ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVI (1973)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

MAREK KUCZMA (Katowice)

Równania funkcyjne w teorii procesów stochastycznych *

1. Tytuł tego referatu obiecuje więcej niż byłbym w stanie spełnić. Nie sposób wyczerpać tak obszernego zagadnienia w jednogodzinnym odczycie. W istocie chciałbym tutaj przedstawić kilka twierdzeń z teorii rozwiązań monotonicznych i rozwiązań wypukłych liniowych równań funkcyjnych o jednej zmiennej oraz wskazać na pewne ich zastosowania w teorii procesu Galtona–Watsona.

W dalszym ciągu $f(x)$ będzie stale oznaczać funkcję ciągłą i ściśle monotoniczną w pewnym przedziale $[0, a)$, $a \leqslant \infty$, spełniającą warunek

$$0 < f(x) < x \quad \text{w} \quad (0, a).$$

Stąd wynika, że 0 jest punktem stałym funkcji f: $f(0) = 0$.

Rozważmy liniowe jednorodne równanie funkcyjne z funkcją niewiadomą φ:

$$\varphi[f(x)] = g(x)\varphi(x). \tag{1}$$

Następujące twierdzenie (por. [9], [1], [13], [21]) leży u podstaw teorii rozwiązań monotonicznych i rozwiązań wypukłych równań funkcyjnych o jednej zmiennej.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli funkcja g jest dodatnia i monotoniczna w przedziale $(0, a)$ oraz spełnia warunek $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, to równanie (1) ma w $(0, a)$ dokładnie jednoparametrową rodzinę rozwiązań monotonicznych. Rozwiązania te dane są wzorem*

$$\varphi(x) = c\prod_{n=0}^{\infty}\frac{g[f^n(x_0)]}{g[f^n(x)]}, \quad x \in (0, a), \tag{2}$$

gdzie c jest parametrem, zaś x_0 jest dowolnie ustalonym punktem przedziału $(0, a)$, a f^n oznacza n-tą iteratę funkcji f.

Zauważmy, że twierdzenie to orzeka zarówno o jednoznaczności, jak i o istnieniu rozwiązań, a więc w szczególności gwarantuje zbieżność iloczynu występującego we wzorze (2). Jednoznaczność jest zagwarantowana przez warunek mono-

* Referat wygłoszony na XI Zjeździe Matematyków Polskich w Lublinie dnia 18 września 1972 r.

toniczności φ; bez tego założenia równanie (1) ma w $(0, a)$ znacznie obszerniejszą rodzinę rozwiązań, często nawet bardzo regularnych. Np. równanie

$$\varphi(\tfrac{1}{2}x) = \varphi(x) \tag{3}$$

(gdzie $f(x) = \frac{1}{2}x$, $g(x) \equiv 1$, $a = \infty$) ma ogólne rozwiązanie postaci

$$\varphi(x) = u(\log_2 x), \quad x \in (0, \infty),$$

gdzie u jest dowolną funkcją okresową o okresie 1. Jak widzimy, nawet rozwiązania analityczne równania (3) zależą od dowolnej funkcji (okresowej) u, podczas gdy jedynymi rozwiązaniami monotonicznymi są funkcje stałe.

Szczególnym przypadkiem równania (1) jest tzw. równanie Schrödera

$$\varphi[f(x)] = m\varphi(x), \tag{4}$$

gdzie m jest stałą. Ważne to równanie występuje w wielu zagadnieniach matematycznych jako równanie linearyzacji. Jeżeli mianowicie szukamy (krzywoliniowej) zmiany współrzędnych

$$x' = \varphi(x), \quad y' = \varphi(y) \tag{5}$$

tak, by krzywa $y = f(x)$ przeszła w prostą $y' = mx'$, to okazuje się, że funkcja φ występująca w (5) musi spełniać równanie (4). Z tego powodu równanie to (a raczej jego wielowymiarowy analogon) odgrywa ważną rolę w teorii równań różniczkowych, gdzie jest używane do transformowania układów nieliniowych w układy liniowe. Idee te, pochodzące jeszcze od Poincarégo, były w nowszych czasach rozwijane m.in. przez S. Sternberga (por. [13]). Ponadto równanie (4) występuje właśnie w teorii procesów stochastycznych, a także ma podstawowe znaczenie dla teorii iteracji ciągłych.

Odnotujmy tutaj następujące twierdzenie dotyczące równania (4) (por. [11], [13], [21]).

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli funkcja $f(x)/x$ jest monotoniczna w $(0, a)$, a ponadto*

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} f(x)/x = m, \quad 0 < m < 1,$$

to równanie (4) *ma w $(0, a)$ dokładnie jednoparametrową rodzinę takich rozwiązań φ, że funkcja $\varphi(x)/x$ jest monotoniczna w $(0, a)$. Rozwiązania te dane są wzorem*

$$\varphi(x) = c \lim_{n \to \infty} f^n(x)/f^n(x_0), \quad x \in (0, a), \tag{6}$$

gdzie c jest parametrem, zaś x_0 jest dowolnie ustalonym punktem przedziału $(0, a)$.

Twierdzenie 2 sprowadza się do twierdzenia 1 przez wprowadzenie nowej funkcji $\varphi^*(x) = \varphi(x)/x$.

Wzór (6) był po raz pierwszy użyty przez Szekeresa [20] i zastąpił mniej ogólny, klasyczny wzór ([7]; por. też [13])

$$\varphi(x) = c \lim_{n \to \infty} m^{-n} f^n(x), \quad x \in (0, a). \tag{7}$$

Jeżeli obie granice istnieją (różne od zera i nieskończoności), to rodziny funkcji (6) i (7) są identyczne. Następujące twierdzenie Senety [17] (por. też [21]) mówi, kiedy można w twierdzeniu 2 wzór (6) zastąpić przez (7).

TWIERDZENIE 3. *Pod założeniami twierdzenia* 2 *granica* $\lim_{n\to\infty} m^{-n}f^n(x)$ *zawsze istnieje w tym sensie, że jest albo dodatnia i skończona w* $(0, a)$, *albo jest nieskończona w* $(0, a)$, *albo jest identycznie równa zeru w* $(0, a)$. *Granica ta jest skończona* (*i wtedy rodziny funkcji* (6) *i* (7) *są identyczne*) *wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x)-mx|}{x^2}\,dx,$$

gdzie δ *jest dowolną liczbą z przedziału* $(0, a)$.

Innym ważnym równaniem funkcyjnym o jednej zmiennej jest tzw. równanie Abela

$$\varphi[f(x)] = \varphi(x)+1. \tag{8}$$

Podobnie jak równanie Schrödera, występuje ono w procesie linearyzacji, gdy chcemy, aby transformacja (5) przekształciła krzywą $y = f(x)$ w prostą $y' = x'+1$.

Następujące twierdzenie ([12]; por. też [13], [21]) orzeka o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań wypukłych równania (8).

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest wklęsła w przedziale* $(0, a)$ *oraz*

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f(x)/x = 1,$$

to równanie (8) *ma w* $(0, a)$ *dokładnie jednoparametrową rodzinę rozwiązań wypukłych. Rozwiązania te dane są wzorem*

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)-f^n(x_0)}{f^{n+1}(x_0)-f^n(x_0)}+c, \quad x \in (0, a), \tag{9}$$

gdzie c *jest parametrem, zaś* x_0 *jest dowolnie ustalonym punktem przedziału* $(0, a)$.

Algorytm (9) pochodzi od Lévy'ego [14].

Również twierdzenie 4 można wyprowadzić z twierdzenia 1, a raczej z mocniejszej jego wersji, w której równanie rozpatrywane jest prawie wszędzie w $(0, a)$ (por. [10], [19]). Wystarczy w tym celu zróżniczkować równanie (8).

Zauważmy, że równanie (8) jest znacznie subtelniejsze niż równanie (4) i można się nim posłużyć w trudniejszym przypadku, gdy pochodna funkcji f w zerze wynosi 1, kiedy to równanie (4) zawodzi. Zauważmy też, że każde rozwiązanie równania (8) musi stawać się nieskończone w zerze. Dlatego nie można uzyskiwać jednoznaczności rozwiązań równania (8) przez żądanie odpowiedniej regularności rozwiązań w zerze (jak to jest możliwe w przypadku równania Schrödera; por. [10], [13]).

2. Proces Galtona–Watsona, podstawowy model teorii tzw. procesów kaskadowych lub gałązkowych, był po raz pierwszy rozpatrywany przez uczonych angielskich F. Galtona i H. W. Watsona, mniej więcej sto lat temu, w związku z następującym zagadnieniem ([3], [21]). Zaobserwowano, że liczne nazwiska wielkich i potężnych niegdyś rodów stają się rzadkie lub zgoła zanikają. Tłumaczono to tym, że wzrost potęgi i bogactwa poszczególnych rodów, a co za tym idzie wzrost dobrobytu i sprawności intelektualnej, pociąga za sobą spadek płodności. Jednakże pogląd ten spotkał się z zarzutem, że wniosek taki jest być może zbyt pochopny; zawsze może się zdarzyć, że dany ród wymrze z tych czy innych losowych powodów i aby móc sformułować jakieś wnioski trzeba wpierw wiedzieć, jakie jest prawdopodobieństwo, że jakikolwiek ród wymrze. Prowadzi to do następującego problemu.

Niech p_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, będzie prawdopodobieństwem, że mężczyzna ma j synów i niech te same wartości określają dla każdego z tych synów prawdopodobieństwo posiadania j męskich potomków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ród zapoczątkowany przez wyjściowego „prarodzica" wymrze; i ogólniej, jaki jest rozkład prawdopodobieństwa liczebności n-tej generacji?

Zauważmy, że liczą się tutaj tylko męscy potomkowie, gdyż tylko oni są nosicielami nazwiska.

Powyższy problem prowadzi do badania matematycznego modelu określonego nazwą prostego procesu Galtona–Watsona. Taki sam lub podobne modele występują też w pewnych zagadnieniach genetyki, w chemicznych i jądrowych reakcjach łańcuchowych, przy opisie wzmacniaczy elektronicznych, jak też w teorii promieniowania kosmicznego. W minionym stuleciu proces Galtona–Watsona był szeroko badany przez licznych uczonych (por. [3]).

Definiujemy prosty proces Galtona–Watsona jako łańcuch Markowa $\{Z_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (którego przestrzenią stanów jest zbiór nieujemnych liczb całkowitych) opisany wzorami

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = X_1 + \ldots + X_{Z_n},$$

gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie

$$p_j = P(X = j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

spełniającym warunek $p_j \neq 1$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots$ Zmienną losową X_i możemy interpretować jako ilość potomków i-tego osobnika w n-tej generacji. Zmienną losową Z_n interpretujemy jako liczebność n-tej generacji.

Powyższe warunki matematyczne oznaczają, że liczebność wcześniejszych generacji nie ma wpływu na rozkład prawdopodobieństwa rządzący ilością potomków poszczególnych osobników (przy czym rozkład ten nie zmienia się w czasie i jest identyczny dla wszystkich osobników) oraz że linie zapoczątkowane przez różnych osobników rozwijają się niezależnie od siebie. Te idealistyczne warunki nie są na ogół spełnione w rzeczywistości, niemniej jednak często można stosować model Galtona–Watsona jako zadowalający przybliżony opis rzeczywistości.

Dla matematycznego opisu procesu Galtona–Watsona wygodnie jest posługiwać się funkcją tworzącą

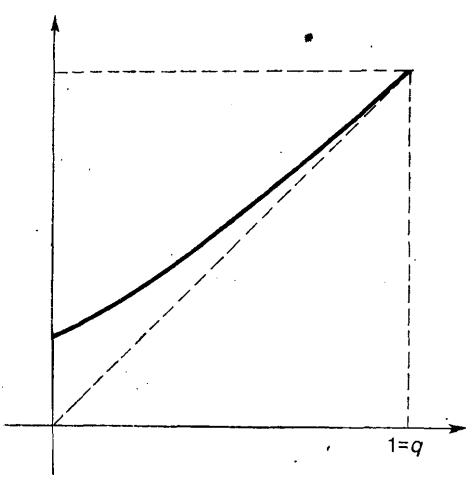
$$F(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j. \tag{11}$$

Dla $s = 1$ otrzymujemy $F(1) = 1$; tak więc szereg (11) jest zbieżny co najmniej w przedziale $(-1, +1]$. W przedziale $(-1, +1)$ przedstawia on funkcję analityczną; natomiast w punkcie 1 funkcja F nie musi mieć tak wysokiej regularności. W szczególności pochodna F w jedynce dana jest wzorem

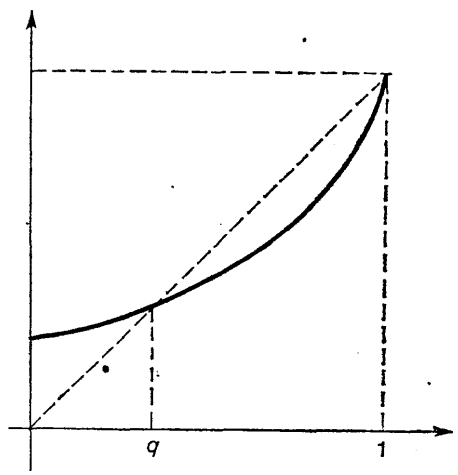
$$m = F'(1) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j,$$

przedstawia więc wartość średnią rozkładu (10) i może być skończona lub nie. Ogólnie, warunek istnienia (skończonej) k-tej pochodnej $F^{(k)}(1)$ jest równoważny skończoności k-tego momentu zmiennej o rozkładzie (10).

W zależności od wartości pochodnej m wykres funkcji F w przedziale $[0, 1]$ może przebiegać tak jak na rys. 1 ($m \leqslant 1$) lub jak na rys. 2 ($m > 1$). W pierwszym przypadku 1 jest jedynym punktem stałym funkcji F w przedziale $[0, 1]$; w drugim przypadku funkcja F ma w tym przedziale dwa punkty stałe. Najmniejszy punkt



Rys. 1



Rys. 2

stały funkcji F w $[0, 1]$ oznaczać będziemy przez q. Otóż okazuje się, że wartość q jest prawdopodobieństwem wymarcia w procesie Galtona–Watsona ([3], [21]). Tak więc, jeżeli wartość średnia przyrostu naturalnego m nie przekracza jedynki, to prawdopodobieństwo wymarcia q wynosi 1. Jeżeli natomiast wartość średnia przyrostu naturalnego m jest większa od jeden, to prawdopodobieństwo wymarcia q jest mniejsze od jeden.

Drugie zagadnienie sformułowane na początku tego paragrafu, problem znalezienia rozkładu prawdopodobieństwa liczebności n-tej generacji

$$p_j^n = P(Z_n = j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

ma następujące rozwiązanie ([3], [21]): funkcją tworzącą zmiennej Z_n jest n-ta iterata F^n funkcji (11)

$$F^n(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^n s^j. \tag{13}$$

Wzór (13) daje praktyczny sposób obliczania prawdopodobieństw (12). Pozwala on też łatwo znaleźć momenty zmiennych Z_n.

Prawdopodobieństwa przejścia ze stanu i do stanu j

$$p_{ij} = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i), \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

znajdujemy ze wzoru

$$[F(s)]^i = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} s^j,$$

gdzie po lewej stronie występuje zwykłe potęgowanie. Można wykazać, że stan $j = 0$ jest pochłaniający (jeśli, dla pewnego n, n-ta generacja jest pusta, to również wszystkie następne generacje są puste), natomiast wszystkie stany $j > 0$ są chwilowe.

Wzór (13) decyduje, że w dalszym rozwijaniu teorii procesu Galtona–Watsona wystąpią równania funkcyjne, gdyż iteracje są nierozłącznie związane z równaniami funkcyjnymi o jednej zmiennej. Zauważmy ponadto, że wobec (10) wszystkie współczynniki w szeregu (11) są nieujemne. Zatem funkcja F jest absolutnie monotoniczna w przedziale $[0, 1]$ i w szczególności jest ściśle rosnąca i wypukła. Z tego powodu teoria rozwiązań monotonicznych i rozwiązań wypukłych będzie tu szczególnie przydatna i pozwoli ona uniknąć zbędnych założeń o skończoności momentów.

3. Jako przykład zastosowania równań funkcyjnych w teorii procesu Galtona–Watsona przytoczymy następujące twierdzenie graniczne.

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli* $m < 1$, *to dla każdego* $j \geqslant 1$ *istnieje granica prawdopodobieństw warunkowych*

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = j | Z_n \neq 0) = a_j, \tag{15}$$

przy czym

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1. \tag{16}$$

Funkcja tworząca

$$A(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j s^j \tag{17}$$

spełnia równanie funkcyjne

$$1-A[F(s)] = m\big(1-A(s)\big), \qquad s \in [0, 1], \tag{18}$$

i jest jego jedynym rozwiązaniem generującym (właściwy lub niewłaściwy) rozkład i spełniającym warunek $A(0) = 0$.

Twierdzenie 5 podaje nam informację o przybliżonym rozkładzie prawdopodobieństwa dla liczebności n-tej generacji, dla dużych n, pod założeniem, że wymarcie nastąpi w czasie późniejszym. Równanie (18) pozwala też efektywnie wyznaczyć ten przybliżony rozkład.

Naszkicujemy tu dowód twierdzenia 5. Oznaczmy $a_j^n = P(Z_n = j | Z_n \neq 0)$ oraz

$$A_n(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^n s^j.$$

Proste przeliczenia (oparte na wzorze Bayesa) prowadzą do wzoru

$$A_n(s) = 1 - \frac{1-F^n(s)}{1-F^n(0)}.$$

Kładąc $x = 1-s$ oraz $f(x) = 1-F(1-x)$ otrzymujemy stąd

$$A_n(s) = 1 - \frac{f^n(x)}{f^n(1)}.$$

Ponieważ funkcja f spełnia założenia twierdzenia 2, wynika stąd istnienie granicy

$$A(s) = \lim_{n\to\infty} A_n(s), \tag{19}$$

która spełnia równanie (18). Warunek $A(0) = 0$ jest oczywisty, zaś jedyność A wynika również bezpośrednio z twierdzenia 2.

Związek (19), w oparciu o tzw. „twierdzenie o ciągłości" (por. np. [2], [21]), implikuje istnienie granic (15), dla których zachodzi (17). Warunek (16) (równoważny warunkowi $A(1) = 1$, co oznacza, że mamy do czynienia z rozkładem właściwym) jest prostą konsekwencją równania (18).

Twierdzenie 5 w przytoczonej wersji pochodzi od Heathcote'a, Senety i Vere-Jonesa [4] (por. też [18], [21]). Pod dodatkowym założeniem skończoności drugiego momentu było ono udowodnione przez Jagłoma [5], a pod nieco słabszym założeniem dotyczącym regularności funkcji F w jedynce przez Nagajewa [15], lecz dopiero teoria monotonicznych i wypukłych rozwiązań równań funkcyjnych dostarczyła środka pozwalającego udowodnić to twierdzenie w całej ogólności.

Twierdzenie 5, w przeciwieństwie do twierdzeń Jagłoma i Nagajewa, nie gwarantuje skończoności pochodnej $A'(1)$ (czyli wartości średniej rozkładu granicz-

nego (15)). Z twierdzenia 3 można wyprowadzić następujący wniosek ([18], [21]): pochodna $A'(1)$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka

$$\int_0^{\delta} \frac{|1-mx-F(1-x)|}{x^2}\,dx, \tag{20}$$

gdzie δ jest dowolną liczbą z przedziału $(0, 1)$.

Stąd też można wyprowadzić asymptotyczne relacje dla wartości $1-F^n(0) = P(Z_n \neq 0)$. Jeżeli całka (20) jest skończona, to

$$1-F^n(0) \sim \frac{1}{A'(1)} m^n, \quad n \to \infty; \tag{21}$$

natomiast jeżeli całka (20) jest rozbieżna, to

$$1-F^n(0) = o(m^n), \quad n \to \infty.$$

Związek (21) z silniejszym założeniem skończoności drugiego momentu był uzyskany przez Kołmogorowa [8].

Innym zagadnieniem prowadzącym do równań funkcyjnych jest problem miary stacjonarnej dla procesu Galtona–Watsona. Ponieważ, jak się dowodzi (por. [3], [21]), jedyną taką miarą jest miara banalna skoncentrowana na stanie $j = 0$, rozpatruje się zamiast tego problem istnienia i jednoznaczności miary stacjonarnej na przestrzeni stanów chwilowych $j \geqslant 1$. Przez miarę stacjonarną rozumie się zatem ciąg liczb v_j, $j = 1, 2, \ldots$, nieujemnych i nie znikających równocześnie, spełniających związki

$$v_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} v_i, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

gdzie p_{ij} są prawdopodobieństwami przejścia (14).

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli ciąg v_j, $j = 1, 2, \ldots$, jest miarą stacjonarną dla procesu Galtona–Watsona, w którym $p_0 \neq 0$, to szereg*

$$V(s) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j s^j \tag{22}$$

jest zbieżny w przedziale $[0, q)$ oraz funkcja $V^*(s) = V(s)/V[F(0)]$ spełnia równanie funkcyjne Abela

$$V[F(s)] = V(s)+1, \quad s \in [0, q). \tag{23}$$

Na odwrót, jeżeli funkcja $V(s)$ postaci (22) z nieujemnymi współczynnikami v_j spełnia równanie (23), to liczby v_j stanowią miarę stacjonarną dla procesu Galtona–Watsona.

Twierdzenie powyższe (por. [3], [21]) pozwala udowodnić, w oparciu o teorię równań funkcyjnych, istnienie miary stacjonarnej bez żadnych założeń o wartości czy nawet skończoności średniej m. Jednakże twierdzenie 4 daje coś więcej ([16]; por. też [18], [21]):

TWIERDZENIE 7. *W przypadku* $m = 1$ *miara stacjonarna dla procesu Galtona–Watsona jest jedyna z dokładnością do stałej multyplikatywnej.*

Natomiast, jak pokazał Kingman [6], w przypadku, gdy $m \neq 1$, miara stacjonarna może nie być jedyna.

Powyższe przykłady nie wyczerpują bynajmniej wszystkich zastosowań równań funkcyjnych w teorii procesów stochastycznych, a równania (4) i (8) nie są jedynymi równaniami funkcyjnymi, które w tej ostatniej interweniują. Szersze rozwinięcie tej problematyki można znaleźć w skrypcie [21], zawierającym materiały z trzech konferencji szkoleniowych poświęconych tej problematyce, jakie zostały zorganizowane przez Uniwersytet Śląski w latach 1970-1971.

Równania funkcyjne od dawna stanowiły jedno z głównych narzędzi w badaniach nad procesem Galtona–Watsona (por. [3]). Jednakże stosowano wówczas klasyczne twierdzenia o analitycznych rozwiązaniach, wymagające silnych założeń dodatkowych o istnieniu momentów wysokich rzędów, założeń, jak się okazało, zupełnie zbytecznych. Zastosowanie twierdzeń o rozwiązaniach wypukłych pozwoliło pozbyć się tych nieistotnych założeń i udowodnić twierdzenia pod najsłabszymi możliwie warunkami. Istotnie, warunek wypukłości czy monotoniczności funkcji tworzącej nie jest w najmniejszym stopniu ograniczający, a jego spełnienie podyktowane jest przez naturę tego pojęcia, przez samą definicję funkcji tworzącej.

Literatura

[1] J. Burek und M. Kuczma, *Einige Bemerkungen über monotone und konvexe Lösungen gewisser Funktionalgleichungen*, Math. Nachr. 36 (1968), str. 121-134.

[2] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom II, Warszawa 1969.

[3] Th. E. Harris, *The theory of branching processes*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.

[4] C. R. Heathcote, E. Seneta and D. Vere-Jones, *A refinement of two theorems in the theory of branching processes*, Teor. Veroyat. Primen. 12 (1967), str. 341-346.

[5] A. M. Jagłom (А. М. Ягломъ), *Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов*, Докл. Акад. Наук СССР 56 (1947), str. 795-798.

[6] J. F. C. Kingman, *Stationary measures for branching processes*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), str. 245-247.

[7] G. Koenigs, *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 1 (1884), Supplément, str. 3-41.

[8] A. N. Kołmogorow (А. Н. Колмогоровъ), *К решению одной биологический задачи*, Изв, Инст. Мат. Мех. при Томск. Гос. Унив. 2 (1938), str. 1-6.

[9] M. Kuczma, *Sur une équation fonctionnelle*, Mathematica, Cluj, 3 (26) (1961), str. 79-87.

[10] — *On the Schröder equation*, Rozprawy Mat. 34 (1963).

[11] — *Note on Schröder's functional equation*, J. Australian Math. Soc. 4 (1964), str. 149-151.

[12] — *On convex solutions of Abel's functional equation*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astron. phys. 13 (1965), str. 645-648.

[13] — *Functional equations in a single variable*, Monografie Matematyczne 46, Warszawa 1968.

[14] P. Lévy, *Fonctions à croissance régulière et itération d'ordre fractionnaire*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 5 (1928), str. 269-298.

[15] A. W. Nagajew (А. В. Нагаевъ), *Уточнение некоторых теорем теории ветвящихся случайных процессов*, Труды Ташк. Унив. 189 (1961), str. 55-63.

[16] E. Seneta, *The Galton–Watson process with mean one*, J. Appl. Probability 4 (1967), str. 489-495.

[17] — *On Koenigs' ratios for iterates of real functions*, J. Australian Math. Soc. 10 (1969), str. 207-213.

[18] — *Functional equations and the Galton–Watson process*, Adv. Appl. Probability 1 (1969), str. 1-42.

[19] A. Smajdor, *On monotonic solutions od some functional equations*, Rozprawy Mat. 82 (1971).

[20] G. Szekeres, *Regular iteration of real and complex functions*, Acta Math. 100 (1958), str. 203-258.

[21] *Równania funkcyjne w teorii procesów stochastycznych*, skrypt pod redakcją M. Kuczmy, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1972.