioru spójnego i niejednopunktowego reszta jest zawsze zbiorem skończonym lub przeliczalnym. A zatem

IV. *Jeśli S jest zbiorem Rudin, to $S-S'$ jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym.*

Zbiór Rudin jest dzięki temu jednocześnie dwuspójny i szeroko spójny. Stanowi on więc jak gdyby ukoronowanie osobliwości. Jego konstrukcja, podobnie zresztą jak konstrukcja innych zbiorów osobliwych, wymaga jednak spełnienia pewnego warunku z teorii liczb pozaskończonych, mianowicie tzw. *hipotezy continuum* (7).

5. Zbiory spójne i nie σ-spójne. Zgodnie z definicją, zbiór jest spójny wtedy, gdy przy każdym rozkładzie na dwa zbiory niepuste co

(6) Można jednak udowodnić, że twierdzenie II zachodzi, podobnie jak twierdzenie I, dla dowolnych zbiorów dwuspójnych S — bez wymagania istnienia punktu eksplodującego.

(7) Jest ona sformułowana np. w podręczniku K. Kuratowskiego, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1955, str. 70. W tym samym podręczniku znajduje się też rozdział XVI poświęcony zbiorom spójnym.

najmniej jeden z nich zawiera punkt graniczny drugiego. Można by zapytać, co by się stało, gdyby w powyższej definicji zamiast o rozkładzie na dwa zbiory mówić o rozkładzie na dowolną skończoną ilość zbiorów. Okazuje się, że nie otrzymalibyśmy nic nowego, tj. obie te definicje byłyby równoważne.

W istocie, można wykazać, że na to, aby zbiór A był spójny, potrzeba i wystarcza, aby przy każdym rozkładzie:

$$A = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$$

na dowolną skończoną ilość n zbiorów niepustych M_i istniały co najmniej dwa różne wskaźniki i, j takie, że spełniony jest warunek:

$$(*) \qquad (\overline{M}_i \cap M_j) \cup (M_i \cap \overline{M}_j) \neq 0.$$

Dalej, można by zapytać, czy zamiana rozkładu skończonego rozkładem nieskończonym przyniosłaby definicję nierównoważną definicji zbioru spójnego. Tym razem okazuje się, że otrzymalibyśmy nową klasę zbiorów i prowadzi to do określenia tzw. zbiorów σ-spójnych.

Zbiór A nazywa się *σ-spójny*, jeśli przy każdym rozkładzie:

$$A = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots$$

na przeliczalnie wiele zbiorów niepustych M_i istnieją co najmniej dwa różne wskaźniki i, j takie, że spełniony jest warunek $(*)$.

Na mocy twierdzenia Sierpińskiego (zob. [11], str. 113), każde continuum jest zbiorem σ-spójnym.

Jednakowoż istnieją zbiory spójne, które nie są σ-spójne. Najprostszy taki zbiór, podany również przez Sierpińskiego (zob. też [11], str. 115), może być zbudowany, jak następuje.

Niech L_i^2 będzie podzbiorem płaszczyzny, złożonym z punktów prostej $x = 1/i$, dla których $0 \leqslant y \leqslant 1$ (we współrzędnych kartezjańskich), oraz z punktów koła $\varrho = 1/i$, dla których $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (we współrzędnych biegunowych). Żądanym zbiorem jest zbiór

$$Z = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots$$

Zbiór Z nie jest oczywiście σ-spójny, ponieważ z definicji rozkłada się na sumę przeliczalnie wielu zbiorów L_i, które są domknięte i parami rozłączne.

Udowodnimy, że zbiór Z jest spójny. Rzeczywiście, niech będzie dany rozkład zbioru Z na dwa zbiory M i N niepuste. Każdy ze zbiorów L_i jest łukiem złożonym z odcinka prostej i łuku koła złączonych końcami, jest więc zbiorem spójnym. Gdyby zatem któryś zbiór L_i miał punkty wspólne zarówno ze zbiorem M, jak ze zbiorem N, to już w tym zbiorze

L_i istniałby punkt graniczny zbioru M należący do zbioru N, lub punkt graniczny zbioru N należący do zbioru M, i spójność zbioru Z byłaby wykazana. Możemy więc przyjąć, że każdy zbiór L_i jest zawarty w jednym ze zbiorów M lub N. Ponieważ jednak zbiorów L_i jest nieskończenie wiele, przeto co najmniej jeden ze zbiorów M lub N, np. zbiór M, zawiera nieskończenie wiele zbiorów L_i. Istnieje więc podciąg nieskończony zbiorów

$$L_{i_1}, L_{i_2}, L_{i_3}, \ldots,$$

z których każdy jest zawarty w zbiorze M. Ale zbiór N jest niepusty — istnieje więc zbiór L_{i_0} zawarty w zbiorze N. Niech teraz p_0 będzie punktem o współrzędnych $x = 0$ i $y = 1/i_0$, a p_n — punktem o współrzędnych $x = 1/i_n$ i $y = 1/i_0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Punkt p_0 jest zatem granicą punktów p_n przy n dążącym do nieskończoności. Poza tym punkt p_0 jest końcem łuku L_{i_0}, a więc należy do zbioru N. Natomiast punkt p_n leży na łuku L_{i_n} $(n = 1, 2, \ldots)$, a więc jest punktem zbioru M. Wynika stąd, że p_0 jest punktem granicznym zbioru M i jednocześnie należy do zbioru N. Tym samym spójność zbioru Z została udowodniona.

Zbiór Z jest więc równocześnie spójny i nie σ-spójny. Nie jest on jednak lokalnie spójny np. w punkcie p mającym współrzędne $x = 0$ i $y = 1$. Punkt ten jest końcem łuku L_1. Każde dostatecznie małe otoczenie punktu p w zbiorze Z składa się z części jednego łuku koła, który jest zawarty w L_1, i nieskończenie wielu odcinków prostoliniowych, równoległych do osi y-ów oraz nie mających żadnych punktów wspólnych z owym łukiem koła. Otoczenie to nie może więc być zbiorem spójnym.

Niemniej okazuje się, że istnieją inne zbiory, które są równocześnie spójne, nie σ-spójne i lokalnie spójne (zob. [10], str. 241).

Zbiór Z spójny i nie σ-spójny, wyżej określony, zawiera łuki, a więc continua niejednopunktowe, będące zbiorami σ-spójnymi na mocy wspomnianego już twierdzenia Sierpińskiego. Nasuwa się pytanie, czy istnieje zbiór spójny, który nie tylko nie jest sam σ-spójny, ale również nie zawiera żadnego podzbioru σ-spójnego nieskończonego?

Pytanie to ma odpowiedź twierdzącą. Jak udowodnił ostatnio Jan Mycielski (wynik ten nie jest opublikowany), istnieje na płaszczyźnie zbiór spójny, niejednopunktowy i taki, że żaden jego podzbiór nieskończony nie jest σ-spójny. Zbiór Mycielskiego jest ponadto lokalnie spójny. Oczywiście wobec tego, że nie zawiera żadnego podzbioru nieskończonego i σ-spójnego, zbiór Mycielskiego jest punktokształtny.

Przez pewien czas nie wyjaśniony był związek zbiorów σ-spójnych ze zbiorami dwuspójnymi. Wykazałem w pracy [12], że między innymi zbiór dwuspójny z punktem eksplodującym, opisany w rozdziale 1, jest σ-spójny. Atoli niedawno R. Duda zbudował zbiór płaski dwuspójny, który nie jest σ-spójny.

Prace cytowane

[1] J. Ch. Boland, *An effective definition of a connected, locally connected and punctiform plane set*, Indag. Math. 16 (1954), str. 522-524.

[2] P. Erdös, *Some remarks on connected sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), str. 442-446.

[3] M. E. Estill, *A primitive dispersion set of the plane*, Duke Math. Journ. 19 (1952), str. 323-328.

[4] R. P. Hunter, *Type of (n, k) adherence and indecomposability*, Portugal. Math. 15 (1956), str. 115-122.

[5] F. B. Jones, *Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x)+f(y) = f(x+y)$*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), str. 115-120.

[6] J. R. Kline, *A theorem concerning connected point sets*, Fund. Math. 3 (1922), str. 238-239.

[7] B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921), str. 206-255.

[8] — *Sur quelques propriétés topologiques des fonctions dérivées*, Rend. Circ. Mat. Palermo 49 (1925), str. 382-386.

[9] — *A connected and connected im kleinen point set which contains no perfect subset*, Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), str. 106-109.

[10] B. Knaster, A. Lelek et Jan Mycielski, *Sur les décompositions d'ensembles connexes*, Colloq. Math. 6 (1958), str. 227-246.

[11] C. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa 1952.

[12] A. Lelek, *Ensembles σ-connexes et le théorème de Gehman*, Fund. Math. 47 (1959), str. 265-276.

[13] E. W. Miller, *Concerning biconnected sets*, Fund. Math. 29 (1937), str 123-133.

[14] M. E. Rudin, *A property of indecomposable connected sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), str. 1152-1157.

[15] — *A connected subset of the plane*, Fund. Math. 46 (1958), str. 15-24.

[16] P. M. Swingle, *Two types of connected sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), str. 254-258.

[17] — *Generalizations of biconnected sets*, Amer. Journ. Math. 53 (1931), str. 385-400.

[18] — *Biconnected and related sets*, Amer. Journ. Math. 54 (1932), str. 525-535.

[19] — *Indecomposable connexes*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), str. 796-803.

[20] — *The closure of types of connected sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), str. 178-185.

[21] — *Connected sets of Van Vleck*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), str. 477-482.

[22] — *The existence of widely connected and biconnected semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), str. 243-248.

[23] — *Widely connected and biconnected semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), str. 249-254.

[24] R. L. Wilder, *On the dispersion sets of connected point-sets*, Fund. Math. 6 (1924), str. 214-228.

[25] — *A point set which has no true quasi-components, and which becomes connected upon the addition of a single point*, Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), str. 423-427.