ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

wmptm 1897

S. STRASZEWICZ (Warszawa)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

# Projekty reform w nauczaniu matematyki w świetle dyskusji na konferencjach międzynarodowych

W ostatnim dziesiątku lat na terenie organizacji międzynarodowych i w poszczególnych krajach rozwija się coraz silniej dążenie do unowocześnienia nauczania matematyki w szkołach średnich. W dyskusjach i artykułach konieczność reformy uzasadniana bywa zwykle argumentami następującymi.

Nowoczesne postępy matematyki spowodowały w niej głębokie przeobrażenia, porównywane niekiedy co do znaczenia i zasięgu z przemianami, jakie nastąpiły w siedemnastym wieku w okresie powstania geometrii analitycznej i rachunku różniczkowego i całkowego. Pojawienie się i rozwój nowych dziedzin, jak na przykład logika matematyczna i badania metamatematyczne, algebra abstrakcyjna a zwłaszcza teoria grup, teoria mnogości, topologia, analiza funkcjonalna, teorie probabilistyczne itd. zmieniły w znacznym stopniu pogląd na charakter nauk matematycznych i na ocenę wartości tego materiału, który był dotychczas tradycyjnym przedmiotem nauczania szkolnego.

Równocześnie zwiększył się znacznie zakres zastosowań matematyki. Z metod matematycznych korzystają dzisiaj nie tylko nauki fizyczno-chemiczne i techniczne, ale również biologia, medycyna, socjologia, ekonomia polityczna, a nawet językoznawstwo. Powstały nowe działy matematyki stosowanej, jak teoria gier, programowanie liniowe, teoria informacji, cybernetyka, teoria maszyn elektronowych i inne, przy czym teorie te operują przeważnie pojęciami matematyki nowoczesnej.

Wobec tych postępów matematyki i jej zastosowań dotychczasowe programy i sposoby nauczania matematyki w szkołach średnich stały się przeżytkiem. Nie odpowiadają one ani współczesnym ujęciom naukowym, ani potrzebom praktycznej działalności człowieka, ani rosnącemu znaczeniu matematyki dla kultury ogólnej. Dla młodzieży zaś jest matematyka szkolna na ogół przedmiotem nudnym i niepopularnym, wyniki nauczania są najczęściej niezadowalające.

Konieczne jest przeto zreformowanie nauczania szkolnego. Nie chodzi przy tym o dodanie takich czy innych modernizujących wstawek,

lecz o zasadniczą przebudowę całego programu. Powinna się ona oczywiście liczyć z możliwościami umysłowymi młodzieży; w tym celu trzeba opracować odpowiednie metody dla wprowadzenia pojęć współczesnych na drodze poglądowo-intuicyjnej. Spostrzeżenia dotychczasowe wykazują zresztą, że pojęcia nowoczesne sprawiają najwięcej trudności nie początkującym, lecz tym, którym przeszkadzają nawyki nabyte w poprzedniej nauce.

Zagadnienia związane z reformą nauczania matematyki są tematem stałej i żywej wymiany myśli w organizacjach międzynarodowych. Przy Międzynarodowej Unii Matematycznej działa Międzynarodowa Komisja Nauczania Matematyki (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique), w skład której wchodzą delegaci przeszło 30 krajów, w tym również i Polski, reprezentujący podkomisje narodowe. Plenarne zebrania Komisji odbywają się w ramach międzynarodowych kongresów matematycznych; są one głównie poświęcone omówieniu referatów przedstawionych przez podkomisje. W okresach międzyzjazdowych organizowane są spotkania dla omówienia postępów prac podkomisji i przedyskutowania poszczególnych zagadnień. Na kongres w Sztokholmie (sierpień 1962) opracowywane są następujące tematy bezpośrednio związane z zagadnieniem reformy nauczania:

1. Jakie działy matematyki nowoczesnej i jakie nowoczesne zastosowania matematyki mogłyby być włączone do programu szkoły średniej ?

2. Zagadnienie kształcenia nauczycieli dla szkół różnych szczebli.

3. Powiązanie arytmetyki i algebry w nauczaniu dzieci do lat 15.

Sprawozdania z działalności Komisji, teksty referatów kongresowych i innych są ogłaszane drukiem w czasopiśmie Enseignement Mathématique, wychodzącym w Genewie, które jest oficjalnym organem Komisji.

Drugą organizacją międzynarodową poświęconą aktualnym zagadnieniom nauczania matematyki jest Międzynarodowa Komisja do Studiowania i Ulepszania Nauczania Matematyki (Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement Mathématique). Podstawową formą jej działania jest organizowanie częstych spotkań międzynarodowych dla bezpośredniej wymiany doświadczeń różnych krajów. Ostatnie spotkanie odbyło się w Krakowie w sierpniu 1960 r. Obszerne omówienie konferencji krakowskiej podaje *Matematyka* Nr 1 (66), styczeń-luty 1961.

W ostatnich paru latach znaczną rolę w uzgodnieniu poglądów na sprawę reformy nauczania matematyki w szkołach średnich odegrały konferencje robocze (sessions d'études) organizowane przez Europejską

Organizację Współpracy Ekonomicznej (Organisation Européenne de Coopération Economique). Duże znaczenie miała zwłaszcza dwutygodniowa konferencja w Royaumont (23. XI-5. XII. 1959), w której wzięli udział liczni matematycy i pedagogowie, głównie z krajów Europy zachodniej, a która zakończyła się sprecyzowaniem wyraźnych zaleceń co do zakresu i metody nauczania różnych działów materiału szkolnego. Omówimy tutaj propozycje wysunięte w zakresie nauczania algebry i geometrii jako charakterystyczny wyraz opinii obecnie dość szeroko rozpowszechnionych (1).

Algebra. *Uznano, że należy dojść stopniowo do całkowitej reformy nauczania algebry w szkole średniej orientując to nauczanie w kierunku pojęcia struktury algebraicznej* (2). W. Servais, referent tego tematu pisze: „Ważne jest, żeby od początku elementarnego nauczania algebry wyrabiać pojęcie algebry, która nie ogranicza się do działań na liczbach lub zmiennych liczbowych. Przedstawianie algebry jako uogólnienia arytmetyki byłoby wpajaniem poglądu zawężonego i do pewnego stopnia fałszywego. Arytmetyka — to sprawa rachunków liczbowych i własności zbiorów liczb, algebra zaś — to badanie struktur operacyjnych niezależnie od natury przedmiotów, do których odnoszą się te operacje".

Realizując powyższy postulat trzeba już we wczesnym okresie nauczania mówić o *zbiorach* rozmaitych elementów i wprowadzać podstawowe pojęcia algebry zbiorów: *równość* zbiorów, *podzbiór*, *suma* (połączenie) i *iloczyn* (część wspólna) zbiorów, *dopełnienie* podzbioru do zbioru, zbiór *pusty*. Pojęcia te należy objaśniać na materiale konkretnym i poglądowym biorąc przykłady z dobrze znanych uczniowi stosunków życia codziennego i stopniowo przechodzić do ujęć formalnych. Rozważanie podzbiorów odpowiadających określonym własnościom elementów zbioru pozwala w dogodny sposób wprowadzić pojęcia logiki zdań: *równoważność*, *implikację*, *alternatywę*, *koniunkcję* i *negację*. Zaleca się wcześnie zacząć stosować odpowiednie symbole, przede wszystkim symbol przynależności $\epsilon$, zawierania się $\subset$, implikacji $\Rightarrow$ i równoważności $\Leftrightarrow$. W późniejszym okresie przy formułowaniu twierdzeń trzeba posługiwać się kwantyfikatorami najpierw w postaci słownej, później ewentualnie korzystać z symboli $\bigwedge_x$ (dla każdego $x$), $\bigvee_x$ (istnieje takie $x$, że). Podkreśla

(1) Opieramy się na materiałach z konferencji: a) Sprawozdanie ogólne pt. *Conceptions nouvelles en matière d'enseigmenent des mathématiques*, b) referat W. Servais *Vues sur l'enseignement de l'algèbre au niveau secondaire* oraz na ustnych informacjach.

(2) Termin ten jest rozumiany tu w znaczeniu, w jakim używa go grupa Bourbaki: Na zbiorze dowolnych elementów określona jest struktura algebraiczna, jeśli dane jest w nim jedno lub więcej działań. tzn. praw, które parom uporządkowanym elementów tego zbioru przyporządkowują określone elementy tegoż zbioru.

się potrzebę jak najwcześniejszego wprowadzenia pojęcia funkcji. Servais proponuje od początku mówić o funkcji jako o przekształceniu (odwzorowaniu) jednego zbioru na drugi ilustrując to pojęcie przykładami czerpanymi również spoza matematyki, aby uczynić je żywym i ciekawym dla ucznia. Przy funkcjach liczbowo-liczbowych ważna rola powinna przypadać wykresom, przy czym nie należy się ograniczać do funkcji ciągłych, a budować również wykresy składające się z oddzielnych punktów, odcinków itp. Uogólniając pojęcie współrzędnych punktu na płaszczyźnie można wprowadzić w sposób poglądowy iloczyn kartezjański dwóch zbiorów, np. przy pomocy tablic o dwóch wejściach i tworzyć „wykresy" funkcji jako pewne jego podzbiory. Dowolne podzbiory iloczynu kartezjańskiego dadzą obrazy *relacji*. Tutaj także łatwo o interesujące przykłady z życia codziennego. Nacisk wypadnie położyć na relację równoważności i relację uporządkowania, spotykane na każdym kroku w matematyce i poza matematyką. Trzeba objaśnić uczniom, że relacja równoważności leży u podstaw każdej klasyfikacji, tj. podziału zbioru na klasy np. narodowości, kolory itp.

W ciągu nauczania algebry wypadnie rozważać kolejno różne układy liczbowe: zbiór liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych, zespolonych. Trzeba przy tym wyraźnie formułować własności charakteryzujące grupy, pierścienie i ciała, nie wdając się jednak w analizę aksjomatyczną tych struktur. W związku z tym dobrze byłoby odwrócić kolejność tradycyjną wprowadzając liczby ujemne przed ułamkowymi, co dałoby najpierw pierścień liczb całkowitych, który byłby następnie rozszerzony do ciała liczb wymiernych. Dla uczniów działania na ułamkach są z pewnością trudniejsze od działań na liczbach całkowitych względnych.

Wprowadzeniu nowoczesnych pojęć i tematów do nauczania algebry powinno towarzyszyć usunięcie z programu materiału przestarzałego lub mało pożytecznego. Można tu wymienić przekształcenia skomplikowanych i sztucznych wyrażeń algebraicznych, zawiłe rozkłady wielomianów na czynniki, różne specjalne sposoby rozwiązywania równań oraz większość rachunków logarytmicznych.

Geometria. *Przyjęto pogląd, że należy bardzo zmodyfikować tradycyjny szkolny kurs geometrii wywodzący się od „Elementów" Euklidesa w kierunku nadania mu formy bardziej algebraicznej w szczególności przez wprowadzenie wektorów (suma, iloczyn przez liczbę, iloczyn skalarny) oraz elementarnych przekształceń geometrycznych.*

Tak zwany „dedukcyjny" kurs geometrii, jaki bywa zwykle prowadzony w szkole średniej nastręcza wiele zastrzeżeń z punktu widzenia logiki współczesnej. Wprawdzie od czasu, gdy Hilbert udoskonalił i uzu-

pełnił aksjomatykę Euklidesa, mamy do dyspozycji logicznie zadowalający układ aksjomatów geometrii euklidesowej, ale rygorystyczny wykład geometrii oparty na układzie Hilberta lub podobnym byłby dla szkoły średniej zupełnie nieodpowiedni. Sam Hilbert zresztą nie miał na widoku spraw nauczania. Z drugiej strony treść geometrii szkolnej nie odpowiada temu, co jest ważne w geometrii współczesnej i jej zastosowaniach. W kursie szkolnym główną rolę odgrywają trójkąty, ich cechy przystawania, bądź podobieństwa i różne związki metryczne. Wprawdzie uzasadnianie własności trójkątów dobrze się nadaje do ćwiczenia w dowodzeniu twierdzeń, ale można to uzyskać również na innej drodze, a operowanie trójkątami przesłania strukturę wektorową przestrzeni i przeszkadza ujęciu geometrii jako nowoczesnej dyscypliny matematycznej powiązanej jednością metod z innymi działami matematyki. Należy zatem znacznie zmniejszyć rolę zwyczajowego sposobu nauczania geometrii. Proponuje się natomiast położenie nacisku na pojęcie i zastosowanie przekształceń izometrycznych, tj. przekształceń płaszczyzny lub przestrzeni nie zmieniających odległości punktów. Już we wczesnym okresie poglądowego nauczania geometrii obserwacja zjawisk dynamicznych oraz doświadczenia ze zginaniem papieru, ze zwierciadłami, wreszcie odpowiednie rysunki lub modele pozwalają wytworzyć u dzieci pojęcie przesunięcia równoległego, obrotu i symetrii osiowej i zapoznać z własnościami tych przekształceń. Posługując się nimi otrzymuje się łatwo klasyczne twierdzenia geometrii, które w tradycyjnym ujęciu bywają mozolnie uzyskiwane na podstawie cech przystawania. Przesunięcia równoległe na płaszczyźnie i w przestrzeni prowadzą do teorii wektorów. Wreszcie zjawisko rozciągania można wykorzystać do utworzenia pojęcia przekształcenia jednokładnego (homotetii) i pojęcia figur podobnych. W ten sposób można całą geometrię szkolną wysnuć z rozważania elementarnych przekształceń.

Co się tyczy metody nauczania geometrii zgodzono się w Royaumont na pogląd następujący. Nauczanie dzieci młodszych (do 13 lat) powinno mieć charakter poglądowo-intuicyjny. Należy je opierać na obserwacji świata fizycznego i na doświadczeniach i na tej drodze wypracowywać podstawowe pojęcia planimetrii i stereometrii. Dzieci w wieku 13-15 lat zaczynają już rozumieć na czym polega dowód i odczuwać jego potrzebę. Niektórzy uczniowie wykazują bardzo wyraźne dyspozycje logiczne. W tym okresie można już posługiwać się dedukcją stosując ją do odpowiednich fragmentów i dbając o wyraźne formułowanie założeń. W nauczaniu młodzieży w wieku 16-18 lat należałoby przyjąć pewien układ aksjomatów i stosować nauczanie dedukcyjne, przy czym należałoby wprowadzić pojęcie liczby rzeczywistej i wektory. Interesujący układ aksjomatów geometrii dla celów nauczania szkolnego przedstawił

(w paru wariantach) na konferencjach w Royaumont i w Aarhus profesor Sorbony G. Choquet ([3]).

Na zakończenie dodamy, że w różnych krajach zaczęto już wprowadzać mniej lub więcej daleko idące zmiany w programach i metodach nauczania matematyki i opracowywać nowe podręczniki. Zmiany te uwzględniają na ogół wiele z postulatów, o których informowaliśmy w tym artykule.

---

([3]) G. Choquet, *Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire*, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 1960, str. 209 (por. artykuł następny).