ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVI (1973)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

JAN MIKUSIŃSKI (Katowice)

Stała Eulera

W dobie współczesnego, spontanicznego rozwoju matematyki, kiedy już nie tylko twierdzenia, ale i nowe teorie powstają jak grzyby po deszczu, a redakcje czasopism matematycznych nie mogą uporać się z nawałem napływających prac, przypominanie stałej Eulera, która została odkryta około 250 lat temu, może się wydawać anachronizmem. Tak jednak nie jest, a to z dwóch powodów. Po pierwsze dlatego, że nie wszystkie zagadnienia jej dotyczące zostały rozwiązane. Nikomu nie udało się rozstrzygnąć, czy ta liczba jest niewymierna, i chyba można powiedzieć, że rozwiązanie tego problemu jest trudniejsze niż tworzenie nowych teorii. Po drugie, stałą Eulera odnajdujemy w coraz to nowych powiązaniach. Na przykład teoria dystrybucyj pozwala rozwijać w szeregi lub transformować funkcje, które w klasycznym ujęciu nie były rozwijalne czy transformowalne i przy tym nie raz zjawia się stała Eulera, jak to zobaczymy w końcowej części tego artykułu.

Fakty zebrane w tym artykule są przeważnie znane, lecz ich opracowanie jest oryginalne i dostosowane do poziomu czytelnika znającego tylko początki analizy matematycznej. Pewne dowody i twierdzenia są nowe, np. rozwinięcie $1/|x|$ w szereg Hermite'a.

Stałą Eulera C definiujemy zwykle jako granicę

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right). \tag{1}$$

Aby stwierdzić poprawność tej definicji, musimy udowodnić, że ciąg

$$\sigma_n = \frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$$

jest zbieżny. Można napisać

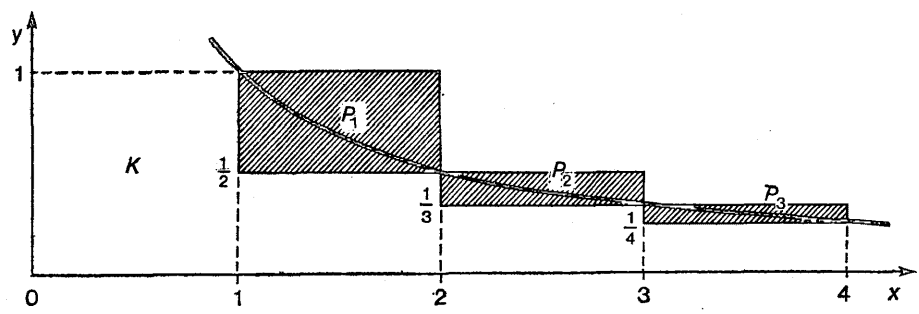
$$\sigma_n = \alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}+1/n,$$

gdzie $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}+\ln\nu-\ln(\nu+1)$, ponieważ przy sumowaniu pośrednie logarytmy się znoszą.

Na rys. 1 linia krzywa jest wykresem funkcji $y = 1/x$. Na linii tej leżą wierzchołki zakreskowanych prostokątów $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Jest widoczne, że suma pól tych prostokątów wynosi 1; gdyby bowiem przesunąć je poziomo do kwadratu K, to wypełniłyby cały kwadrat. Łatwo zauważyć, że część prostokąta P_ν położona nad krzywą ma pole

$$\frac{1}{\nu} - \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} = \alpha_\nu.$$

Stąd wynika, że $\alpha_\nu > 0$ i że suma $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$ jest zawarta w sumie pól prostokątów $P_1, P_2, \ldots$, a więc jest mniejsza niż 1. Dowodzi to zbieżności ciągu σ_n do granicy mniejszej niż 1. Udowodniliśmy w ten sposób, że definicja (1) jest poprawna, a jednocześnie znaleźliśmy oszacowanie: $C < 1$.



Rys. 1

Łatwo też oszacować C od dołu. Wystarczy w tym celu zauważyć, że krzywa $y = 1/x$ jest wypukła i wskutek tego części prostokątów leżące ponad nią są większe od połowy prostokątów. Stąd: $C > 0{,}5$. Mamy więc nierówności

$$0{,}5 < C < 1.$$

Znany jest ze szkoły wzór na sumę n kolejnych liczb naturalnych

$$1 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n.$$

Trochę mniej znany jest wzór

$$1^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n.$$

Wyprowadzimy wzór ogólny na sumę p-tych potęg

$$1^p + \ldots + n^p = f_p(n). \tag{2}$$

W szczególności mamy

$$f_1(n) = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n \quad \text{oraz} \quad f_2(n) = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n. \tag{3}$$

Pokażemy, jak można znaleźć $f_{p+1}(n)$, gdy znamy $f_p(n)$. W ten sposób będziemy mogli wyznaczyć wszystkie funkcje $f_p(n)$ przez indukcję. Z (2) wynika

$$f_p(n)-f_p(n-1) = n^p.$$

Przypuśćmy, że znamy funkcję $f_p(x)$ określoną i ciągłą dla wszystkich rzeczywistych x, taką że

$$f_p(x)-f_p(x-1) = x^p.$$

Całkując tę równość od 0 do x, znajdujemy

$$\int_0^x f_p(t)dt - \int_0^x f_p(t-1)dt = \frac{x^{p+1}}{p+1},$$

czyli po zmianie zmiennej w drugiej całce i odpowiednim połączeniu całek

$$\int_{x-1}^{x} f_p(t)dt - \int_{-1}^{0} f_p(t)dt = \frac{x^{p+1}}{p+1}.$$

Podstawiając w tej równości kolejno $x = 1, \ldots, n$ i sumując, otrzymujemy po pomnożeniu przez $p+1$

$$(p+1)\int_0^n f_p(t)dt + B_p \cdot n = 1^{p+1}+\ldots+n^{p+1},$$

gdzie

$$B_p = -(p+1)\int_{-1}^{0} f_p(t)dt.$$

Wobec tego mamy wzór rekurencyjny

$$f_{p+1}(n) = (p+1)\int_0^n f_p(t)dt + B_p \cdot n.$$

Widać z tego wzoru, że jeżeli $f_p(n)$ jest wielomianem stopnia $p+1$ względem n, to $f_{p+1}(n)$ jest wielomianem stopnia $p+2$ względem n. Co więcej, wyrazy tego wielomianu można od razu kolejno wypisywać, wykonując w myśli łatwe całkowanie i mnożenie przez $p+1$. Tylko ostatniego wyrazu nie możemy w ten sposób otrzymać. Ale za to możemy go łatwo znaleźć, podstawiając za n szczególną wartość 1. Na przykład z pierwszego z wzorów (3) znajdujemy w ten sposób najpierw

$$f_2(n) = \tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+B_2 \cdot n,$$

a następnie podstawiając $n = 1$,

$$1 = \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}+B_2.$$

Stąd $B_2 = \frac{1}{6}$ zgodnie z drugim z wzorów (3).

Dalej znajdujemy w podobny sposób

$$f_3(n) = \tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2,$$
$$f_4(n) = \tfrac{1}{5}n^5+\tfrac{1}{2}n^4+\tfrac{1}{3}n^3-\tfrac{1}{30}n,$$
$$f_5(n) = \tfrac{1}{6}n^6+\tfrac{1}{2}n^5+\tfrac{5}{12}n^4-\tfrac{1}{12}n^2,$$
$$f_6(n) = \tfrac{1}{7}n^7+\tfrac{1}{2}n^6+\tfrac{1}{2}n^5-\tfrac{1}{6}n^3+\tfrac{1}{42}n,$$
$$f_7(n) = \tfrac{1}{8}n^8+\tfrac{1}{2}n^7+\tfrac{7}{12}n^6-\tfrac{7}{24}n^4+\tfrac{1}{12}n^2,$$
$$f_8(n) = \tfrac{1}{9}n^9+\tfrac{1}{2}n^8+\tfrac{2}{3}n^7-\tfrac{7}{15}n^5+\tfrac{2}{7}n^3-\tfrac{1}{30}n.$$

Współczynniki B_n przy pierwszych potęgach n nazywają się *liczbami Bernouilliego*. Mamy w szczególności

$$B_1 = \tfrac{1}{2}, \quad B_2 = \tfrac{1}{6}, \quad B_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad B_6 = \tfrac{1}{42}, \quad B_8 = -\tfrac{1}{30}, \ldots,$$
$$B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0.$$

Można udowodnić, że począwszy od $n = 3$ wszystkie liczby Bernouilliego o wskaźnikach nieparzystych są równe 0.

Przy wyprowadzaniu powyższych wzorów stosowaliśmy rachunek całkowy. Warto zwrócić uwagę na to, że całka z wielomianów daje się zdefiniować czysto algebraicznie. Wskutek tego całe rozumowanie można by zalgebraizować i wyeliminować z niego rachunek całkowy. Tego jednak nie opłaca się robić ze względów praktycznych. Korzystając bowiem z algorytmów rachunku całkowego otrzymaliśmy wzory w sposób szybki i łatwy do zapamiętania.

Stosując tę samą metodę znajdujemy przez indukcję

$$f_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+\frac{1}{2}B_2\binom{p}{1}n^{p-1}+\ldots+\frac{1}{p}B_p\binom{p}{p-1}n \quad \text{przy } p \text{ parzystym},$$

$$f_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+\frac{1}{2}B_2\binom{p}{1}n^{p-1}+\ldots+\frac{1}{p-1}B_{p-1}\binom{p}{p-2}n^2$$

przy n nieparzystym.

Napiszmy, niezależnie od parzystości czy nieparzystości p,

$$b_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+\frac{1}{2}B_2\binom{p}{1}n^{p-1}+\frac{1}{4}B_4\binom{p}{3}n^{p-3}+\ldots \tag{4}$$

Wyrażenie po prawej stronie równości tylko pozornie jest szeregiem nieskończonym, albowiem $\binom{p}{k} = 0$ dla $k > p$. Stąd wynika, że $B_p(n)$ są wielomianami. Widać, że $b_p(0) = \dfrac{1}{p+1}B_{p+1}$ oraz że

$$1^p+\ldots+n^p = -b_p(0)+b_p(n). \tag{5}$$

Dalsze rozważania mają na razie charakter heurystyczny. Gdy p nie jest liczbą naturalną, to szereg (4) staje się prawdziwym szeregiem nieskończonym, ponieważ wyrazy $\binom{p}{k}$ wtedy nie znikają. Ponadto, gdy $p = -1$, to wyraz $n^{p+1}/(p+1)$ traci sens, bo w mianowniku pojawia się 0. Posłużmy się jednak analogią z całkami: $\int x^p dx = x^{p+1}/(p+1)$ dla $p = -1$, $\int x^{-1} dx = \ln x$. Widać, że rzeczą naturalną będzie zastąpić pierwszy wyraz szeregu przez $\ln n$. Biorąc jeszcze pod uwagę, że dla nieparzystych k jest $\binom{-1}{k} = -1$, napiszmy

$$b_{-1}(n) = \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}B_2\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}B_4\frac{1}{n^4} - \dots$$

Przez analogię z wzorem (5) napiszmy dalej

$$\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} = -b_p(0) + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}B_2\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}B_4\frac{1}{n^4} - \dots$$

Przenosząc $\ln n$ na lewą stronę i przechodząc do granicy przy $n \to \infty$, otrzymujemy formalnie: $C = -b_p(0)$. Wobec tego mamy

$$C = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}B_2\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}B_4\frac{1}{n^4} + \dots,$$

czyli uwzględniając wartości $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, ...,

$$(6) \quad C = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} - \frac{1}{240n^8} + \dots$$

Otrzymaliśmy w ten sposób, nie bardzo zresztą troszcząc się o ścisłość rozumowania, wzór bardzo stary, znany już Eulerowi, a za to mniej znany współczesnym matematykom. Wzór ten świetnie nadaje się do obliczania liczbowej wartości C z dowolną dokładnością. W ciągu kilku minut można sprawdzić, że

$$\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{20} + \frac{1}{1200} \approx 2{,}879801.$$

Ponadto wiemy, że $\ln 10 \approx 2{,}302585$. Obliczając różnicę tych liczb znajdujemy przybliżoną wartość

$$C \approx 0{,}577216.$$

Pierwszy z wyrazów szeregu (6), które w tym obliczeniu zostały odrzucone, wynosi 1/1200000 i wobec tego można przypuszczać, że popełniony błąd jest mniejszy od tej wartości. Istnieje bowiem twierdzenie, że jeżeli wyrazy pewnego szeregu maleją i są na przemian dodatnie i ujemne, to błąd sumowania częściowego jest zawsze mniejszy od pierwszego wyrazu odrzuconego. W naszym jednak przypadku wzór (6) został znaleziony więcej na wyczucie i przez pewne analogie niż przez ścisłe rozumowanie, i dlatego nie tylko nie wiemy czy równość jest prawdziwa,

ale nawet nic nie możemy powiedzieć o zbieżności rozważanego szeregu. Otóż okazuje się, że szereg (6) jest tylko pozornie zbieżny i wyrazy jego tylko początkowo szybko maleją, potem jednak zaczynają bardzo szybko rosnąć i, jak to można udowodnić, rosną szybciej niż jakikolwiek szereg geometryczny.

Tym dziwniejszy wydaje się więc fakt, że znalezione przez nas przybliżenie liczbowe 0,577216, a także oszacowanie błędu przez liczbę 1/1200000, oparte tylko na analogii z szeregami zbieżnymi, są poprawne. Uzasadnieniem tego faktu chcemy się teraz zająć.

Wprowadźmy oznaczenie

$$u_k(x) = \frac{1}{x^k} - \frac{1}{(x+1)^k}$$

i przypuśćmy, że dla $k = p-1$ i $k = p$ zachodzi nierówność

$$(7)\quad (-1)^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2(x+1)^2} + B_2 u_3(x) + \ldots + B_{2k} u_{2k+1}(x)\right) > 0 \quad \text{dla } x > 1.$$

Niech

$$(8)\quad \gamma_n = \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n - \frac{1}{2n} + B_2 \frac{1}{2n^2} + \ldots + B_{2p-2} \frac{1}{(2p-2)n^{2p-2}}.$$

Wtedy

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{B_2}{2} u_2(n) + \ldots + \frac{B_{2p-2}}{2p-2} u_{2p-2}(n) =$$

$$= \int_n^\infty \left(-\frac{1}{2x^2(x+1)^2} + B_2 u_3(x) + \ldots + B_{2p-2} u_{2p-1}(x)\right) dx.$$

Stąd mamy

$$0 < (-1)^p(\gamma_n - \gamma_{n+1})$$

na podstawie założenia, że (7) zachodzi dla $k = p-1$. Z założenia zaś, że (7) zachodzi dla $k = p$, wynika

$$(-1)^p(\gamma_n - \gamma_{n+1}) < (-1)^p B_{2p} \int_n^\infty u_{2p-1}(x)\,dx = (-1)^p \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{2p-1}}$$

i wobec tego

$$0 < (-1)^p(\gamma_n - \gamma_{n+r}) = (-1)^p[(\gamma_n - \gamma_{n+1}) + \ldots + (\gamma_{n+r-1} - \gamma_{n+r})].$$

Z (8) widać, że $\gamma_n \to C$. Przechodząc do granicy z $r \to \infty$, otrzymujemy więc

$$0 < (-1)^p(\gamma_n - C) < (-1)^{p-1} B_{2p} \int_n^\infty \frac{dx}{x^{2p-1}} = (-1)^{p-1} \frac{B_{2p}}{2p} \frac{1}{n^{2p}}.$$

Udowodniliśmy więc, że przy założeniu nierówności (7) dla $k = p-1$ i $k = p$ wyrażenie (8) przybliża stałą C z dokładnością większą niż

$$\frac{1}{2p}|B_{2p}|\frac{1}{n^{2p}}.$$

Łatwo sprawdzić, że dla $k = 1$ i $k = 2$ lewa strona wzoru (7) równa się odpowiednio

$$\frac{1}{3x^3(x+1)^3} \quad \text{oraz} \quad \frac{5x^2+5x+1}{6x^5(x+1)^5},$$

a więc nierówność (7) jest prawdziwa. Dowodzi to, że biorąc za C wyrażenie

$$\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}-\ln n,$$

popełniamy błąd mniejszy niż $1/120n^4$. Nasze poprzednie obliczenie i oszacowanie przybliżonej wartości C jest więc w pełni uzasadnione. Biorąc n dość duże, można przynajmniej teoretycznie obliczyć C z dowolną dokładnością.

Autor tego artykułu stwierdził, że (7) zachodzi także dla $k = 3$ i $k = 4$. Sprawdzenie nie jest trudne, polega bowiem na sprowadzeniu lewej strony nierówności do wspólnego mianownika i stwierdzeniu, że wszystkie współczynniki wielomianu w liczniku są nieujemne. Czy tak będzie dla wszystkich naturalnych k, nie wiadomo.

Na innej drodze można udowodnić (badając resztę tzw. wzoru Eulera–Maclaurina), że wzór (6) daje zawsze błąd mniejszy od pierwszego wyrazu odrzuconego. Zauważmy jednak, że z tego faktu nie wynika jeszcze nierówność (7), której prawdziwość dla każdego k pozostaje wobec tego nieudowodniona.

Przedstawiony wyżej sposób jest najszybszym sposobem obliczania liczby C z dużą dokładnością. Istnieją też inne sposoby, na przykład przedstawienie C w postaci całki. Różne wzory całkowe można otrzymać dla liczby C. Wychodząc z podanej wyżej definicji, najłatwiej otrzymuje się wzór

$$C = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\ln t}\right)dt. \tag{9}$$

W tym celu korzystamy z elementarnego wzoru na sumę postępu geometrycznego

$$t^x+t^{x+1}+\ldots+t^{x+n-1} = t^x\frac{1-t^n}{1-t} \quad (t \neq 1, x > 0).$$

Całkujemy obie strony względem t w granicach od 0 do 1. Otrzymujemy w ten sposób

$$\frac{1}{1+x}+\ldots+\frac{1}{n+x} = \int_0^1 t^x\frac{1-t^n}{1-t}dt.$$

Gdy x dąży do 0, otrzymujemy stąd w granicy

$$\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{n}=\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,dt.$$

Odejmując obie równości stronami znajdujemy

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+x}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)=\int_0^1 (1-t^x)\frac{1-t^n}{1-t}\,dt.$$

Całkujemy teraz obie strony względem x od 0 do 1. Po prawej stronie możemy odwrócić kolejność całkowania, ponieważ całkowane funkcje są nieujemne, więc

$$\left(\frac{1}{1}-\ln 2\right)+\left(\frac{1}{2}+\ln 2-\ln 3\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}+\ln n-\ln(n+1)\right)=\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,dt\int_0^1 (1-t^x)\,dx.$$

Stąd po przekształceniu lewej strony i obliczeniu całki wewnętrznej:

$$\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n+\ln\frac{n}{n+1}=\int_0^1 (1-t^n)\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\ln t}\right)dt.$$

Gdy $n\to\infty$, to pierwszy czynnik pod znakiem całki dąży monotonicznie do 1, i wobec tego w granicy otrzymujemy wzór (9).

Podstawiając w (9) $t=e^{-u}$ i rozbijając całkę na dwie, możemy napisać $C=A+B$, gdzie

$$A=\int_0^1\left(\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right)e^{-u}du=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right)du+\int_0^1\frac{1-e^{-u}}{u}du=\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)-\int_0^1\frac{1-e^{-u}}{u}du,$$

$$B=\int_1^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right)e^{-u}du=$$

$$=\int_1^\infty\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}du-\int_1^\infty\frac{e^{-u}}{u}du=-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)-\int_1^\infty\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}du.$$

Sumując A i B znajdujemy

$$C=\int_0^1\frac{1-e^{-u}}{u}\,du-\int_1^\infty\frac{e^{-u}}{u}du. \tag{10}$$

W ten sposób otrzymaliśmy stałą Eulera w postaci różnicy dwóch całek. Jest rzeczą ciekawą, że zachodzi także wzór

$$C=\int_0^1\frac{1-\cos u}{u}\,du-\int_1^\infty\frac{\cos u}{u}\,du, \tag{11}$$

A więc w rozważanym przypadku można zastąpić e^{-u} przez $\cos u$, co na ogół rzadko się zdarza. Równość wyrażeń (10) i (11) można wykazać, rozważając wyrażenie ogólniejsze niż (11):

$$U(s) = \int_0^1 e^{-st} \frac{1-\cos t}{t}\, dt - \int_1^\infty e^{-st} \frac{\cos t}{t}\, dt \quad (s > 0). \tag{12}$$

Mamy wtedy

$$U'(s) = -\int_0^1 e^{-st}(1-\cos t)dt + \int_1^\infty e^{-st}\cos t\, dt = \int_0^1 e^{-st}dt - \int_0^\infty e^{-st}\cos t\, dt$$

$$= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}.$$

Stąd wynika, że

$$U(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du + \ln s - \ln\sqrt{s^2+1} + K,$$

gdzie K jest stałą. Można ją łatwo wyznaczyć, przechodząc z (12) do granicy przy $s \to \infty$. Wtedy otrzymujemy bowiem $U(\infty) = 0$, co dowodzi, że $K = 0$.

Wobec tego

$$U(s) = \int_s^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du - \int_s^1 \frac{du}{u} - \ln\sqrt{s^2+1} = -\int_s^1 (1-e^{-u})\frac{du}{u} + \int_1^\infty e^{-u}\frac{du}{u} - \ln\sqrt{s^2+1}.$$

Przechodząc do granicy z $s \to 0$ i mając na uwadze wzór (12) dochodzimy do równości wyrażeń (10) i (11)

Zauważmy jeszcze, że wykonując w obydwu całkach wzoru (10) całkowanie przez części i łącząc następnie całki w jedną, znajdujemy z łatwością

$$C = -\int_0^\infty e^{-t}\ln t\, dt. \tag{13}$$

Istnieje jeszcze wiele innych wzorów całkowych dla C, lecz wzór (13) jest szczególnie interesujący, gdyż nie występują w nim żadne różnice, jest to po prostu całka z iloczynu dwóch funkcyj elementarnych, wykładniczej i logarytmicznej. Ponadto wzór (13) wiąże stałą C z funkcją gamma Eulera

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}dt.$$

Istotnie, mamy

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}\ln t\, dt,$$

a stąd znajdujemy, podstawiając $p = 1$,

$$\Gamma'(1) = -C.$$

Transformacja Fouriera

$$\mathscr{F}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} g(t)\,dt$$

jest jedną z najważniejszych transformacyj w analizie matematycznej. W klasycznym ujęciu jej zakres stosowalności jest ograniczony przez zbieżność występującej w niej całki. Na przykład dla $g(t) = 1/|t|$ całka jest rozbieżna w punkcie $t = 0$. Dopiero teoria dystrybucyj pozwoliła znacznie rozszerzyć zakres stosowalności. Tym się też tłumaczy, że stosunkowo późno została znaleziona transformata Fouriera dla $1/|x|$; podali ją Gelfand i Szyłow w swojej książce *Обобщенные функции и действия над ними* (Moskwa 1959). Wynosi ona

$$\mathscr{F}\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\ln|x| - C.$$

A więc znowu spotykamy się ze stałą Eulera. Dowodu powyższego wzoru nie będziemy przytaczali, ponieważ musielibyśmy za głęboko wnikać w teorię dystrybucyj. Wspomnimy natomiast o jeszcze jednym powiązaniu stałej C, również uzyskanemu dzięki teorii dystrybucyj. W teorii tej zbieżne są różne szeregi, które są rozbieżne w sensie analizy klasycznej. Rozpatrzymy to na przykładzie szeregu Hermite'a. Wielomiany Hermite'a można określić rekurencyjnie wzorami

$$H_0 = 1, \quad H_1 = x, \quad \ldots, \quad H_{n+1} = xH_n - nH_{n-1}.$$

Znajdujemy stąd z łatwością

$$H_2 = x^2 - 1, \quad H_3 = x^3 - 3x, \quad H_4 = x^4 - 6x^2 + 3, \quad H_5 = x^5 - 10x^3 + 6x, \ldots$$

Funkcje Hermite'a określamy wzorem

$$h_n(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{n!}} H_n(x).$$

Współczynnik przy $H_n(x)$ jest tak dobrany, że $\int_{-\infty}^{\infty} h_n^2(x)\,dx = 1$. Szereg Hermite'a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x)$$

może być zbieżny lub rozbieżny w zależności od współczynników a_n. Czy można te współczynniki dobrać tak, żeby szereg był zbieżny do $1/|x|$? Odpowiedź jest negatywna, gdy zbieżność rozumiemy w sensie klasycznym, a pozytywna, gdy zbieżność rozumiemy w sensie dystrybucyjnym. Wtedy znajdujemy następujące współczynniki

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{n!}} [(\ln 4 - C)\alpha_n + 4\beta_n], \tag{14}$$

gdzie α_n i β_n są liczbami całkowitymi, równymi 0 dla n nieparzystych i określonymi wzorami rekurencyjnymi dla n parzystych:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_{n+2}+\alpha_n-n(n-1)\alpha_{n-2} = 0,$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_{n+2}+\beta_n-n(n-1)\beta_{n-2} = -(-1)^{n/2}1\cdot 3\ldots(n-1).$$

A więc jeszcze raz spotykamy się ze stałą C. Fakt, że szereg (14) jest zbieżny dystrybucyjnie do $1/|x|$ nie wyklucza możliwości, że jest on zbieżny w poszczególnych punktach także w zwyczajnym sensie. Ale w jakich, nie wiadomo. Wzór (14) rozbija też funkcję $1/|x|$ w sposób naturalny na sumę dwóch funkcyj, z których jedna jest związana ze współczynnikami α_n, a druga z β_n. Jakie są to funkcje, nie wiadomo. Poniżej podajemy tabelkę początkowych wartości liczb α_n i β_n:

n	0	2	4	6	8	10	12
α_n	1	−1	3	−15	105	−945	10395
β_n	0	1	0	9	6	393	1092

Ostatnie dwa przykłady rzucają korzystne światło na teorię dystrybucyj. Dają one nowe jej powiązania z zagadnieniami klasycznymi i stwarzają nowe naturalne zagadnienia. Im więcej powiązań, tym teoria jest ciekawsza.

(Przykład rozwinięcia $1/|x|$ w szereg Hermite'a został opracowany w Pracowni Matematycznej Centrum Badań Naukowych w województwie katowickim i dotąd nie był publikowany. Końcowe obliczenia przeprowadziła mgr Sabina Lewandowska.)