ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

G. CHOQUET (Paris)

Pewna aksjomatyka geometrii elementarnej odpowiednia dla celów nauczania *

1. Wstęp. Nie będziemy zajmować się tutaj uzasadnianiem konieczności nauczania geometrii elementarnej. Ograniczymy się jedynie do zaproponowania pewnego sposobu nauczania.

We wszystkich krajach uznaje się obecnie prawie powszechnie dwie następujące zasady:

1. Nauczając dzieci nie można traktować geometrii jako nauki dedukcyjnej. Celem nauczania, opartego na obserwacji świata fizycznego, ma być wyrobienie u dziecka, w oparciu o doświadczenie, intuicji związanych z podstawowymi pojęciami tej nauki.

2. Z punktu widzenia matematyka — najszybszym, najgłębszym i zarazem najbardziej eleganckim sposobem wprowadzenia płaszczyzny (lub przestrzeni trójwymiarowej), jest określenie jej jako dwu- (lub trój-) wymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb rzeczywistych R. Zakłada się ponadto, że w przestrzeni wektorowej określony jest iloczyn skalarny, tj. forma dwuliniowa i symetryczna $u \cdot v$ taka, że $u \cdot u > 0$ dla każdego wektora $u \neq 0$.

Przyjęcie powyższej definicji prowadzi poza tym najprostszą drogą do płodnych uogólnień (przestrzenie R^n, C^n, przestrzeń Hilberta itd...).

Liczni nauczyciele szkół średnich twierdzą, iż, zgodnie z ich praktyką, podejście to może być stosowane z dużą korzyścią, jeśli przeprowadzi się uprzednio badanie iloczynu skalarnego, przy nauczaniu dzieci w wieku 17 lat (końcowe klasy liceum). Uzyskuje się w ten sposób dużą oszczędność myślenia i możliwość przeprowadzania eleganckich i metodycznych dowodów. Co więcej, metoda ta oddaje duże usługi nauczycielowi fizyki,

---

* Od Redakcji. Artykuł niniejszy jest tłumaczeniem I części skryptu prof. G. Choqueta pt. *Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la Géométrie Élémentaire.* W skrypcie tym ujęte są wykłady wygłoszone w okresie od 30 maja do 2 czerwca 1960 r. w Aarhus na seminarium zorganizowanym przez Komisję Nauczania Matematyki przy Międzynarodowej Unii Matematycznej. Skrypt ten ostatnio w formie książkowej, został wydany w Paryżu przez Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

pozwalając na poprawne zdefiniowanie i zbadanie pojęcia pracy, środka ciężkości i sumy sił.

Zagadnienie jest znacznie bardziej skomplikowane w odniesieniu do dzieci w wieku 13-16 lat. Dziecko zaczyna wówczas rozumieć co to jest dowód, u niektórych rodzi się nawet silna potrzeba logiki, wskazująca, że nadszedł czas na przystąpienie do poważnego dedukcyjnego myślenia. Można wówczas zlecać dziecku przeprowadzanie fragmentów rozumowań dedukcyjnych, zwracając zawsze uwagę, aby precyzowało starannie przesłanki.

Konieczną jest więc rzeczą, aby nauczyciel dzieci w tym wieku dysponował pełną, ukrytą niejako pod powierzchnią, aksjomatyką. Rozmaite doświadczenia wykazały, iż wiele dzieci z upodobaniem posługuje się precyzyjną aksjomatyką. Matematyka jest dla nich grą z dokładnie określonymi regułami, poprawne granie w tę grę dostarcza im wiele radości. Interesuje więc nas aksjomatyka prosta, oparta na silnych aksjomatach, prowadząca szybko do twierdzeń nie zawsze prostych, ale intuicyjnych, tj. opisujących łatwe do sprawdzenia własności przestrzeni fizycznej. Zagadnienie niezależności aksjomatów nie ma dla nas znaczenia. Niektórzy nauczyciele są zwolennikami przyjęcia na początek dużej ilości aksjomatów. Nie wydaje nam się to słuszne: gra matematyczna podlegająca zbyt wielu regułom staje się trudna i przyjmuje pozory czegoś kruchego i niepewnego.

Wiadomo powszechnie, że „aksjomatyka“ Euklidesa nie odpowiada naszym wymogom logicznym; to samo można powiedzieć o wielu „aksjomatykach” zawartych w podręcznikach szkolnych. Trzeba jednak przyznać, że w podręcznikach wydanych w ciągu kilku ostatnich lat widać wysiłek zmierzający do poprawy sytuacji.

Hilbert uzupełniając i porządkując aksjomatykę Euklidesa chciał otrzymać logicznie zadowalający układ aksjomatów, nie brał natomiast pod uwagę potrzeb elementarnego nauczania. Elementarne ujęcia jego aksjomatyki (zob. np. książkę Halsteda, *Géométrie rationelle*, Gauthier-Villars, Paris 1911) są na ogół źle przystosowane do nauczania.

Aksjomatyka Euklidesa-Hilberta oparta jest na pojęciach długości, kąta i trójkąta. Udaje się jej doskonale ukryć strukturę wektorową przestrzeni, dlatego też w ciągu wielu stuleci nie znano pojęcia wektora. Fakt, że trójkąt jest połową równoległoboku nie przeszkodził w ciągu 30 blisko wieków w kładzeniu nacisku na szczegółowe badanie wysokości, środkowych i dwusiecznych trójkąta, symetralnych jego boków, na reguły przystawania trójkątów i związki miarowe w nich. Widziano zawsze trójkąt, a nie równoległobok, który mógłby przecież doprowadzić do pojęcia wektora.

Na jednym z ostatnich posiedzeń seminarium O. E. C. F. pan Dieudonné zawołał: „Precz z Euklidesem, nigdy więcej trójkątów”. Trójkąt

zachowa bez wątpienia zawsze znaczące miejsce, jest on bowiem najprostszym z płaskich wieloboków i wyznacza dokładnie jedną płaszczyznę. W haśle więc pana Dieudonné jest bez wątpienia wiele, zamierzonej zresztą, przesady. Nie ulega jednak wątpliwości, iż należy okiełzać niemal perwersyjne skłonności do rozważania punktów szczególnych trójkąta i związków metrycznych, badań nieraz co prawda eleganckich, lecz nie przynoszących korzyści.

Powinniśmy dawać pierwszeństwo metodom opartym na podstawowych pojęciach wyzwolonych po dwudziestu wiekach rozwoju matematyki: na pojęciu zbioru, relacji porządkującej, równoważności, operacji algebraicznej, przestrzeni wektorowej i symetrii. Metody te nie tylko pozwolą na szybkie użycie prostych narzędzi algebry, przyczyniając się w ten sposób do ekonomii myślenia, ale zapoznając ucznia z owymi podstawowymi pojęciami, wzbogacą jego umysł i przygotują go lepiej do przyszłej pracy.

2. Motyw przewodni dobrej aksjomatyki. W jaki sposób skonstruować aksjomatykę odpowiadającą naszym wymaganiom? Chcielibyśmy, aby prowadziła ona prosto do odkrycia struktury wektorowej przestrzeni oraz pozwoliła określić iloczyn skalarny i łatwo wykazać jego własności.

Sytuacja daje się więc streścić następująco: znamy drogę królewską, prowadzącą przez pojęcia przestrzeni wektorowej i iloczynu skalarnego, pojęcia te jednak nie mogą „spaść z powietrza" bez uprzedniego przygotowania. Ważne to jest przede wszystkim przy nauczaniu dzieci, które nie przyswoiły sobie jeszcze pojęcia operacji algebraicznej.

Oba te pojęcia będą dla nas jednak motywem przewodnim. Spróbujemy ubrać, w sposób umiarkowany, szkielet doskonały logicznie, ale zbyt abstrakcyjny dla umysłu dziecka, i uczynić zeń twór wzbudzający zaufanie i sympatię.

Zanalizujmy krótko podstawowe pojęcia:

a) Pojęcie przestrzeni wektorowej opiera się w zasadzie na pojęciu dodawania; dodaje się zarówno liczby rzeczywiste jak i wektory, dodawanie tych ostatnich daje się sprowadzić do pojęcia równoległości lub środka odcinka wyznaczonego przez dwa punkty.

b) Iloczyn skalarny jest funkcją dwuliniową i symetryczną. Pojawia się znowu dodawanie, i wraz z nim nowe pojęcie, któremu nie sposób się wymknąć — symetria.

c) Iloczyn skalarny jest w pewnym sensie dodatni, mianowicie $u \cdot u > 0$ dla każdego $u \neq 0$.

Doprowadzeni więc zostaliśmy do wniosku, iż szukaną aksjomatykę należy oprzeć na strukturze addytywnej prostej, równoległości i symetrii.

We wszystkich podręcznikach szkolnych wprowadza się pojęcie symetrii, nie sposób tego uniknąć, w niewielkiej jednak tylko ilości pod-

ręczników występuje ona w sformułowaniu aksjomatów. Sformułowana tam aksjomatyka jest więc na ogół nie wystarczająca, autorzy zaś pozbawiają się potężnego narzędzia. Często powstaje następująca paradoksalna sytuacja: nauczyciel bada z uczniami pewną figurę mającą oś symetrii, uczeń mający udowodnić równość dwu odcinków chciałby się oczywiście posłużyć ową symetrią — nauczyciel zabrania mu tego i poleca szukać dwu trójkątów przystających. Abstrahujmy tu od błędu pedagogicznego, którego dopuszcza się nauczyciel. Zwróćmy tylko uwagę, że z jednej strony zapomina on, iż jego dowód prawdziwości reguł przystawania trójkątów korzystał *implicite* z własności symetrii, z drugiej zaś strony przedstawia matematykę jako czczą zabawę, w której dla wykazania oczywistych faktów, trzeba uciekać się do innych, o znacznie mniejszym stopniu oczywistości.

Należy energicznie reagować na tę niechęć do symetrii i przyznać jej, od samego początku, poczesne miejsce, na które zasługuje.

Pozostaje nam jeszcze wyrazić w naszej aksjomatyce dodatniość iloczynu skalarnego. Trzeba tu skorzystać z pojęcia porządku w ciele skalarów — przyjmiemy w tym celu aksjomat głoszący, iż każda prosta jest uporządkowana. Dodatniość ta pozwala jednocześnie na określenie normy w przestrzeni i wprowadzenie odległości spełniającej warunek trójkąta. Zdecydowani jesteśmy na przyjęcie nierówności trójkąta jako dodatkowego aksjomatu, jeśli pozostałe nie będą dość silne aby ją zapewnić.

Przedstawimy tu dwie aksjomatyki oparte na przytoczonych wyżej przesłankach.

Pierwsza z nich kładzie szczególny nacisk na własności metryczne płaszczyzny: na pojęcie symetrii (1). Druga, wychodząca z afinicznego punktu widzenia, rozdziela starannie w aksjomatach pojęcia afiniczne i metryczne, pierwsza grupa aksjomatów wystarcza do całkowitego zbadania struktury wektorowej płaszczyzny (2).

Oba te układy aksjomatów posiadają jednak wspólny trzon złożony z aksjomatów incydencji I i aksjomatów porządku II. Aksjomaty te powinny naszym zdaniem figurować w każdej rozsądnej aksjomatyce płaszczyzny. Pragniemy zwrócić uwagę na aksjomat incydencji Ib, gło-

---

(1) Aksjomatyka ta stanowi przeróbkę innej, ogłoszonej uprzednio (Gustav Choquet, *O nauczaniu geometrii elementarnej*, w tomie „l'Enseignement des Mathématiques", Delachaux et Niestle, Neufchatel et Paris). Uproszczenia wprowadzone tutaj wynikają z przyjęcia aksjomatu incydencji Ib dotyczącego równoległych i z zamiany nierówności trójkąta nierównością ostrą. W obecnym wykładzie udało się uniknąć niezręczności poprzedniego, polegającej na określaniu prostych jako zbiorów izometrycznych z pewną daną prostą.

(2) W tłumaczonym fragmencie ograniczamy się tylko do podania pierwszej aksjomatyki (przyp. red.).

szący, że przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna równoległa do danej prostej. Postulat Euklidesa głosił: „przechodzi co najwyżej jedna prosta", istnienie jej można było wyprowadzić z pozostałych aksjomatów. Wydawało się nam, że połączenie w jednym aksjomacie istnienia z jednoznacznością przynosi duże uproszczenie wykładu. Jesteśmy przy tym zdania, że niewiele dzieci przed 16 rokiem życia odczuwa potrzebę dowodu istnienia równoległej, które jest dla nich faktem w tym samym stopniu wypływającym z eksperymentu co i jednoznaczność.

Będziemy zajmować się w tej pracy jedynie aksjomatyką płaszczyzny. Sformułujemy jednak kilka dodatkowych aksjomatów pozwalających wychodząc z płaszczyzny dojść do przestrzeni (3).

Oba układy aksjomatów będą się opierać na następującym schemacie: Płaszczyzna jest zbiorem, proste zaś pewnymi jej podzbiorami. Na każdej prostej jest określona struktura porządku i pewna struktura algebraiczna. Na ustalonej prostej obie struktury są powiązane pewnymi warunkami zgodności. Ponadto struktury na różnych prostych są powiązane wzajemnie odpowiednimi aksjomatami.

Aksjomaty incydencji natomiast, nie zakładają istnienia żadnej struktury na prostych; precyzują jedynie jak często spotyka się proste i pary równoległych.

Okaże się, że z aksjomatów grupy I i II wynikają już liczne własności, które zwykło się uważać za powiązane ze strukturą afiniczną lub metryczną płaszczyzny.

Część tekstu następująca po sformułowaniu aksjomatów nie stanowi skróconego wykładu geometrii elementarnej. Wprowadzone tam pojęcia (np. pojęcie kąta) bada się jedynie z grubsza. Nie można więc w żadnym wypadku traktować owego fragmentu jako początku podręcznika. Jest on przeznaczony dla nauczycieli, do których zwracamy się jako do matematyków, chcąc ich przekonać o identyczności określonej przez nas płaszczyzny z płaszczyzną klasyczną i zwrócić ich uwagę na możliwość dowodzenia w prosty sposób niektórych podstawowych twierdzeń.

Tylko doświadczenie na dużą skalę, oparte na dokładnym opracowaniu wskazanych tu dróg, pozwoli w dalszym ciągu zdecydować się na wybór pomiędzy dwoma przedstawionymi układami aksjomatów, z uwzględnieniem oczywiście możliwych wariantów.

3. Rola liczb w geometrii. Grecy przez bardzo długi okres czasu znali jedynie liczby wymierne, nawet po pamiętnym odkryciu niewymierności $\sqrt{2}$ nie umieli oni wprowadzić ogólnego pojęcia liczby. Pojęcie liczby nie przestało być dla nich związane z geometrią. Kontynuatorzy Euklidesa usiłowali ulepszyć jego dzieło rozwijając „rachunek odcinków",

(3) Sformułowanie tych aksjomatów nie znajduje się w tłumaczonym fragmencie tekstu (przyp. red.).

pozwalający, nie bez dużych trudności, odnaleźć, wychodząc z geometrii płaszczyzny, strukturę ciała w zbiorze liczb rzeczywistych.

Nie powinniśmy za żadną cenę popełniać tego błędu. Najwcześniej jak tylko można, uczeń powinien pojmować zbiór liczb jako uporządkowane ciało przemienne, tj. powinien sobie zdawać sprawę z tego, że wykonując rachunki korzysta jedynie z kilku własności dodawania i mnożenia — z tych mianowicie, które matematycy nazywają aksjomatami uporządkowanego ciała przemiennego.

Później, w miarę potrzeby można wprowadzić aksjomat Archimedesa (np. w postaci: dla każdej liczby można znaleźć większą od niej liczbę całkowitą), lub silniejszy aksjomat ciągłości (np. w sformułowaniu: każdy ciąg rosnący i ograniczony posiada kres górny).

Oczywiście można, nie korzystając z geometrii płaszczyzny, ilustrować za pomocą prostej badanie własności działań algebraicznych. Należy jednak wykluczyć uciekanie się do rachunku na odcinkach, korzystającego z takich pojęć geometrii płaszczyzny, jak np. proste równoległe, sieczne, czy nawet proste prostopadłe.

4. Wspólny trzon aksjomatyk płaszczyzny. Płaszczyzna jest zbiorem Π danym wraz z wyróżnioną rodziną $\mathscr{D}$ podzbiorów zwanych prostymi. Na każdej prostej zadane są pewne struktury, określone dokładniej zebranymi niżej aksjomatami. Związki pomiędzy strukturami na różnych prostych są określone za pomocą aksjomatów, które można by nazwać aksjomatami przejścia.

Dla uproszczenia będziemy zakładać od początku, że Π zawiera co najmniej dwie proste i że każda prosta zawiera co najmniej dwa punkty.

DEFINICJA 1. Mówimy, że dwie proste D_1 i D_2 leżące na Π są *równoległe* i piszemy $D_1 \parallel D_2$, gdy

$$D_1 = D_2 \quad \text{lub} \quad D_1 \cap D_2 = 0.$$

2. Dwie proste nierównoległe nazywamy *prostymi przecinającymi się*.

3. Mówimy, że prosta D *przechodzi przez punkt* a, gdy $a \in D$.

I. Aksjomaty incydencji.

AKSJOMAT I a. *Przez dwa różne punkty Π przechodzi dokładnie jedna prosta.*

AKSJOMAT I b. *Dla każdej prostej D i punktu a istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do D i przechodząca przez a.*

Jeśli a i b są różnymi punktami Π, to prosta przechodząca przez te punkty oznaczona jest symbolem $D(a, b)$.

Bezpośrednie wnioski.

1. Równoległość jest relacją równoważności w zbiorze D; każda z jej klas abstrakcji nosi nazwę kierunku. Istnieją co najmniej dwa kierunki.

2. Niech D będzie prostą, δ' zaś kierunkiem różnym od kierunku D. Dla każdego $m \in \Pi$, prosta o kierunku δ' przechodząca przez m przecina D w jednym tylko punkcie $\varphi(m)$. Przekształcenie φ płaszczyzny Π na D nazywa się rzutem skośnym Π na D równoległym do δ' (kiedy δ' jest kierunkiem prostej D', mówimy również „rzut równoległy do D'“).

3. Niech proste D_1 i D_2 przecinają się. Dla każdego $m \in \Pi$ oznaczmy przez m_1 i m_2 rzuty skośne m na D_1 i D_2, równoległe odpowiednio do D_2 i D_1. Przekształcenie $m \to (m_1, m_2)$ płaszczyzny Π na iloczyn kartezjański $D_1 \times D_2$ jest wzajemnie jednoznaczne. Parę D_1, D_2 nazywa się układem osi współrzędnych w Π.

Ćwiczenia [4].

1. Niech δ będzie danym kierunkiem; dla wszelkich $a, b \in \Pi$ mówimy, że $a \sim b$, gdy istnieje prosta o kierunku δ zawierająca a i b. Pokazać, że tak określona relacja dwuczłonowa jest równoważnością. Czym są jej klasy abstrakcji?

2. Pokazać, że dla każdej pary D_1, D_2 różnych prostych istnieje co najmniej jeden kierunek δ różny od kierunków D_1 i D_2. Wywnioskować stąd, używając rzutu skośnego, że wszystkie proste mają tę samą moc a. Pokazać, że zbiór kierunków ma moc $a+1$.

3. Niech K będzie ciałem przemiennym; prostą w K^2 nazywamy podzbiór K^2 określony związkiem postaci $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ ($a_1, a_2, b \in K$ i nie znikają jednocześnie). Pokazać, że K^2 z tak określonymi prostymi spełnia aksjomaty I.

4. Zbadać w szczególności przypadek K będącego ciałem przemiennym skończonym (np. ciałem liczb całkowitych modulo p, gdzie p jest liczbą pierwszą) i przypadek K równego ciału C liczb zespolonych.

II. Aksjomaty porządku.

Aksjomat II a. *Na każdej prostej D określone są dwie struktury porządku, jedna odwrotna do drugiej.*

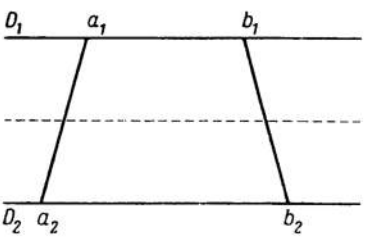
Prosta D z wybranym jednym z tych porządków nazywa się *prostą zorientowaną*. Gdy $a \neq b$, to wyrażenie prosta zorientowana $D(a, b)$ oznacza prostą $D(a, b)$ z wybranym tym porządkiem, w którym $a < b$. *Odcinkiem domkniętym* $[a, b]$ nazywamy zbiór $\{a\}$, gdy $a = b$, w przeciwnym zaś wypadku zbiór punktów x prostej $D(a, b)$ spełniających warunek $a \leqslant x \leqslant b$ przy dowolnie wybranej orientacji prostej $D(a, b)$. Mówimy, że x leży między a i b, gdy $x \in [a, b]$. Podobnie można określić przedziały otwarte oraz półproste domknięte i otwarte. Można również zdefiniować wypukłość: zbiór $X \subset \Pi$ jest *wypukły*, gdy wraz z każdą parą punktów a, b zawiera odcinek $[a, b]$.

---

[4] Większość ćwiczeń przeznaczona jest tylko dla nauczycieli, adaptowanie ich do użytku uczniów wymagałoby uprzedniego rozwinięcia pewnych tematów.

AKSJOMAT II b. *Dla każdej pary* (D_1, D_2) *prostych równoległych i różnych i dla każdej czwórki punktów* a_1, a_2, b_1, b_2 *takiej, że* $a_i, b_i \in D_i$ $(i = 1, 2)$, *każda prosta równoległa do dwu danych i przecinająca odcinek* $[a_1, a_2]$, *przecina także odcinek* $[b_1, b_2]$.

Aksjomat II b ma rozmaite równoważne sformułowania, jednym z nich jest klasyczny aksjomat Pascha (każda prosta przecinająca jeden z boków trójkąta przecina także jeden z dwu pozostałych). Wydaje się nam, że sformułowanie II b jest bardziej intuicyjne.



Bezpośrednie wnioski z aksjomatów I i II.

1. Niech D_1 i D_2 będą dwiema prostymi zorientowanymi; przy dowolnym wyborze kierunku δ różnego od D_1 i D_2, rzutowanie skośne D_1 na D_2 równoległe do δ jest izomorfizmem lub antyizomorfizmem (ze względu na porządek).

Twierdzenie to jest konsekwencją II b, dokładniej mówiąc jest mu ono równoważne.

2. Każda prosta D wyznacza jednoznacznie podział zbioru $(\Pi - D)$ na dwa zbiory wypukłe A_1 i A_2. Dokładniej, A_1 i A_2 są klasami abstrakcji następującej relacji równoważności określonej w $\Pi - D$:

$$a \sim b, \quad \text{gdy} \quad [a, b] \cap D = 0.$$

Zbiory A_1 i A_2 nazywa się półpłaszczyznami otwartymi. Zbiory $A_1 \cup D$ i $A_2 \cup D$, zwane półpłaszczyznami domkniętymi, są również wypukłe.

Podstawowy ten wynik można otrzymać jak następuje: niech D' będzie prostą przecinającą D, oznaczmy przez D'_1 i D'_2 półproste otwarte D' o początku w $D \cap D'$. Oznaczmy przez A_i $(i = 1, 2)$ sumę prostych równoległych do D, które przecinają D'_i. Z aksjomatu II b wynika natychmiast, że A_1 i A_2 są szukanymi klasami abstrakcji.

Ćwiczenia.

5. Dowieść, że z wyłączeniem przypadku, gdy moc prostych (zob. ćwicz. 2) jest równa 2 (Π jest wówczas izomorficzne ze zbiorem K^2, gdzie K jest ciałem liczb całkowitych modulo 2) liczba a jest nieskończona. Pokazać, że to samo można powiedzieć o mocy półprostej i każdego niepustego odcinka otwartego. Dokładniej, pokazać, że każda półprosta i odcinek otwarty są izomorficzne (ze względu na porządek) z prostą.

6. Przyjmujemy, że $a \neq 2$. Dowieść, że każda półpłaszczyzna otwarta jest niepusta. Dowieść, że uwypuklenie dowolnego zbioru skończonego (najmniejszy zbior wypukły zawierający ten zbiór) jest przecięciem skoń-

czonej rodziny domkniętych półpłaszczyzn. W szczególności uwypuklenie trójki punktów niewspółliniowych $\{a, b, c\}$ nazywa się *sympleksem* (a, b, c).

7. Podać kilka definicji równoważnych pasa płaskiego wyznaczonego przez dwie proste równoległe D_1 i D_2. W dalszym ciągu przez kierunek pasa będziemy rozumieć kierunek prostych definiujących ten pas.

8. Niech $\{0, a, b\}$ będzie trójką punktów niewspółliniowych na Π; niech $a' \in [0, a]$ i $b' \in [0, b]$. Pokazać, że dla każdego $m \in [a, b]$ odcinki $[0, m]$ i $[a', b']$ przecinają się. Wywnioskować stąd, że suma odcinków $[0, x]$ łączących punkt 0 z punktami ustalonego zbioru wypukłego X, jest zbiorem wypukłym. Uogólnić otrzymany wynik, rozważając sumę odcinków łączących punkty dwu danych zbiorów wypukłych.

9. Mówimy, że zbiór $X \subset \Pi$ jest *ograniczony*, jeśli dla każdego kierunku δ istnieje pas o kierunku δ zawierający X. Pokazać, że każdy zbiór skończony jest ograniczony. Pokazać, że gdy X zawarty jest w iloczynie dwu pasów mających różne kierunki, to X jest ograniczony. Dowieść, że każdy zbiór ograniczony zawarty jest w pewnym sympleksie.

10. a) Zdefiniować za pomocą odcinków otwartych topologię na prostej.

b) Niech D_1 i D_2 będą dwoma przecinającymi się prostymi. Korzystając z identyfikacji Π z $D_1 \times D_2$ wprowadzić w Π topologię iloczynu, wychodząc z topologii określonych na D_1 i D_2. Dowieść, że topologia ta nie zależy od wyboru D_1 i D_2.

11. Niech $X \subset \Pi$ i $a, b \in X$; przyjmiemy $a \sim b$ jeśli istnieje łamana o końcach a i b złożona z odcinków zawartych w X. Tak określona relacja jest równoważnością; jej klasy abstrakcji noszą nazwę składowych zbioru X.

Niech P będzie łamaną zamkniętą bez punktów podwójnych, tj. taką której dwa nie następujące po sobie odcinki są rozłączne; oznaczmy przez C kontur P (sumę wszystkich boków P). Pokazać, że $\Pi - C$ ma dokładnie dwie składowe, że jedna z nich jest ograniczona i że każda z nich jest otwarta w topologii określonej w Π. Pokazać, że każdy punkt C należy do domknięcia obu składowych (twierdzenie Jordana).

Rozwiązanie jest elementarne, ale nie trywialne. Radzimy wybrać kierunek δ, nierównolegly do żadnego z boków łamanej i przeprowadzić przez wierzchołki P proste równoległe do δ. Po uporządkowaniu zbioru tych równoległych zbadać co się dzieje w wyznaczonych przez nie kolejno pasach.

12. Niech K będzie uporządkowanym ciałem przemiennym

$$\big(a \leqslant b \Rightarrow a + x \leqslant b + x \text{ oraz } (0 \leqslant x, 0 \leqslant y) \Rightarrow (0 \leqslant xy)\big).$$

Określić w K^2 strukturę płaszczyzny spełniającą aksjomaty I i II (porównać z zadaniem 3). Podać przykład takiego ciała K, nie zawierającego się w ciele R liczb rzeczywistych.

13. Niech Π będzie dyskiem otwartym klasycznej płaszczyzny R^2. Nazwijmy „prostą" w Π każdy otwarty łuk koła zawarty w Π, którego końce są jednocześnie końcami pewnej średnicy Π i wprowadzimy na nim naturalną strukturę porządku.

Dowieść, że Π spełnia aksjomaty I i II, ale nie jest izomorficzne (ze względu na porządek) z płaszczyzną R^2, chociaż każda z „prostych" w Π jest izomorficzna z R.

Zbudować podobnie dalsze przykłady w dysku Π, przyjmując za rodziny „prostych" pewne, niezmiennicze ze względu na obrót, rodziny łuków, których końce są końcami pewnej średnicy Π. W celu sprawdzenia, czy otrzymane w ten sposób płaszczyzny są izomorficzne z płaszczyzną klasyczną radzimy skorzystać z klasycznych własności siatki zbudowanej przy pomocy dwu par prostych równoległych.

5. Aksjomatyka oparta na własnościach metrycznych. Akjomatyka ta składa się z aksjomatów I i II, z aksjomatu III, opisującego strukturę addytywną i metryczną, oraz z aksjomatu symetrii IV.

III. Aksjomat struktury addytywnej i metrycznej.

W aksjomacie tym interweniuje pojęcie liczby rzeczywistej, trzeba więc w tym miejscu zakładać u ucznia znajomość własności ciała R. Przedstawione niżej rozumowanie pokazuje, że używając jedynie struktury grupy addytywnej uporządkowanej w R, można uzyskać mocne wyniki. Można otrzymać na tej drodze strukturę wektorową w Π i udowodnić podstawowe własności iloczynu skalarnego, trzeba korzystać dodatkowo jedynie z faktu, że R jest uporządkowane archimedesowsko. Z uwagi tej wynika, że można będzie, w nauczaniu dzieci pomiędzy 12 i 16 rokiem życia, uniknąć korzystania z zupełności ciała R i z pojęć kresu górnego, przekroju, ciągu rosnącego oraz ciągu Cauchy.

Aksjomat III. *W* $\Pi \times \Pi$ *określone jest przekształcenie* d *o wartościach w* R_+, *zwane odległością, takie, że*:

a) $d(y, x) = d(x, y)$ *dla wszelkich* x *i* y.

b) *Dla każdej prostej* D, *punktu* $a \in D$ *i liczby* $l > 0$, *istnieje w* D, *po dowolnej stronie* a, *punkt* b *taki, że* $d(a, b) = l$.

c) $(x \in [a, b]) \Rightarrow \big(d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\big)$.

d) *Dla każdej niewspółliniowej trójki punktów* $\{a, x, b\}$ *mamy* $d(a, b) < d(a, x) + d(x, b)$ (*ostra nierówność trójkąta*).

Bezpośrednie wnioski z aksjomatów I, II i III.

1. Równość $a = b$ równoważna jest warunkowi $d(a, b) = 0$. (wniosek z III a, b, c).

2. Dla każdych trzech punktów $a, x, b \in \Pi$ mamy

$$d(a,b) \leqslant d(a,x)+d(x,b),$$

równość równoważna jest warunkowi $x \in [a,b]$.

3. Niech $X \subset \Pi$; przekształcenie f określone na X, o wartościach w Π nazywa się *izometrią*, gdy

$$(a, b \in X) \Rightarrow d(a,b) = d\big(f(a), f(b)\big).$$

Z wniosku 2 wynika, że izometria zachowuje liniowość trójki i relację „między".

Wynika stąd, że przy izometrii odcinki przechodzą na odcinki, proste na proste, proste równoległe na proste równoległe, oraz półpłaszczyzny na półpłaszczyzny.

Każda izometria Π w Π jest przekształceniem na całe Π. Jest ona izomorfizmem ze względu na strukturę określoną aksjomatami I, II, III.

Ćwiczenia.

14. Niech A_1 i A_2 będą dwoma wielokątami wypukłymi i ograniczonymi, załóżmy że $A_1 \subset A_2$. Pokazać, że oznaczając przez l_1 i l_2 odpowiednio długości ograniczających je łamanych, mamy $l_1 \leqslant l_2$ oraz $l_1 < l_2$, gdy $A_1 \neq A_2$.

Własność ta pozwala na proste określenie długości obwodu zbiorów ograniczonych i wypukłych.

Podamy teraz pewną definicję pozwalającą sformułować zręcznie aksjomat IV. Oznaczmy przez $\Pi_1(D)$ i $\Pi_2(D)$ półpłaszczyzny otwarte wyznaczone przez prostą D. *Odbiciem* względem prostej D nazywamy dowolną izometrię φ zbioru $D \cup \Pi_1(D)$ na $D \cup \Pi_2(D)$, przy której dla $x \in D$ mamy, $\varphi(x) = x$.

IV. Aksjomat odbicia (symetrii). *Dla każdej prostej D istnieje co najmniej jedno odbicie względem D.*

Pokażemy zaraz, że istnieje tylko jedno odbicie względem D. Ponieważ dowód tego faktu jest bardzo prosty nie włączamy go do sformułowania aksjomatu.

Podstawowe twierdzenia wynikające z aksjomatów I, II, III i IV.

Lemat 1. *Dla każdej prostej D istnieje dokładnie jedno odbicie względem D.*

Niech $\Pi_1(D)$ i $\Pi_2(D)$ będą półpłaszczyznami otwartymi wyznaczonymi przez D. Niech φ będzie odbiciem względem D, i niech $a \in \Pi_1(D)$, położmy $a' = \varphi(a)$. Odcinek $[a, a']$ ma z prostą D punkt wspólny p.

Każdy punkt $m \in D$, różny od p leży poza odcinkiem $[a, a']$, przeto:

$$d(a, a') < d(a, m) + d(m, a') = 2d(a, m).$$

Ale $d(a, a') = 2d(a, p)$, skąd wynika, że $d(a, p) < d(a, m)$.

Własnością charakterystyczną punktu p jest to, że, niezależnie od wyboru φ, jest on punktem prostej D leżącym najbliżej punktu a. Punkt p nazywa się rzutem prostopadłym lub krótko rzutem punktu a na D. Rzut punktu a jest środkiem odcinka $[a, a']$. Punkt a' więc, obraz symetryczny a względem punktu p na prostej przechodzący przez a i p nie zależy od wyboru φ, innymi słowy, φ jest wyznaczone jednoznacznie.

Oznaczmy przez $\hat{\varphi}$ przedłużenie φ na całe Π określone wzorem:

$$\hat{\varphi}(m) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{gdy} \quad m \in D \cup \Pi_1(D), \\ \varphi^{-1}(m), & \text{gdy} \quad m \in D \cup \Pi_2(D). \end{cases}$$

LEMAT 2. *Przedłużenie $\hat{\varphi}$ przekształcenia φ jest izometrią Π na całe Π. Izometria ta nosi nazwę symetrii względem D.*

Oczywistym jest, że $\hat{\varphi}$ przekształca Π na Π.

Niech $a, b \in \Pi$.

Jeśli $a, b \in D \cup \Pi_1(D)$, to $d\big(\hat{\varphi}(a), \hat{\varphi}(b)\big) = d(a, b)$, bo $\hat{\varphi} = \varphi$ na $\{a, b\}$.

Gdy $a, b \in D \cup \Pi_2(D)$, to sytuacja jest identyczna. Załóżmy więc, że $a \in \Pi_1(D)$ i $b \in \Pi_2(D)$. Niech $m = D \cap [a, b]$, przyjmijmy $a' = \hat{\varphi}(a)$, $b' = \hat{\varphi}(b)$.

Mamy: $d(m, a) = d(m, a')$; $d(m, b) = d(m, b')$, a więc

$$d(a', b') \leqslant d(a', m) + d(m, b') = d(a, m) + d(m, b) = d(a, b).$$

Wnosimy stąd, że $d(a', b') \leqslant d(a, b)$.

Podobnie można wykazać, że $d(a, b) \leqslant d(a', b')$, co kończy dowód żądanej równości $d(a, b) = d(a', b')$.

Prostopadłe i rzuty.

DEFINICJA. Mówimy, że prosta D' jest *prostopadła* do prostej D i piszemy $D' \perp D$, gdy $D' \neq D$ i D' jest identyczna ze swoim obrazem przez symetrię względem D.

Z lematu 4 wyniknie, że relacja prostopadłości jest symetryczna. Oczywiste jest, że przez punkt m poza prostą D przechodzi dokładnie jedna prostopadła do D, mianowicie prosta łącząca m z jego obrazem symetrycznym względem D.

LEMAT 3. 1) *Gdy $D' \perp D$, to $D' \cap D \neq 0$.* 2) *Gdy D i D' są dwiema przecinającymi się w punkcie p prostymi, to następujące warunki są równoważne*

a) $D' \perp D$,

b) *rzutem każdego punktu D' na prostą D jest p,*

c) *istnieje punkt na D', różny od p, którego rzutem na D jest p.*

Dowód. 1) Prosta D' zawiera co najmniej dwa różne punkty m_1, m_2, symetryczne względem D. Odcinek $[m_1, m_2]$ przecina się z D.

2) Niech $D' \perp D$ i $m \in D'$. Punkt m' symetryczny do m względem D leży na D', punkt $D \cap [m, m']$, to jest rzut punktu m na D, jest więc równy p.

Niech teraz D i D' przecinają się w punkcie p i niech m będzie różnym od p punktem D'. Jeśli rzutem m na D jest p, to, oznaczając przez m' punkt symetryczny do m względem D, mamy $[m, m'] \cap D = p$. Prosta D' więc, zawierająca punkty różne p i m zawiera również m'; wynika stąd, że $D' \perp D$.

Wniosek. Jeśli $D' \perp D$ i f jest izometrią określoną na zbiorze $D' \cup D$, to wówczas $f(D') \perp f(D)$.

Wniosek wypływa z faktu, że dzięki lematowi 3, można wyrazić fakt prostopadłości w języku odległości.

Lemat 4. *Gdy $D' \perp D$, to $D \perp D'$.*

Dowód. Niech będzie $D' \perp D$, i niech p będzie przecięciem D i D'. Weźmy punkt $m \in D$; dla każdego punktu $m' \in D'$, różnego od p, mamy $d(m, m') = d(m, m'')$, gdzie m'' oznacza punkt symetryczny do m' względem D.

Punkt m' nie może więc być rzutem m na D' (istnieje jedno tylko minimum). Rzutem jest więc p, skąd na mocy lematu 3 mamy $D \perp D'$.

Lemat 5. *Niech $D \perp D'$. Mamy wówczas:*

$$(D \perp D'') \Leftrightarrow (D' \parallel D'').$$

Dowód. 1) Niech $D \perp D'$ i $D' \parallel D''$. Proste D i D'' przecinają się w punkcie p. Obrazy D' i D_1'' przez symetrię względem prostej D równoległych D' i D'' są równoległe (bezpośredni wniosek 2 z aksjomatów III). D'' i D_1'' są więc równoległe i mają punkt wspólny p. Mamy przeto $D'' = D_1''$, oraz $D \perp D''$.

2) Niech $D \perp D'$ i $D \perp D''$. Niech m będzie punktem D'' leżącym poza D. Prosta równoległa do D' przeprowadzona przez m jest, na mocy poprzedniego, prostopadła do D. Musi więc ona być identyczna z D', bo przez punkt poza prostą przechodzi jedna tylko prostopadła. Inaczej mówiąc $D' \parallel D''$.

Wniosek. Niech δ_1 i δ_2 będą dwoma kierunkami. Mówimy, że kierunki te są prostopadłe, jeśli istnieją proste prostopadłe D_1 i D_2 o kierunkach δ_1 i δ_2. Z lematów 4 i 5 wynika, że

1) tak określona relacja jest symetryczna, przeciwzwrotna (nie zachodzi nigdy $\delta \perp \delta$) i do każdego kierunku δ istnieje dokładnie jeden kierunek prostopadły,

2) na to by dwie proste były prostopadłe potrzeba i wystarcza, by były prostopadłe ich kierunki.

Uwaga. Wynika stąd, że przekształcenie przyporządkowujące każdemu punktowi $m \in \Pi$ jego rzut prostopadły na ustaloną prostą D jest rzutem skośnym na D, równoległym do kierunku prostopadłego do kierunku D.

Definicja. Niech a i b będą dwoma różnymi punktami, niech 0 będzie ich środkiem. *Symetralną* pary (a, b) nazywamy prostą prostopadłą do $D(a, b)$ i przechodzącą przez 0.

Lemat 6. *Niech a i b będą punktami różnymi, D zaś symetralną pary (a, b). Niech Π_a i Π_b będą otwartymi półpłaszczyznami wyznaczonymi przez D i zawierającymi odpowiednio punkty a i b. Mamy wówczas:*

$$(m \in D) \Rightarrow \big(d(m, a) = d(m, b)\big)$$

$$(m \in \Pi_a) \Rightarrow \big(d(m, a) < d(m, b)\big); \qquad (m \in \Pi_b) \Rightarrow \big(d(m, b) < d(m, a)\big).$$

Ponieważ a i b są symetryczne względem D, mamy

$$(m \in D) \Rightarrow \big(d(m, a) = d(m, b)\big).$$

Gdy $m \in \Pi_a$, to podstawiając $n = D \cap [m, b]$ mamy (ponieważ na mocy wypukłości Π_a $n \notin [a, m]$),

$$d(m, a) < d(m, n) + d(n, a) = d(m, n) + d(n, b) = d(m, b).$$

Dla $m \in \Pi_b$ rozumowanie przebiega tak samo.

Wniosek 1. $(m \in D) \Leftrightarrow \big(d(m, a) = d(m, b)\big)$.

Wniosek 2 (porównywanie rzutów).

Niech p będzie rzutem punktu m na prostą przechodzącą przez punkty a i b.

Uporządkowanie pary liczb $d(p, a)$ i $d(p, b)$ jest takie samo jak uporządkowanie pary $d(m, a)$, $d(m, b)$.

Istotnie, w zależności od tego czy $d(p, a) - d(p, b)$ jest zerem, liczbą ujemną czy dodatnią, punkt m należy do D, Π_a lub Π_b.

Wynik ten można wysłowić jak następuje:

Długość odcinka łączącego punkt m z punktem prostej D jest funkcją ściśle rosnącą długości jego rzutu na D.

Ilościowym odpowiednikiem powyższego jest twierdzenie Pitagorasa.

Wniosek 3. Niech $\{0, a, b\}$ będzie trójkątem i niech $d(0, a) = d(0, b)$ oraz $a \neq b$. Rzut punktu 0 na prostą $D(a, b)$ jest środkiem odcinka $[a, b]$.

Wniosek 3 jest natychmiastową, lecz niezmiernie ważną konsekwencją wniosku 2. Można go sformułować jeszcze inaczej.

W trójkącie, którego dwa boki wychodzące z 0 są równe, wysokość spuszczona z 0 jest osią symetrii trójkąta.

Symetria względem punktu. Złożenie symetrii.

DEFINICJA. *Symetrią* względem punktu $0 \in \Pi$ nazywamy przekształcenie f płaszczyzny Π na siebie określone jak następuje:

$$f(0) = 0, \text{ zaś dla } x \neq 0 \; f(x) = x',$$

gdzie x' jest takim punktem prostej $D(0, x)$, że 0 jest środkiem pary $(x, f(x))$.

Z definicji wynika natychmiast, że f^2 jest tożsamością oraz, że $f(D) = D$, dla każdej prostej D przechodzącej przez 0.

TWIERDZENIE 1. *Symetria względem punktu* 0 *jest identyczna ze złożeniem symetrii względem dwu dowolnych prostych prostopadłych, przechodzących przez* 0.

Dowód. Niech D_1 i D_2 będą dwoma prostopadłymi przechodzącymi przez 0. Niech $m \in (D_1 \cup D_2)$. Oznaczmy przez Δ_1 i Δ_2 proste równoległe do D_1 i D_2, przechodzące przez m. Niech Δ_i' będzie obrazem Δ_i przez symetrię względem D_i $(i = 1, 2)$.

Prostokąt utworzony przez dwie pary równoległych Δ_1, Δ_1' i Δ_2, Δ_2' jest symetryczny względem prostych D_1 i D_2. Jego przekątne są więc również symetryczne względem tych dwu prostych — muszą się zatem przecinać w punkcie leżącym na D_1 i D_2, a więc w punkcie 0, który je przy tym połowi. Obrazem symetrycznym m względem 0 jest przeciwległy wierzchołek prostokąta. Do tego samego wierzchołka dochodzi się od m, wykonując najpierw symetrię względem D_1, a później względem D_2.

Gdy $m \in D_1 \cup D_2$, fakt ten jest oczywisty.

Wniosek. Symetria względem punktu jest izometrią. Proste i ich obrazy są równoległe. (Zbadać najpierw przypadek prostej przechodzącej przez 0.)

Zastosowanie. Nazwijmy równoległobokiem dowolny czworobok (a, b, a', b'), którego pary przeciwległych wierzchołków (a, a') i (b, b') mają wspólny środek.

Z powyższego wniosku wynika, że czworobok niezdegenerowany $\{a, b, a', b'\}$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy jego wierzchołki są parami różne i

$$D(a, b) \parallel D(a', b') \quad \text{oraz} \quad D(a, b') \parallel D(a', b).$$

Z drugiej strony środkiem symetrii każdego równoległoboku jest wspólny środek przekątnych, jego przeciwległe boki muszą więc być parami równe.

LEMAT 7. *Niech D, D' i A będą trzema prostymi równoległymi.*

1) *Jeśli prosta D' jest obrazem D przy symetrii względem A, to dla każdej prostej przecinającej D, D' i A w punktach m, m' i a, punkt a jest środkiem pary (m, m').*

2) *Na odwrót, jeśli istnieje prosta o tej własności, to D' jest obrazem D przy symetrii względem A.*

Dowód. 1) Niech D, D' będą symetryczne względem A i niech pewna prosta przecina je odpowiednio w punktach m, m' i a. Oznaczmy przez B prostopadłą do A przechodzącą przez a. Złożenie symetrii względem A i B przeprowadza D na D', na mocy więc twierdzenia 1, proste te są symetryczne względem punktu a. Punkt a jest więc środkiem pary (m, m').

2) Gdy a jest środkiem (m, m'), to D' jest symetryczna do D względem a. D zaś jest symetryczna względem B. Na mocy twierdzenia 1 i wniosku, wnosimy, że obraz D przez symetrię względem A jest identyczny z obrazem przez symetrię względem a, obrazem tym jest więc D'.

TWIERDZENIE 2 (słabe twierdzenie Talesa). *Jeśli pewna prosta przecina proste D, D' i A w punktach m, m' i a odpowiednio, tak, że a jest środkiem (m, m'), to każda inna przecinające je prosta ma również tę własność (inaczej mówiąc D i D' są wówczas symetryczne względem dowolnego punktu prostej A).*

Twierdzenie 2 wynika natychmiast z lematu 7.

Wniosek. Dla każdego całkowitego $n \geqslant 2$, dowolny odcinek można podzielić (dokładnie w jeden sposób) na n kolejnych równych odcinków.

(Klasyczna konstrukcja, korzystająca z rodziny równoległych przechodzących przez punkty rozmieszczone w równych odległościach na pewnej prostej pomocniczej.)

Możemy obecnie przystąpić do badania struktury afinicznej płaszczyzny.

6. Struktura przestrzeni wektorowej płaszczyzny *II* z wyróżnionym punktem. W rozdziale tym będziemy korzystać jedynie z aksjomatów I, II, III a-c, oraz ze słabego twierdzenia Talesa (twierdzenie 2). Można rozumieć go więc jako fragment teorii opartej na aksjomatach I, II, IIIa-c i słabym twierdzeniu Talesa przyjętym jako aksjomat.

LEMAT 8. *Niech D będzie dowolną prostą, zaś φ rzutowaniem skośnym na D, równoległym do δ. Mamy wtedy*

$$\big(0 \text{ jest środkiem } (a, b)\big) \Rightarrow \big(\varphi(0) \text{ jest środkiem } \big(\varphi(a), \varphi(b)\big)\big).$$

Lemat 8 wynika natychmiast z twierdzenia 2.

Wniosek. Rzut $\big(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(a'), \varphi(b')\big)$ dowolnego równoległoboku (a, b, a', b') jest równoległobokiem (zdegenerowanym).

Struktura addytywna płaszczyzny Π z wyróżnionym punktem.

Skorzystamy obecnie z faktu, że w zbiorze R liczb rzeczywistych jest określona struktura grupy addytywnej. Na każdej prostej zorientowanej, z wyróżnionym punktem 0 można określić kanonicznie strukturę grupy addytywnej izomorficzną z R. Działanie (m oznacza środek a, b) wyraża się wówczas wzorem $2m = a+b$. Fakt, że $\{0, a, b, c\}$ jest zdegenerowanym równoległobokiem jest równoważny związkowi $0+b = a+c$, lub $b = a+c$.

DEFINICJA. Niech 0 będzie wyróżnionym punktem Π. Będziemy nazywać go w dalszym ciągu początkiem Π. Punkty płaszczyzny z wyróżnionym początkiem będziemy nazywać *wektorami*.

Dla każdej pary (a, b) punktów Π, oznaczamy przez $a \top b$ taki punkt z Π, że $(0, a, a \top b, b)$ jest równoległobokiem, tj. punkt symetryczny do 0 względem środka odcinka $[a, b]$.

TWIERDZENIE 3. *Płaszczyzna z działaniem* $\top$ *jest grupą przemienną. Każda prosta przechodząca przez* 0 *jest jej podgrupą.* Π *jest sumą prostą dwu dowolnych różnych prostych przechodzących przez* 0. *Proste nie przechodzące przez początek są warstwami względem prostych przechodzących przez* 0.

Dowód. Niech D_1 i D_2 będą dwoma różnymi prostymi przechodzącymi przez 0. Każdemu $m \in \Pi$ przyporządkujmy jego składowe — rzuty skośne m_1 i m_2 na proste D_1 i D_2, równoległe do D_2 i D_1 odpowiednio.

Wniosek z lematu 8 gwarantuje, że $(a \top b)_i = a_i \top b_i \quad (i = 1, 2)$. Na prostych D_1 i D_2 jednakże, operacja $\top$ jest zwyczajnym dodawaniem, jeśli początek 0 traktować jako ich punkt wyróżniony.

Ponieważ każdy punkt Π jest jednoznacznie wyznaczony przez składowe, nietrudno sprawdzić, że operacja $\top$ ma wszystkie własności działania w grupie przemiennej.

Fakt, że każda prosta przechodząca przez 0 stanowi podgrupę, jest oczywisty. Z drugiej strony, każdy wektor m daje się przedstawić jednoznacznie w postaci $m = m_1 \top m_2$, Π jest więc sumą prostą D_1 i D_2.

Niech będzie dana prosta D przechodząca przez 0 i punkt $a \in \Pi$. Jeśli $a \in D$, to oczywiście $D \top a = D$. Oznaczmy, gdy $a \neq D$, przez D' prostą równoległą do D i przechodzącą przez a. Kierunek δ prostej przechodzącej przez 0 i a jest różny od kierunku D. Rzutowanie więc φ prostej D na D', równolegle do δ jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym D na D'. Dla każdego $x \in D$, $(0, a, \varphi(x), x)$ jest równoległobokiem, a więc $\varphi(x) = x \top a$, czyli $D' = \varphi(D) = D+a$.

Gdy natomiast dla dowolnej prostej D' nie przechodzącej przez 0, oznaczyć przez D prostą o tym samym kierunku przechodzącą przez 0, to, jak widzieliśmy, dla każdego $a \in D'$, $D' = D \top a$.

Uwaga. W powyższym dowodzie nie korzystaliśmy ze struktury porządku, lecz jedynie ze struktury addytywnej prostych. Nic więc dziwnego, że twierdzenie 3 pozostaje w mocy dla „płaszczyzn" spełniających aksjomat I, których każda prosta ma strukturę przestrzeni jednorodnej wyznaczonej przez grupę przemienną taką, że dla dowolnego a $a+a \neq 0$. Struktury różnych prostych mają być przy tym związane aksjomatem II b (patrz niżej)(5).

Jeśli chcemy się posunąć dalej i zbadać strukturę afiniczną Π, to musimy skorzystać już z faktu, że R jest uporządkowanym po archimedesowsku ciałem. Przypomnimy na czym polega porządek archimedesowski:

Dla każdej pary α, β liczb >0 istnieje liczba całkowita $n>0$ taka, że $n\alpha > \beta$.

Będziemy używać następującego sformułowania tej własności.

LEMAT 9. *Oznaczmy przez Q zbiór liczb wymiernych ($Q \subset R$). Niech a będzie liczbą większą od zera, φ zaś przekształceniem $x \to ax$ prostej R na siebie. Każde przekształcenie ψ rosnące, tj. takie, że $(x<y) \Rightarrow (\psi(x) < \psi(y))$ identyczne z φ na Q jest identyczne z φ na R.*

Dowód. Przekształcenie ψ/a zbioru R w siebie jest rosnące i jest tożsamością na Q. Niech $x \notin Q$, ponieważ ψ/a jest rosnące, więc każda liczba wymierna znajduje się na lewo od liczb x i $\psi(x)/a$, lub też na prawo od nich. Żadna liczba wymierna nie jest więc zawarta pomiędzy x i $\psi(x)/a$. Wynika stąd, że $\psi(x)/a = x$, gdyż w przeciwnym razie istniałaby liczba całkowita $q>0$ taka, że $q\,|\,x-\psi(x)/a\,| > 1$ i pewna liczba wymierna postaci p/q musiałaby być zawarta pomiędzy x i $\psi(x)/a$.

Mnożenie przez skalary.

Definicja którą przyjmiemy opierać się będzie na istnieniu struktury wektorowej na każdej prostej z wyróżnionym początkiem.

DEFINICJA. Na płaszczyźnie Π z początkiem 0 określamy dla każdej liczby λ, przekształcenie $x \to \lambda x$, przyjmując:

1) $\lambda \cdot 0 = 0$

2) gdy $x \neq 0$, to λx jest iloczynem x przez λ w przestrzeni wektorowej prostej $D(0, x)$ z początkiem 0.

Własności iloczynu skalarnego.

1) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$,

2) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

3) $1 \cdot x = x$.

Dodajmy jeszcze, że $(-1)x = x'$, jest punktem symetrycznym do x względem początku 0.

Własności powyższe wynikają natychmiast z własności struktury wektorowej na prostej $D(0, x)$.

(5) Odsyłacz do nietłumaczonej części tekstu (przyp. red.).

W dalszym ciągu będziemy korzystać z następującego lematu, który, jak łatwo sprawdzić, jest po prostu klasycznym twierdzeniem Talesa. Niech m_1 i m_2 oznaczają jak poprzednio składowe punktu m względem dwu przechodzących przez 0 prostych D_1 i D_2.

LEMAT 10. *Dla każdej liczby* $\lambda \in R$ *i dla każdego* x *mamy*: $(\lambda x)_1 = \lambda x_1$.

Udowodnimy najpierw nasz lemat przy założeniu, że λ jest wymierne: dla każdego q całkowitego mamy $(qu)_1 = qu_1$, skąd

$$\left(\frac{1}{q}v\right)_1 = \frac{1}{q}v_1 \quad \text{i ostatecznie} \quad \left(\frac{p}{q}x\right)_1 = \frac{p}{q}x_1.$$

Rozpatrzmy obecnie przypadek ogólny. Gdy $x \in (D_1 \cup D_2)$ lemat jest spełniony. Załóżmy więc, że $x \notin D_1 \cup D_2$ (jest to dokładnie przypadek klasycznego twierdzenia Talesa).

Mamy wtedy $x \neq 0$ i $x_1 \neq 0$. Zorientujmy proste $D(0, x) = D$ i i $D(0, x_1) = D_1$ w ten sposób, żeby $0 < x$ i $0 < x_1$.

Przekształcenie $\lambda \to \lambda x$ zbioru R w D jest rosnące, przekształcenie $m \to m_1$ prostej D w D_1 jest również rosnące (wniosek 1 z aksjomatów I i II). Przekształcenie $\lambda \to (\lambda x)_1$ jest więc również rosnące i jego wartości dla λ wymiernych są identyczne z wartościami przekształcenia rosnącego $\lambda \to \lambda x_1$. Na mocy więc lematu 9 (gdzie D_1 podstawiono w miejscu R), przekształcenia te są identyczne.

Wniosek. Prawdziwa jest tożsamość

4) $\lambda(x \top y) = \lambda x \top \lambda y$ dla wszelkich $x, y \in \Pi$.

Istotnie, $\lambda(x \top y) = (\lambda(x \top y))_1 + (\lambda(x \top y))_2 = (\lambda x_1 \top \lambda y_1) + (\lambda x_2 \top \lambda y_2) =$
$= \lambda(x_1 \top x_2) + \lambda(y_1 \top y_2) = \lambda x \top \lambda y.$

TWIERDZENIE 4. *Płaszczyzna* Π *z początkiem* 0 *dodawaniem* $\top$ *i mnożeniem przez skalary rzeczywiste jest dwuwymiarową przestrzenią wektorową. Jej jednowymiarowymi podprzestrzeniami afinicznymi są proste.*

W istocie, proste D_1 i D_2 są jednowymiarowymi podprzestrzeniami wektorowymi i Π jest ich sumą prostą. Pozostała część tezy jest już dowiedziona.

Ważne konsekwencje twierdzenia 4.

Możemy odtąd posługiwać się przy badaniu płaszczyzny metodami algebraicznymi. Wyliczymy kilka kierunków badań, w których metody te przynoszą znaczne uproszczenia:

1. Można rozpocząć badanie przesunięć określonych jako przekształcenia postaci $x \to x + a$. Jest jasne jak słońce, że stanowią one grupę izomorficzną z płaszczyzną Π z wyróżnionym początkiem.

Można przy ich pomocy określić poprawnie pojęcie równoległości prostych zorientowanych i następnie kierunków zorientowanych.

2. Jednokładności $x \to \lambda x + a$ (gdzie $\lambda \neq 0$) można będzie badać systematycznie, w sposób prosty i elegancki, a nie, jak to się zwykle

robi, przypadkowo i niezbyt ściśle. Rzuca się w oczy struktura grupowa jednokładności, jej ważne podgrupy ($\lambda = 1$, $\lambda = \pm 1$, $a = 0$). Można bez trudu znajdować środki jednokładności.

3. Definicja i wygodne badanie środków ciężkości; działania na zbiorach wypukłych.

4. Łatwe dojście do pojęć formy liniowej, funkcji afinicznej, przekształcenia liniowego płaszczyzny.

5. Pojęcie pola zorientowanego wyznaczonego przez parę wektorów i określenie orientacji płaszczyzny.

Wektory swobodne i wzór Chaslesa.

Niech na Π będzie wyróżniony początek. Dla każdych $x, y \in \Pi$ istnieje dokładnie jedno przesunięcie płaszczyzny przekształcające x na y. Jest to przesunięcie τ_a, gdzie $a = y - x$. Fakt ten uzasadnia przyjęcie następującej, niezależnej od wyboru początku, definicji:

Wektorem swobodnym o końcach x i y (oznaczenie $\overrightarrow{xy}$) nazywamy przesunięcie płaszczyzny Π przeprowadzające x na y. W zbiorze wektorów swobodnych można określić działanie dodawania, będące po prostu składaniem przesunięć.

Następujący wzór, zwany wzorem Chaslesa jest oczywisty:

$$\overrightarrow{x_1x_n} = \overrightarrow{x_1x_2} + \overrightarrow{x_2x_3} + \ldots + \overrightarrow{x_{n-1}x_n}.$$

Pojęcie wektora swobodnego ważne jest z tego względu, że pozwala na wykonywanie rachunków algebraicznych bez ustalania początku na Π.

7. Definicja i własności iloczynu skalarnego. Wybierzmy w Π początek 0. *Iloczynem skalarnym* wektorów x i y nazywamy liczbę rzeczywistą $x \cdot y$ określoną jak następuje:

1) $x \cdot y = 0$, gdy co najmniej jeden z wektorów x, y jest zerem,

2) gdy $x \neq 0$ i $y = 0$, niech y' oznacza rzut prostopadły punktu y na prostą $D(0, x)$. Przyjmujemy $x \cdot y = \xi \cdot \eta'$ gdzie ξ i η' oznaczają odcięte punktów x i y' na dowolnie zorientowanej prostej $D(0, x)$ z początkiem 0. (Zmiana orientacji prostej nie wpływa na zmianę znaku iloczynu.)

TWIERDZENIE 5. *Przekształcenie* $(x, y) \to x \cdot y$ *iloczynu kartezjańskiego* $\Pi \times \Pi$ *w* R *jest funkcją dwuliniową i symetryczną. Jest ono dodatnie w tym sensie, że* $x \cdot x > 0$ *dla dowolnego* $x \neq 0$.

Dowód. 1. Przy ustalonym x przekształcenie $y \to x \cdot y$ jest przekształceniem liniowym. Jest to oczywiste, gdy $x = 0$. Jeśli $x \neq 0$, to, ponieważ rzutowanie $y \to y'$ płaszczyzny Π na prostą $D(0, x)$ jest liniowe podobnie jak i przekształcenie $y' \to \xi \cdot \eta'$ prostej $D(0, x)$ w R, przekształcenie $y \to x \cdot y$ jest liniowe jako ich złożenie.

2. Pokażemy, że $x \cdot y = y \cdot x$. Fakt ten jest oczywisty, jeśli jeden z czynników znika. W przeciwnym razie, ponieważ dla każdego skalara $k > 0$ mamy naturalnie

$$kx \cdot y = k(x \cdot y) \quad \text{oraz} \quad x \cdot ky = k(x \cdot y),$$

wystarczy udowodnić tę równość przy założeniu $d(0, x) = d(0, y) \neq 0$. Wówczas jednakże, na podstawie wniosku 3 z lematu 6, trójkąt $\{0, x, y\}$ ma oś symetrii przechodzącą przez 0. Symetria ta przekształca rzut y na $D(0, x)$ w rzut x na $D(0, y)$, co dowodzi żądanej równości.

3. Z symetrii iloczynu wynika jego liniowość ze względu na y.

4. Dodatniość iloczynu jest natychmiastowa, dokładniej, dla każdego x mamy

$$x \cdot x = (d(0, x))^2.$$

Kąt i cosinus kąta.

Wygodnie jest (choć nie jest to niezbędne), wprowadzić na tym etapie prymitywne pojęcie kąta (bez definicji równości kątów, dodawania, i oczywiście, miary) i cosinusa kąta.

Kątem nazywać będziemy uporządkowaną parę półprostych mających wspólny początek. *Wierzchołkiem kąta* nazywamy początek tych półprostych.

Cosinus kąta (D_1, D_2) o wierzchołku 0 definiujemy jak następuje: Niech m będzie punktem D_2 takim, że $d(0, m) = 1$. Oznaczmy przez m' rzut m na prostą Δ_1 zawierającą D_1, za początek Δ_1 przyjmujemy 0 i orientujemy ją tak, że $D_1 \geqslant 0$.

Przyjmujemy $\cos(D_1, D_2) =$ odcięta m na Δ_1.

Wiadomo, że dla każdego skalara k, mamy $(km)' = k \cdot m'$. Wynika stąd, że oznaczając przez $\|x\|$ i $\|y\|$ odpowiednio odległości $d(0, x)$ i $d(0, y)$ mamy:

$$x \cdot y = \|x\| \times \|y\| \cos(D_1, D_2)$$

dla dowolnych x i y leżących na D_1 i D_2 odpowiednio.

Zachodzi oczywista równość

$$\cos(D_1, D_2) = \cos(D_2, D_1).$$

Ponadto, ponieważ rzutowanie ortogonalne zmniejsza odległości, mamy

$$|\cos(D_1, D_2)| \leqslant 1.$$

Rachunek na odległościach.

Każde przesunięcie jest izometrią. Istotnie, ponieważ czworobok $(x, y, x+a, y+a)$ jest równoległobokiem, para (x, y) jest symetryczna do pary $(y+a, x+a)$ względem pewnego punktu, mamy więc

$$d(x, y) = d(x+a, y+a).$$

W szczególności $d(x, y) = d(0, y-x)$, skąd $d^2(x, y) = (y-x)(y-x)$.

Ostatnią równość można zapisać w postaci

$$d^2(x, y) = x \cdot x - 2x \cdot y + y \cdot y,$$

lub, używając ogólnie przyjętych dla trójkąta oznaczeń

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$

Twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy jako przypadek szczególny powyższego, gdy proste $D(0, x)$ i $D(0, y)$ są prostopadłe.

Nie będziemy badać dalej konsekwencji istnienia na płaszczyźnie określonych wyżej struktur wektorowej i metrycznej. Narzędzia do wygodnego przeprowadzenia tych badań są już jednak zgromadzone.