Rozwiązania zadań

12*. *Obliczyć* $\inf\limits_{\sum |a_i|=1} \sup\limits_{|z|=1} |a_0+a_1z+a_2z^2|$, *gdzie* z *i* a_i *są liczbami zespolonymi.*

A. Pełczyński (Warszawa)

Oznaczmy szukaną liczbę przez k. Wykażemy, że $k = 1/\sqrt{2}$.

Niech bowiem $|a_0|+|a_1|+|a_2| = 1$. Możemy przyjąć, że argument główny $\operatorname{Arg} a_0$ liczby a_0 jest zerem, ponieważ dla $a_0 \neq 0$ mamy

$$|a_0+a_1z+a_2z^2| = \left|\frac{|a_0|}{a_0}\right| \cdot |a_0+a_1z+a_2z^2| = \left||a_0|+\frac{|a_0|a_1}{a_0}z+\frac{|a_0|a_2}{a_0}z^2\right|$$

i $\operatorname{Arg}|a_0| = 0$. Otóż liczba

$$u = \begin{cases} |a_1|i/a_1, & \text{jeśli (1)} \quad -\pi < \operatorname{Arg} a_2/a_1^2 \leqslant -\pi/2, \\ |a_1|/a_1, & \text{jeśli (2)} \quad -\pi/2 < \operatorname{Arg} a_2/a_1^2 \leqslant \pi/2, \\ |a_1|/ia_1, & \text{jeśli (3)} \quad \pi/2 < \operatorname{Arg} a_2/a_1^2 \leqslant \pi, \end{cases}$$

spełnia warunek $|u| = 1$ oraz dla $\varphi = \operatorname{Arg} a_1u$ i $\psi = \operatorname{Arg} a_2u^2$ mamy $\varphi = \pi/2$ i $0 < \psi \leqslant \pi/2$ w przypadku (1), $\varphi = 0$ i $-\pi/2 < \psi \leqslant \pi/2$ w przypadku (2) oraz $\varphi = -\pi/2$ i $-\pi/2 < \psi \leqslant 0$ w przypadku (3). A zatem odległość punktu 0 od każdej z trzech prostych przechodzących przez dwa spośród punktów 1, $e^{i\varphi}$, $e^{i\psi}$ jest nie mniejsza od odległości, równej $1/\sqrt{2}$, punktu 0 od prostej przechodzącej przez punkty 1, i lub punkty 1, $-i$. Ponadto punkt 0 nie leży w trójkącie Δ o wierzchołkach w punktach 1, $e^{i\varphi}$ i $e^{i\psi}$, skąd wnosimy, że odległość punktu 0 od jakiegokolwiek punktu p trójkąta Δ jest nie mniejsza od $1/\sqrt{2}$, czyli $1/\sqrt{2} \leqslant |p|$. Ponieważ jednak $|a_0|+|a_1|+|a_2| = 1$, więc punkt

$$v = a_0+a_1u+a_2u^2 = |a_0|+|a_1|e^{i\varphi}+|a_2|e^{i\psi}$$

leży w trójkącie Δ, a zatem $1/\sqrt{2} \leqslant |v|$. Stąd wynika nierówność $1/\sqrt{2} \leqslant k$.

Niech teraz $b_0 = b_2 = \frac{1}{4}$ i $b_1 = \frac{1}{2}e^{i\pi/2}$. A więc $|b_0|+|b_1|+|b_2| = 1$. Dla funkcji

$$\Phi(\theta) = |\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}e^{i(\theta+\pi/2)}+\tfrac{1}{4}e^{2i\theta}|^2$$

mamy $\Phi'(\theta) = -\frac{1}{4}\sin 2\theta$, skąd wynika, że Φ przyjmuje swe wartości największe w punktach $\theta = n\pi$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Ale ponieważ jest też $\Phi(-\pi) = \Phi(0) = \Phi(\pi) = \frac{1}{2}$, przeto $\Phi(\theta) \leqslant \frac{1}{2}$, jeśli $-\pi < \theta \leqslant \pi$. Otóż wobec $|z| = 1$ możemy przyjąć $z = e^{i\theta}$, gdzie $-\pi < \theta \leqslant \pi$. Otrzymujemy

$$|b_0+b_1z+b_2z^2| = \sqrt{\Phi(\theta)} \leqslant 1/\sqrt{2},$$

a zatem musi być $k \leqslant 1/\sqrt{2}$. Skoro jednak $1/\sqrt{2} \leqslant k$, więc równość $k = 1/\sqrt{2}$ została udowodniona.

R. Jajte (Łódź)

16. *Nie istnieje pięciobok (przestrzenny) o wszystkich kątach prostych i bokach równych.*

H. Steinhaus (Wrocław)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Przypuśćmy, że istnieje taki pięciobok $ABCDO$. Możemy oczywiście przyjąć, że długość $|AB|$ boku AB, a więc również długość pozostałych czterech boków, jest równa 1. Obierzmy w przestrzeni prostokątny układ współrzędnych xyz o początku w punkcie O oraz taki, że $A = (1, 0, 0)$ i $B = (1, 1, 0)$. Wtedy punkt C leży na kole

$$y = 1, \quad (x-1)^2+z^2 = 1,$$

a punkt D — na kole

$$x = 0, \quad y^2+z^2 = 1,$$

oraz mamy $|BD| = |CO| = \sqrt{2}$. Wynika stąd, że punkt C musi być jednym z punktów

$$C_1 = (1/2, 1, -\sqrt{3}/2), \quad C_2 = (1/2, 1, \sqrt{3}/2),$$

a punkt D — jednym z punktów

$$D_1 = (0, 1/2, -\sqrt{3}/2), \quad D_2 = (0, 1/2, \sqrt{3}/2),$$

co jest niemożliwe, bo $|C_1D_1| = |C_2D_2| = 1/\sqrt{2}$ i $|C_1D_2| = |C_2D_1| = \sqrt{7}/\sqrt{2}$, podczas gdy $|CD| = 1$.

W. Morytko (Mikołów)

20. *Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n nieparzystych, jako też parzystych, dla których liczba $2^{2^n}+3$ jest złożoną.*

W. Sierpiński (Warszawa)

Dla $k = 1, 2, \ldots$ mamy $3 \mid 2^2-1 \mid 2^{2k}-1$, skąd $6 \mid 2^{2k+1}-2$, zatem

$$7 \mid 2^6-1 \mid 2^{2^{2k+1}-2}-1 \mid 2^{2^{2k+1}}-2^2,$$

a ponieważ $7 = 2^2+3$, więc mamy stąd $7 \mid 2^{2^{2k+1}}+3$. Liczby $2^{2^{2k+1}}+3$ są dla $k = 1, 2, \ldots$ większe od 7, zatem, będąc podzielne przez 7, są złożone.

Mamy też $9 \mid 2^6-1 \mid 2^{6k}-1$, skąd $18 \mid 2^{6k+2}-2^2$, a zatem

$$19 \mid 2^{18}-1 \mid 2^{2^{6k+2}-2^2}-1 \mid 2^{2^{6k+2}}-2^{2^2}$$

dla $k = 1, 2, \ldots$ Ponieważ jednak $19 = 2^{2^2}+3$, więc $19 \mid 2^{2^{6k+2}}+3$. Liczby $2^{2^{6k+2}}+3$ są dla $k = 1, 2, \ldots$ większe od 19, zatem, będąc podzielne przez 19, są złożone.

W. Sierpiński (Warszawa)

21. *Dowieść, że każda z liczb ciągu nieskończonego*

$$2^{2^2}-3, \quad 2^{2^{2^2}}-3, \quad 2^{2^{2^{2^2}}}-3, \quad \ldots$$

jest złożoną.

W. Sierpiński (Warszawa)

Do sformułowania zadania wkradła się pomyłka — pierwsza liczba z tego ciągu jest równa 13, a więc jest pierwszą. Udowodnimy, że jest ona jedyną liczbą pierwszą w podanym ciągu. W tym celu oznaczmy wyrazy ciągu $2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$ odpowiednio przez $a_1, a_2, \ldots$ Jest oczywiście $a_{n+1} = 2^{a_n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Wykażemy najpierw, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ istnieje liczba całkowita $v_n > 0$ taka, że $a_n = 624v_n+16$.

Zachodzi to dla $n = 1$ przy $v_1 = 0$. Przypuśćmy zatem, że zachodzi dla $n = m$. Wtedy na mocy małego twierdzenia Fermata liczba

$$a_{m+1}2^{-4} - 1 = 2^{a_m - 4} - 1 = 2^{624v_m + 12} - 1 = 2^{12(52v_m + 1)} - 1$$

jest podzielna przez 3 i 13, a więc i przez ich iloczyn 39. Istnieje przeto liczba całkowita $v_{m+1} \geqslant 0$ taka, że $a_{m+1}2^{-4} - 1 = 39v_{m+1}$, skąd po przemnożeniu obydwu stron przez 16 otrzymujemy $a_{m+1} = 624v_{m+1} + 16$.

Tak więc wyrazy ciągu podanego w zadaniu są postaci $624v_n + 16 - 3 = 13(48v_n + 1)$, czyli są podzielne przez 13 i począwszy od drugiego większe od 13, a więc złożone.

A. Mąkowski (Warszawa)