Struik pod przemożnym wpływem *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert* F. Kleina, a więc opiera się na syntezie — i to w wysokim stopniu niepełnej — dokonanej przeszło czterdzieści lat temu.

Pomimo wyjątkowej zwięzłości książka Struika napisana jest przystępnie, co decyduje o jej łatwej i szybkiej czytelności. Jej zalety i dotkliwy brak w Polsce tego rodzaju publikacji powinny z łatwością utorować jej drogę do polskiego czytelnika, na co w zupełności zasługuje.

Jak wynika z przedmowy wydawcy, ukazanie się przekładu książki Struika stanowi równocześnie zapowiedź szeregu innych wydawnictw podobnego typu, co pozwoli na stopniową likwidację paradoksalnej sytuacji, że w kraju, gdzie wysoki poziom badań matematycznych nie ulega najmniejszej wątpliwości, nie sięgano nigdy do tak mocnego środka popularyzacji matematyki, jakim jest jej historia. Środek tym ważniejszy, że popularyzuje matematykę nie wśród laików tylko, ale przede wszystkim wśród matematyków — co jest o wiele ważniejsze. Dlatego też tej cennej inicjatywie Państwowego Wydawnictwa Naukowego nie można nie przyklasnąć.

Już z pobieżnej lektury polskiego przekładu książki Struika wynika, że przekład ten jest niezwykle słaby. Pełno w nim niedobrej polszczyzny, nieraz bezsensownych zdań, a nawet zwrotów w rodzaju: „U człowieka pierwotnego rozwinęło się również gorące uczucie dla wzorów geometrycznych" (str. 18), „Inżynierowie byli niezbędni dla wznoszenia robót publicznych..." (str. 132) itp. Ale dopiero po zestawieniu z oryginałem angielskim widać, w jakim stopniu przekład ten jest niedobry. Tłumacz ogranicza się do najzupełniej mechanicznego przełożenia zdań angielskich na polskie i czyni to z tak rozbrajającą beztroską o sens całości, że fatalny wynik takiej pracy skłonny jestem przypisać raczej jego lekkomyślności niż nieudolności. Wydaje się, że nawet nie podejrzewa on tego, że przekład (dzieł z matematyki i historii matematyki także!) może być trudną sztuką.

Zdzisław Opial

Andrzej Mostowski i Marceli Stark, *Algebra liniowa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1958, str. 188.

Książka powstała jako produkt uboczny kondensacji trzytomowej *Algebry wyższej* tychże autorów do jednotomowego podręcznika dla I roku studiów. Przy tej kondensacji zginęła znaczna większość materiału tomu III, a między innymi prawie cały rozdział o algebrze liniowej, dość obszerny i oryginalnie ujęty. To, co z zakresu algebry liniowej znalazło się w jednotomowym podręczniku, jest fragmentaryczne i ubogie. Recenzent miał kiedyś okazję wypowiedzieć się krytycznie o tej części podręcznika, który zresztą w całości wysoko ceni. Tym bardziej trafny wydaje mu się pomysł rozwinięcia rozdziału o algebrze liniowej z III tomu dużej *Algebry* i uczynienia zeń osobnej książki, która jest przedmiotem niniejszej recenzji.

W polskiej literaturze matematycznej brak było dotąd opracowania algebry liniowej pojętej jako nauka o przekształceniach liniowych przestrzeni skończonego wymiaru. To była luka, gdyż teoria, którą można w pewnym stopniu uważać za propedeutykę analizy funkcjonalnej, powinna być właśnie w Polsce łatwo dostępna studiującym. Jak wiadomo, algebrę liniową można podzielić na dwie części: „łatwą", traktującą o przestrzeniach unitarnych i przekształceniach specjalnego typu, zwłaszcza unitarnych i hermitowskich, oraz „trudną", która dotyczy dowolnych przekształceń liniowych i kulminuje w twierdzeniu Jordana i jego wariantach. Zastosowania łatwej części są liczne w geometrii metrycznej i w fizyce, a główne twierdzenia prze-

noszą się w swej istocie na przestrzenie Hilberta nieskończonego wymiaru, gdzie spektralne przedstawienie operatora hermitowskiego zastępuje diagonalizację skończonej macierzy hermitowskiej. Trudna część ma mniejsze, ale ważne zastosowania w teorii równań różniczkowych o współczynnikach stałych. W znanych recenzentowi wykładach algebry liniowej to klasyczne zastosowanie jest pominięte. Tym bardziej godne uwagi jest szczegółowe jego wyjaśnienie w książce Mostowskiego i Starka.

Książka ma 5 rozdziałów. Oto ich tytuły: I. *Przestrzenie liniowe*, II. *Przekształcenia liniowe*, III. *Struktura przekształceń liniowych*, IV. *Formy hermitowskie*, V. *Przestrzenie unitarne*. W pierwszych dwóch rozdziałach wyłożone są zasadnicze pojęcia i twierdzenia, które każdy wykładowca algebry na I roku stara się wyłożyć, walcząc z krótkością czasu. Jest tu więc definicja przestrzeni liniowej, liczne przykłady, pojęcie bazy, wymiaru i izomorfizmu, sumy prostej i przestrzeni warstw, dalej paralelizm przekształceń liniowych i macierzy, zmiana bazy, przestrzenie sprzężone (wstydliwie petitem), podprzestrzenie niezmiennicze, wielomian charakterystyczny i wartości własne. Pojęcie wartości własnej ma właściwą definicję, związaną z wektorem własnym, nie zaś formalną, opartą tylko na wielomianie charakterystycznym.

Te dwa pierwsze rozdziały mają zatem charakter wstępu. Wśród następnych trzeci poświęcony jest ogólnej, „trudnej" teorii, a dwa końcowe „łatwej" teorii form hermitowskich i przestrzeni unitarnych.

Rozdział trzeci jest największy i najbardziej charakterystyczny dla omawianej książki. Na nim najlepiej widać trud oryginalny autorów i on najsilniej skłania do porównań z innymi wykładami tego przedmiotu. Punkt widzenia jest geometryczny. Na pierwszy plan wysuwa się jednoznaczny rozkład przestrzeni na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych nierozkładalnych Z_j, a stąd dopiero wynika standardowe przedstawienie dowolnego przekształcenia liniowego f, tzw. naturalna postać normalna (w książce nie ma tego terminu). Autorzy rozważają tylko przestrzenie liniowe nad ciałami liczbowymi, ale nie czynią w rozdziale trzecim upraszczającego założenia, że ciało podstawowe jest algebraicznie zamknięte. W ten sposób wychodzą poza twierdzenie Jordana, gdyż w ciele, które nie jest algebraicznie zamknięte, przekształcenia nie można na ogół przedstawić przez macierz złożoną z klatek jordanowskich odpowiadających składnikom Z_j. Trzeba wtedy dopuścić klatki bardziej skomplikowane, w których elementy różne od 0 występują nie tylko na głównej przekątnej i na sąsiedniej, lecz także w ostatniej kolumnie. Ostatnia kolumna składa się mianowicie ze współczynników anihilatora przestrzeni Z_j, tj. wielomianu najniższego stopnia, dla którego równość $W_j(f)x = 0$ zachodzi przy każdym $x \in Z_j$, współczynniki należą do ciała podstawowego, a najwyższy jest równy 1. Anihilator każdego Z_j jest potęgą wielomianu nierozkładalnego w ciele podstawowym i różni się najwyżej znakiem od wielomianu charakterystycznego odpowiedniej klatki. Z takich właśnie klatek składa się macierz przekształcenia w naturalnej postaci normalnej. Autorzy osiągnęli względnie małym kosztem znaczną ogólność i jednolitość przez to, że tę postać wprowadzili najpierw, inaczej niż np. Malcew, który w swej znanej książce wysuwa na plan pierwszy postać jordanowską, uzyskując ją zresztą dość trudnym sposobem, a do ogólniejszych przedstawień używa potem innych, czysto macierzowych metod.

Na przykładach zilustrowano rozdrobnienie, jakiemu może ulec rozkład na składniki cykliczne przy rozszerzeniu podstawowego ciała liczbowego i przedstawiono postać Jordana jako przypadek skrajny, występujący wtedy, gdy wielomian minimalny przekształcenia (czyli anihilator całej przestrzeni) rozpada się na czynniki liniowe. Osobno potraktowano przestrzenie nad ciałem liczb rzeczywistych.

Dzielniki elementarne określone są jako anihilatory cyklicznych składników nierozkładalnych. Odpowiada to geometrycznemu ujęciu. Dopiero później wprowadza się znaną równoważną definicję przez czynniki niezmiennicze, określone z kolei

za pomocą największych wspólnych dzielników minorów danego stopnia wyjętych z macierzy charakterystycznej. Ta droga potraktowana jest raczej jako metoda znajdowania dzielników elementarnych, a więc także macierzy zbudowanej z klatek odpowiadających podprzestrzeniom cyklicznym Z_j. Szczególnie godne podkreślenia jest, że autorzy rozwiązują również zagadnienie znajdowania samych baz cyklicznych. W znanych recenzentowi opracowaniach nie porusza się wcale tego problemu, a technika autorów wydaje się oryginalna. Szukana baza będzie znaleziona, jeśli znana jest macierz przejścia. Tę macierz otrzymuje się przez kolejne operacje elementarne na kolumnach macierzy charakterystycznej przekształcenia (w dowolnej bazie) i na wierszach macierzy jednostkowej. Na końcu tego łańcucha operacyj otrzymuje się z danej macierzy charakterystycznej macierz diagonalną z czynnikami niezmienniczymi na przekątnej, a z macierzy jednostkowej odpowiednią macierz przejścia. Przykładami numerycznymi ilustruje się to niezbyt łatwe postępowanie. Ten paragraf wydaje się najtrudniejszy w całej książce.

Rozdział trzeci kończy się wspomnianym już zastosowaniem twierdzeń o strukturze przekształceń do rozwiązywania równań różniczkowych jednorodnych o współczynnikach stałych. Lewa strona równania charakterystycznego jest anihilatorem przestrzeni rozwiązań względem przekształcenia określonego przez operator różniczkowania. Twierdzenia o strukturze przekształceń liniowych interweniują w sposób istotny, gdy równanie charakterystyczne ma pierwiastki wielokrotne. Szukając całek zespolonych stosuje się twierdzenie Jordana, a jeśli chodzi o całki rzeczywiste równań o współczynnikach rzeczywistych, trzeba się posługiwać odpowiednim, nieco bardziej skomplikowanym twierdzeniem strukturalnym (o ile nie chce się przechodzić przez całki zespolone).

W rozdziale czwartym wprowadza się pojęcie dwuliniowej formy *hermitowskiej* i bada się zależność macierzy formy od bazy. W szczególności dowodzi się, że przy odpowiedniej bazie można osiągnąć postać diagonalną. Ortogonalność definiuje się ogólnie, tj. bez założenia, że forma hermitowska jest dodatnio określona. Podaje się metodę Jacobiego sprowadzania form hermitowskich do postaci kanonicznej, tj. ortogonalizacji bazy. Dowodzi się twierdzenia Sylvestera-Jacobiego o bezwładności i wyjaśnia się metodę Schmidta ortogonalizacji względem formy dodatnio określonej.

W rozdziale piątym dowodzi się znanych twierdzeń o przekształceniach unitarnych i hermitowskich przestrzeni unitarnych, przede wszystkim o istnieniu baz złożonych z ortogonalnych wektorów własnych dla przekształceń hermitowskich, a w przypadku przestrzeni zespolonej także dla unitarnych. Wprowadza się postać kanoniczną przekształcenia unitarnego (ortogonalnego) przestrzeni euklidesowej rzeczywistej. Definicja przekształcenia sprzężonego jest wykorzystana do sformułowania warunku normalności przekształcenia, tj. jego przedstawialności przez macierz diagonalną. Wyprowadza się rozkład przekształcenia liniowego na unitarne i hermitowskie (rozkład biegunowy) oraz wzory Cayleya wyrażające przekształcenia unitarne przez odpowiednie hermitowskie. Treść rozdziału piątego z wyjątkiem wzorów Cayleya, podobnie jak treść rozdziałów pierwszego, drugiego i czwartego, powinna być wykładana, przy pewnych skrótach i uproszczeniach, w obowiązkowym kursie algebry. W tym celu, i także w innych celach, potrzebne jest powiększenie liczby godzin tego kursu, za czym wypowiada się znakomita większość matematyków w Polsce.

W zakończeniu autorzy ukazują perspektywę liniowej analizy funkcjonalnej jako pewnej kontynuacji algebry liniowej.

Wykład w książce jest na ogół jasny i ciekawy, metoda lepsza i materiał większy niż w III tomie *Algebry* Mostowskiego i Starka, a układ graficzny przejrzysty. Wielką zaletą książki jako podręcznika są liczne i dobrze dobrane zadania kontrolne po każdym lub niemal każdym paragrafie.

Recenzent zapoznał się z tym dziełem już w rękopisie i wtedy miał sposobność i obowiązek wyławiać błędy graficzne, potknięcia redakcyjne itd. Nie czynił tego po raz drugi z gotową książką. By jednak zamanifestować sumienność recenzencką, zauważy, że na str. 117 w wierszu 6 od dołu zgubiono wskaźnik r przy literze Ξ, w wierszu 3 od dołu umieszczono ten wskaźnik na niewłaściwym poziomie, a w wierszu 1 od dołu użyto we wzorze liczb l_j również dla $j > r$, chociaż te liczby nie zostały formalnie określone.

Stanisław Hartman

J. Favard, *Cours d'analyse de l'ecole polytechnique*, tome I, *Introduction, Operations*, Gauthier-Villars, Paris 1960, str. VII+675.

Podręcznik przeznaczony jest dla studentów politechniki. Autor podręcznika wychodzi z założenia, że przyswajanie kultury matematycznej odbywa się w dwóch etapach. Na pierwszym zapoznajemy się z techniką rachunkową, na drugim ze strukturą logiczną, z metodami ujęcia i rozwiązywania problemów. Omawiana książka przeznaczona jest, w myśl założeń autora, do wprowadzenia na drugi z tych etapów.

Programowym punktem wyjścia dla autora, jak zaznacza on we wstępie, jest przekonanie, że technikowi, w szerokim tego słowa znaczeniu, nie wystarcza matematyka pojęta jako zbiór recept i przepisów. Koniecznym jest, zdaniem autora, by technicy znali tę właśnie matematykę, którą uprawiają matematycy. Potrzebna jest dokładna znajomość podstaw teorii, nie wystarcza umiejętność stosowania jej wyników bez głębszego zaznajomienia się z istotnymi, fundamentalnymi metodami teorii.

Po zasygnalizowaniu pewnych poglądów autora na temat uczenia techników matematyki przejdziemy teraz do omówienia samej książki. Tu jeszcze jedna informacja: autor zaznacza w przedmowie, że zasadniczy wpływ na przedstawiony w książce wykład miała monografia Stefana Banacha *Teoria operacji liniowych*.

Podręcznik stanowi pierwszy tom opracowywanego trzytomowego kursu analizy. W podręczniku wyróżnione są dwie zasadnicze części: część wprowadzającą składającą się z 6 rozdziałów oraz część pod ogólnym tytułem *Operacje*. Po każdym rozdziale podane są zadania oraz pewne uzupełnienia. Uzupełnienia zawierają pewne zaawansowane twierdzenia związane z głównym tematem poruszanym w danym rozdziale. W obrębie każdego rozdziału można wyróżnić dwojakiego rodzaju sposób potraktowania rozważań. Rozważania zasadnicze podane są z pełnymi dowodami i ilustrowane są szczegółowo omawianymi przykładami. Pozostała część rozdziału podaje pewne partie materiału w sposób raczej informacyjny. Dowody są tu bardzo skondensowane a uwaga autora skierowana jest na zasygnalizowanie pewnych pojęć i faktów, na zaznaczenie pewnych problemów i wyrobienie w czytelniku pewnych intuicji. Nie przeszkadza to jednak w podaniu dość obszernego materiału i to w sposób na tyle ścisły, że czytelnik posiadający pewne doświadczenie w samodzielnym dowodzeniu z łatwością potrafi uzupełnić luki.

Przykładem ilustrującym wyżej wspomniane cechy jest rozdział poświęcony topologii. Po ogólnych rozważaniach ze szczególnym położeniem nacisku na przestrzenie metryczne autor prezentuje szereg pojęć i twierdzeń z topologii algebraicznej. Mowa jest o kompleksach, rozmaitościach, triangulacji, indeksie punktu względem krzywej na płaszczyźnie. Określone są grupy homologii, grupy homotopii. Wszystkie rozważania prowadzone są w sposób możliwie ogólny i ilustrowane są rysunkami i przykładami. W uzupełnieniach podane są przykłady pewnych diskontinuów oraz konstrukcja krzywej Peano, wypełniającej kwadrat. Podany jest dowód twierdzenia Urysohna o metryzowalności pewnych przestrzeni topologicznych. Na zakończenie rozdziału autor dowodzi pewnego wariantu lematu Spernera, z którego poprzez