ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE V (1962)

wmptm 1897

Zadania

Gwiazdką * oznaczane są te zadania, których rozwiązanie nie jest znane autorowi ani redakcji, albo znane jest tylko rozwiązanie częściowe. Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, uwagi o zadaniach, nowe zadania itp.) należy nadsyłać pod adresem: Andrzej Lelek, Wrocław 2, Plac Zgody 11/20. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

36. Niech f będzie funkcją określoną na przestrzeni metrycznej X, o wartościach w dowolnej przestrzeni metrycznej. Dowieść, że na to, by funkcja f była ciągła, potrzeba i wystarcza, by spełniona była inkluzja

(I) $\quad f(\mathrm{Ls}\, A_n) \subset \mathrm{Ls}\, f(A_n)$ dla dowolnych $A_n \subset X$, $n = 1, 2, \ldots$,

gdzie $\mathrm{Ls}\, A_n$ oznacza granicę górną ciągu zbiorów A_n (C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952, str. 243).

Wykazać ponadto, że jeśli X jest przestrzenią metryczną zwartą, to inkluzja (I) staje się równością dla każdej funkcji ciągłej f i że równość ta charakteryzuje przestrzenie zwarte spośród wszystkich przestrzeni metrycznych.

R. Duda (Wrocław)

37. Niech $S_p(Z)$ oznacza składową punktu $p \in Z$ w zbiorze Z. Dowieść, że jeżeli $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ jest ciągiem zstępującym podzbiorów domkniętych przestrzeni X zupełnej i lokalnie spójnej, to dla każdego punktu $p \in X - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ zachodzi następujący *wzór de Morgana dla składowych*:

$$S_p\left(X - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_p(X - A_n).$$

R. Duda (Wrocław)

38*. Ciąg zbiorów domkniętych $V_1, V_2, \ldots$ nazywa się *posadzką* płaszczyzny E^2, jeśli spełnione są następujące warunki:

1° $E^2 = V_1 \cup V_2 \cup \ldots$,

2° wnętrza zbiorów V_n są parami rozłączne,

3° istnieją liczby $a, b > 0$ takie, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ istnieją punkty p_n, q_n takie, że $K(p_n, a) \subset V_n \subset K(q_n, b)$, gdzie $K(p, c)$ oznacza koło o środku p i promieniu c.

Można utworzyć posadzkę płaszczyzny E^2 z sześciokątów foremnych o boku 1 i przyjąć wtedy $a = \sqrt{3}/2$ i $b = 1$. Dowieść, że dla każdej posadzki płaszczyzny zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

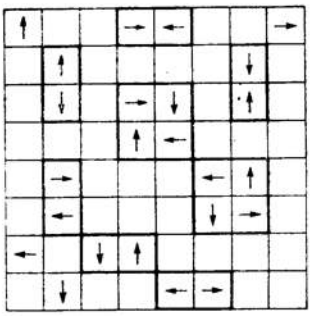
A. Pelczyński (Warszawa)

39. Należy umieścić na każdym polu zwykłej szachownicy po jednej strzałce równoległej do boku pola, przestrzegając następujących zakazów:

1° żadna strzałka nie może być skierowana na zewnątrz,

2° żadna para pól o wspólnym boku nie może być zaopatrzona w strzałki o zwrotach przeciwnych,

3° na czwórkach pól mających jeden punkt wspólny nie mogą wystąpić *wiry* — tak nazywamy układy czterostrzałkowe odpowiadające takim czwórkom pól i złożone z samych różnych kierunków.



Rysunek wyjaśnia powyższe postulaty: widzimy na nim 4 strzałki izolowane, z których każda wykracza przeciwko zakazowi 1°; sześć par strzałek zaznaczonych sześcioma prostokątami wykracza przeciwko zakazowi 2°; dwie czwórki ujęte w kwadraty wykazują wiry — każda z nich narusza zakaz 3°.

Autor zadania przypuszcza, że spełnienie wszystkich żądań zadania jest niemożliwe i że odnosi się to do wszelkich szachownic, a więc nie tylko do zwykłej szachownicy złożonej z 64 pól kwadratowych, ale także do prostokątnych szachownic złożonych z mn pół kwadratowych, przy czym liczby całkowite dodatnie m i n są dowolne.

H. Steinhaus (Wrocław)

40*. Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi równość $a^2+b^2 = 1$, a m i n — liczbami całkowitymi takimi, że $0 < n < m < 2n$. Oszacować liczbę miejsc zerowych wyrażenia $a\cos mx + b\cos nx$ w przedziale $(0, \pi)$ dla dużych n. (Zadanie powstało przy dyskusji zasad nowoczesnej fotografii barwnej, opartej na dwóch barwach zasadniczych.)

H. Steinhaus (Wrocław)