ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVI (1973)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. L. Doob (Urbana, Illinois)

Co to są martyngały?*

1. Wprowadzenie. Teoria martyngałów dobrze ilustruje rozwój całego rachunku prawdopodobieństwa: jej podstawowe definicje wynikły z zagadnień dotyczących gier hazardowych, natomiast sama teoria stała się subtelnym narzędziem współczesnej matematyki. Martyngały są przedmiotem systematycznych badań dopiero od około trzydziestu lat i część podręczników probabilistycznych poświęca im jeszcze mało miejsca, zastosowania ich są jednak już tak liczne i różnorodne, że nie sposób wskazać opracowania, w których można by znaleźć ich pełny przegląd. Bibliografie prac [1], [2] są najpełniejszymi źródłami.

Celem niniejszego przeglądu teorii martyngałów jest przybliżenie istoty teorii bez wnikania w szczegóły techniczne. Podstawowe definicje będą podawane w dwóch wariantach, z których pierwszy, bardziej elementarny i intuicyjny, wystarczy do zrozumienia większości przykładów. Przykłady ilustrują jedynie bezpośrednie zastosowania i wymagają minimalnego przygotowania.

Przypominamy, że w teorii prawdopodobieństwa wychodzi się od zbioru nazywanego *przestrzenią zdarzeń elementarnych. Zdarzenia losowe* są podzbiorami tej przestrzeni, a funkcje określone na niej to *zmienne losowe*.

Załóżmy, dla prostoty, że przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z przeliczalnej ilości elementów $\omega_1, \omega_2, \ldots$, którym zostały przyporządkowane prawdopodobieństwa $p_1, p_2, \ldots, p_j \geqslant 0$ i $\sum_j p_j = 1$. Jeśli $X_1, X_2, \ldots$, są zmiennymi losowymi, to przez

$$\{X_1 = a_1, \ldots, X_k = a_k\} = \bigcap_m \{\omega_j : X_m(\omega_j) = a_m\}$$

oznacza się zbiór tych elementów, na których zmienne przyjmują wskazane wartości. *Prawdopodobieństwo* $P\{A\}$ zdarzenia A definiuje się jak $\sum p_j$, gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie wartości j, dla których ω_j należy do A. Jeśli $P\{B\} > 0$, to *prawdopodobieństwo warunkowe* zdarzenia A względem zdarzenia B jest zdefiniowane jako

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}.$$

---

* Przekład artykułu zamieszczonego w The American Mathematical Monthly 78 (1971), str. 451-463.

Wartość oczekiwaną zmiennej losowej X określa się wzorem

$$E\{X\} = \sum_j X(\omega_j)p_j \tag{1.1}$$

(przy założeniu, że szereg jest zbieżny bezwzględnie), a *warunkową wartość oczekiwaną* zmiennej X względem zdarzenia B, gdzie $P\{B\} > 0$, jako

$$E\{X|B\} = \sum_{\omega_j \in A} X(\omega_j)\frac{p_j}{P\{B\}}. \tag{1.2}$$

Gdy $P\{B\} = 0$, to warunkowe prawdopodobieństwo i warunkową wartość oczekiwaną można zdefiniować dowolnie.

Bardzo pożyteczne okazało się potraktowanie warunkowej wartości oczekiwanej jako funkcji, w sposób następujący. Niech $\{B_n, n \geqslant 1\}$ będzie rozbiciem zbioru Ω, to znaczy przeliczalną rodziną rozłącznych zbiorów, których suma równa się Ω. Rozbicie to wyznacza i jednocześnie jest wyznaczane przez pewne σ-ciało $\mathscr{F}$, mianowicie rodzinę wszystkich zbiorów będących sumami elementów rozbicia. Jeżeli X jest zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej, to definiujemy funkcję $E\{X|\mathscr{F}\}$, zwaną *warunkową wartością oczekiwaną* zmiennej X względem σ-ciała $\mathscr{F}$, jako zmienną losową o stałej wartości $E\{X|B_n\}$ na każdym zbiorze B_n. Definicja ta jest jednoznaczna z wyjątkiem tych zbiorów rozbicia, których prawdopodobieństwo jest równe zero. W szczególności, jeżeli $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ są zmiennymi losowymi, to indukują one rozbicie składające się ze zbiorów postaci $\{Y_1 = a_1, \ldots, Y_k = a_k\}$; w tym przypadku $E\{X|\mathscr{F}\}$ jest funkcją równą

$$E\{X|Y_1 = a_1, \ldots, Y_k = a_k\}$$

na zbiorach $\{Y_1 = a_1, \ldots, Y_k = a_k\}$ i bywa oznaczana symbolem $E\{X|Y_1, \ldots, Y_k\}$.

Niech $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \ldots$ będzie skończonym lub nieskończonym, wstępującym ciągiem σ-ciał (generowanych przez rozbicia w opisany wyżej sposób). Będziemy interpretować $\mathscr{F}_n$ jako zbiór wszystkich zdarzeń, które mogły zajść do chwili n włącznie. Założenie monotoniczności odpowiada faktowi, że „przeszłość" do chwili $n+1$ jest bogatsza w zdarzenia aniżeli „przeszłość" do chwili n. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych. Potraktujmy X_n jak część historii dokonanej w chwili n przyjmując, że każde zdarzenie postaci $\{X_n = a\}$ jest elementem $\mathscr{F}_n$.

Przedmiotem rozważań będą przede wszystkim ciągi zmiennych losowych. Niekiedy ciąg $X_1, X_2, \ldots$ jest zadany z góry, a „przeszłość" $\mathscr{F}_n$ określa się za pomocą $X_1, \ldots, X_n$. Rozbicie generujące σ-ciało $\mathscr{F}_n$ składa się wówczas ze zbiorów

$$\{X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n\}.$$

Tak określony ciąg $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ będziemy nazywali *minimalnym* (ze względu na zadany ciąg zmiennych).

Ciąg $\{X_n, n \geqslant 1\}$ nazywa się *martyngałem* względem ciągu $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$, gdy każda ze zmiennych X_n ma skończoną wartość oczekiwaną i dla $m < n$ warunkowa

wartość oczekiwana X_n względem „przeszłości" $\mathcal{F}_n$ jest równa X_m, to znaczy

$$E\{X_n|F_m\} = X_m. \tag{1.3}$$

Ta zależność między funkcjami określonymi na przestrzeni zdarzeń elementarnych ma zachodzić prawie wszędzie, a więc z wyjątkiem podzbioru, którego prawdopodobieństwo jest równe zero. Gdy każde prawdopodobieństwo p_j jest dodatnie, to zbiór ten jest pusty. Jeżeli X_n traktuje się jako kapitał gracza w momencie n, to równość (1.3) mówi, że gracz uczestniczy w grze sprawiedliwej. Gdy „=" zastąpi się przez „$\geqslant$" lub „$\leqslant$", to ciąg zmiennych losowych nazywa się odpowiednio *podmartyngałem* lub *nadmartyngałem*, a gra związana z ciągiem nosi nazwę *korzystnej* lub *niekorzystnej*. Oczywiście (przy ustalonych σ-ciałach) ciąg $\{X_n, n \geqslant 1\}$ jest nadmartyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{-X_n, n \geqslant 1\}$ jest podmartyngałem, oraz jest martyngałem, gdy jest jednocześnie podmartyngałem i nadmartyngałem. Z definicji wynika, że ciąg $E\{X_n\}$ rośnie, maleje lub jest stały, gdy ciąg $\{X_n, n \geqslant 1\}$ jest odpowiednio podmartyngałem, nadmartyngałem lub martyngałem (monotoniczność interpretujemy tutaj w szerszym sensie).

Z równości (1.3) wynika, że

$$E\{X_n|X_1, \ldots, X_m\} = X_m \tag{1.4}$$

lub równoważnie (gdy prawdopodobieństwo zdarzenia $\{X_1 = a_1, \ldots, X_m = a_m\}$ jest dodatnie), że

$$E\{X_n|X_1 = a_1, \ldots, X_m = a_m\} = a_m. \tag{1.4'}$$

Jeżeli ciąg $\{\mathcal{F}_n, n \geqslant 1\}$ jest minimalny, to warunki (1.4) i (1.3) są równoważne. Inaczej mówiąc, dowolny martyngał względem zadanego ciągu σ-ciał jest martyngałem względem minimalnego ciągu σ-ciał. Analogiczna uwaga dotyczy podmartyngałów i nadmartyngałów. Gdy ciąg σ-ciał nie jest wyraźnie wskazany oznacza to, że w użyciu jest ciąg minimalny. Definicję martyngału można zastosować również do zmiennych o wartościach zespolonych. Pewne przykłady takich martyngałów zostaną rozpatrzone później. Oczywiście, części rzeczywista i urojona zespolonego martyngału są rzeczywistymi martyngałami.

2. Definicje w przypadku ogólnym. W definicjach paragrafu 1 przyjmowaliśmy przeliczalność przestrzeni zdarzeń elementarnych, a więc założenie, które nie będzie spełnione w wielu przykładach omawianych poniżej. W niniejszym paragrafie podane zostaną definicje dla przypadku ogólnego i to w języku nieprobabilistycznym, aby przekonać niektórych, krytycznie usposobionych czytelników, że teoria prawdopodobieństwa obywa się bez domieszki terminów takich jak moneta, zdarzenie, gracz, urna, jakkolwiek sens kryjący się pod nimi miał duży wpływ na samą teorię.

Niech $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ będzie przestrzenią z miarą: Ω jest wtedy zbiorem, $\mathcal{F}$ σ-ciałem podzbiorów, a P miarą zdefiniowaną na $\mathcal{F}$. W dalszym ciągu zakładać będziemy, że $P\{\Omega\} = 1$. (Pewni analitycy oskarżają probabilistów, że wprowadzają w błąd

niespecjalistów, ukrywając funkcje mierzalne i całki pod nazwami zmiennych losowych i wartości oczekiwanych. Zauważmy jednak, że probabiliści zajmowali się całkami po abstrakcyjnych zbiorach, kiedy jeszcze analitycy nie śnili o teorii miary. Z drugiej strony, wśród probabilistów odzywają się głosy, że teoriomiarowe rozważania zaciemniają prawdopodobieństwo.) Niech $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \ldots$ będzie wstępującym ciągiem σ-ciał zbiorów z $\mathscr{F}$ i niech $\{X_n, n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem zespolonych funkcji na Ω spełniających warunki:

(a) X_n jest $\mathscr{F}_n$-mierzalna,

(b) X_n jest całkowalna,

(c) jeżeli $m < n$ i A jest zbiorem z $\mathscr{F}_m$, to

$$\int_A X_n dP = \int_A X_m dP. \tag{2.1}$$

Każdy ciąg funkcji o powyższych własnościach nazywa się *martyngałem* względem ciągu $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$. Gdy funkcje X_n są rzeczywiste i gdy „=" jest w (2.1) zastąpiona przez „$\leqslant$" lub „$\geqslant$", to ciąg takich funkcji nazywa się odpowiednio *nadmartyngałem* lub *podmartyngałem* względem zadanego ciągu σ-ciał.

W obecnej, ogólnej sytuacji, warunkową wartość oczekiwaną definiuje się tak, by równości (2.1) i (1.3) (która zachodzi P prawie wszędzie na Ω) były równoważne. W ten sposób wcześniejsze definicje stają się szczególnymi przypadkami dopiero co podanych, a uwagi z paragrafu 1, dotyczące martyngałów są słuszne również w ogólnym przypadku.

Definicje zostały sformułowane dla ciągów z dyskretnym zbiorem parametrów (uporządkowanym w zwykły sposób), mogą być jednak uogólnione na dowolny zbiór parametrów uporządkowany liniowo.

3. Przykład. Wartości oczekiwane, gdy wie się coraz więcej. Niech $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_n \subset \ldots$ będzie, jak zwykle, wstępującym ciągiem σ-ciał i niech X będzie zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej. Jeżeli $X_n = E\{X|\mathscr{F}_n\}$, to ciąg $X_1, X_2, \ldots$ jest martyngałem względem zadanego ciągu σ-ciał. A więc kolejne warunkowe wartości oczekiwane, gdy wie się coraz więcej, tworzą martyngał. Ogólniej, zbiór parametrów $1, 2, 3, \ldots$ można zastąpić dowolnym zbiorem liniowo uporządkowanym; istotnym warunkiem jest jedynie, by $\mathscr{F}_t$ rosły wraz z t. Każdy martyngał, którego zbiór parametrów ma element ostatni, jest powyższego typu. Jako X przyjmujemy wtedy ostatnią zmienną.

Przykład ten sugeruje możliwość zastosowań w statystyce i teorii informacji i jest powodem takich probabilistycznych ekstrawagancji jak stwierdzenie, że „gra, którą człowiek rozgrywa z naturą, poznając ją coraz lepiej, jest uczciwa". (Stwierdzenie to wskazuje, być może, jak wiernie martyngały odtwarzają sens sprawiedliwej gry.)

4. Przykład. Sumy niezależnych zmiennych losowych. Niech $Y_1, Y_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi i niech

$$X_n = Y_1 + \ldots + Y_n.$$

Łatwo udowodnić intuicyjnie oczywisty fakt, że ciąg $X_1, X_2, \ldots$ jest martyngałem, gdy $E\{Y_j\} = 0$. dla $j > 1$, nadmartyngałem, gdy $E\{Y_j\} \leqslant 0$ dla $j > 1$, i podmartyngałem, gdy $E\{Y_j\} \geqslant 0$ dla $j > 1$.

5. Przykład. Uśrednianie niezależnych zmiennych losowych. Przyjmijmy w poprzednim przykładzie, że zmienne $Y_1, Y_2, \ldots$ mają wspólny rozkład. Wtedy, wykorzystując symetryczność definicji, można pokazać, że ciąg

$$\ldots, \frac{X_3}{3}, \frac{X_2}{2}, X_1$$

jest martyngałem z zaznaczonym uporządkowaniem (od lewej do prawej). Przykład ten sugeruje możliwość zastosowań do prawa wielkich liczb i istnienie związków między teorią martyngałów a teorią ergodyczną. W rzeczywistości, między tymi dwiema teoriami jest ścisły związek i niekiedy powiada się, że jedna z nich zawiera drugą; od mówiącego zależy, którą z nich określa się jako ogólniejszą. W każdym wypadku jest prawdą, że w rozumnym sensie istnieją tylko dwa jakościowe twierdzenia o zbieżności w teorii miary (nie biorąc pod uwagę twierdzeń, w których „ze zbieżności rodzaju I wynika zbieżność rodzaju II) są to: twierdzenie ergodyczne i twierdzenie o zbieżności martyngałów. Drugie zostanie omówione poniżej. Każde z nich związane jest z coraz to precyzyjniejszym uśrednianiem.

6. Przykład. Funkcje harmoniczne na kracie. Niech S' będzie zbiorem wszystkich punktów przestrzeni d-wymiarowej o współrzędnych całkowitych, a S dowolnym podzbiorem S'. Punkt ξ z S nazywa się punktem *wewnętrznym* zbioru S jeżeli S zawiera wszystkich $2d$ najbliższych sąsiadów punktu ξ. Pozostałe punkty ξ z S nazywa się punktami *brzegowymi* zbioru S. Jeżeli $S \neq S'$, to istnieje co najmniej jeden punkt brzegowy. Funkcją u określoną na zbiorze S nazywamy *harmoniczną* (*nadharmoniczną*), gdy w każdym punkcie wewnętrznym S funkcja u jest równa (co najmniej równa) średniej arytmetycznej swoich wartości przyjmowanych w $2d$ najbliższych punktach. Na przykład, dowolna funkcja liniowa jest harmoniczna, a złożenie funkcji harmonicznej z wklęsłą jest funkcją nadharmoniczną. *Błądzeniem* na S nazywa się ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, \ldots$ o wartościach w S, opisany w sposób następujący: Ustalmy pewien punkt początkowy w S i przyjmijmy, że X_0 tożsamościowo równa się temu punktowi. Gdy $X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n$ i gdy a_n jest punktem wewnętrznym S, to X_{n+1} równa się któremuś z $2d$ sąsiednich punktów punktu a_n, przy czym każdemu z nich z prawdopodobieństwem $1/2d$. Jeżeli a_n leży na brzegu zbioru S, to $X_{n+1} = a_n$. Tak więc błądzenie trwa do momentu osiągnięcia któregoś z punktów brzegowych, po czym ustaje. Można udowodnić, że błądzenie takie istnieje. Jeżeli u jest funkcją harmoniczną (nadharmoniczną) na S, to ciąg zmiennych losowych $u(X_0), u(X_1), \ldots$ jest martyngałem (nadmartyngałem). Gdy rozpatruje się ciąg nieskończony $X_0, X_1, \ldots$, wtedy przestrzeń zdarzeń elemnetarnych musi być nieprzeliczalna.

7. Przykład. Klasyczne funkcje harmoniczne i analityczne. Przykład z paragrafu 6 można zmodyfikować następująco. Niech S będzie podzbiorem otwartym przestrze-

ni d-wymiarowej, $d \geqslant 1$. Funkcja u określona na S nazywa się funkcją *harmoniczną*, gdy jest funkcją ciągłą i gdy dla każdego punktu ξ z S i kuli B o środku ξ leżącej wraz z domknięciem w S, wartość $u(\xi)$ jest równa uśrednieniu wartości przyjmowanych przez funkcję u na brzegu B. Na przykład funkcje liniowe są harmoniczne w dowolnym wymiarze i są jedynymi funkcjami harmonicznymi, gdy $d = 1$, a S jest przedziałem. Dowodzi się, że funkcje harmoniczne są to te, które mają pochodne dowolnego rzędu i których laplasjan jest równy zero. Gdy $d = 2$, to część rzeczywista dowolnej funkcji analitycznej jest funkcją harmoniczną. Oznaczmy przez $B(\xi)$ brzeg kuli o środku w punkcie ξ i o promieniu 1, gdy $S = S'$, i o promieniu równym połowie odległości ξ od brzegu S, gdy ξ jest w S i $S \neq S'$. Jeżeli $d > 1$ i $A \subset B(\xi)$, to zdefiniujmy $p(\xi, A)$ jako $(d-1)$-wymiarowe „pole" zbioru A podzielone przez „pole" $B(\xi)$, a gdy $d = 1$ jako liczbę punktów zbioru A podzieloną przez 2. Błądzeniem na S będziemy nazywać ciąg zmiennych $X_0, X_1, \ldots$ o wartościach w S skonstruowany w sposób następujący: Ustalmy pewien punkt początkowy w S i przyjmijmy, że X_0 równa się tożsamościowo temu punktowi. Gdy $X_0 = a_0, X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n$, to X_{n+1} jest pewnym punktem zbioru $B(a_n)$, a prawdopodobieństwo (warunkowe), że X_{n+1} jest elementem zbioru A równa się $p(a_n, A)$. Z tej definicji wynika, że gdy u jest funkcją harmoniczną, lub gdy $d = 2$ funkcją analityczną na S, to ciąg zmiennych losowych $\{u(X_n), n \geqslant 0\}$ jest martyngałem. Analogiczne zależności zachodzą między funkcjami nadharmonicznymi (podharmonicznymi) a nadmartyngałami (podmartyngałami).

Paragrafy 6 i 7 wskazują na związki między teorią martyngałów a teorią potencjału. W rzeczywistości teoria procesów Markowa i teoria potencjału są w dużej mierze odmiennymi spojrzeniami na tę samą rzecz, a teoria martyngałów jest podstawowym narzędziem probabilistycznej teorii potencjału.

8. Dwie podstawowe zasady. Będzie nam potrzebne pojęcie *momentu zatrzymania*, nazywanego również *momentem Markowa* lub *momentem wyboru*. Niech

$$\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \ldots$$

będzie wstępującym ciągiem σ-ciał, a ν zmienną losową przyjmującą wartości ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, +\infty\}$. Zmienna ν nazywa się *momentem zatrzymania* względem ciągu $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$, jeśli zdarzenie $\{\nu \leqslant n\}$ jest elementem $\mathscr{F}_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, czyli, intuicyjnie mówiąc, gdy warunek $\nu \leqslant n$ zależy jedynie od tego, co zdarzyło się do chwili n. Na przykład, jeśli $\{X_n, n \geqslant 0\}$ jest martyngałem względem pewnego ciągu σ-ciał, a $\nu(\omega)$ jest pierwszą liczbą j, dla której $X_j(\omega) > 0$ lub $\nu(\omega) = +\infty$, jeśli takiej liczby nie ma, to wtedy ν jest momentem zatrzymania.

W poniższych nieprecyzyjnych sformułowaniach wyrażone są dwie podstawowe zasady teorii martyngałów, których dokładniejsze wersje i zastosowania będą podane później. Niech $X_0, X_1, \ldots$ będzie nadmartyngałem względem $\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1, \ldots$

Z_1. *Jeśli* $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots$ *są skończonymi momentami zatrzymania, niezbyt wielkimi w porównaniu z* $X_0, X_1, \ldots$, *wtedy ciąg* $X_{\nu_1}, X_{\nu_2}, \ldots$ *jest nadmartyngałem; martyngałem jest on wtedy, gdy* $\{X_n, n \geqslant 0\}$ *jest martyngałem.*

Z_2. *Jeśli* $\sup_n E\{|X_n|\}$ *nie jest zbyt wielkie, to* $\sup_n |X_n|$ *nie jest zbyt wielkie i ciąg*

$$\{X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots\}$$

możliwych wartości nadmartyngału nie jest ciągiem ściśle oscylującym.

Zasada Z_1 jest odbiciem faktu, że gracz uczestniczący w grze niesprawiedliwej (sprawiedliwej), będzie ją uważał za niesprawiedliwą (sprawiedliwą) również i wtedy, gdy będzie patrzył na swe pieniądze nie po każdej grze, ale po grach z numerami $\nu_1, \nu_2, \ldots$ Poniższa wersja zasady Z_1, w której wszystkie momenty zatrzymania są skończone, będzie nazwana *twierdzeniem o momentach zatrzymania*:

Jeżeli $\{X_n, n \geqslant 0\}$ *jest nadmartyngałem (martyngałem) i każdy z momentów* ν_j *jest ograniczony, wtedy ciąg* $\{X_{\nu_j}, j \geqslant 1\}$ *jest również nadmartyngałem (martyngałem). Drugi z ciągów pozostaje nadmartyngałem, bez dodatkowych założeń o momentach zatrzymania, jeśli* $X_j \geqslant 0$ *dla wszystkich* j.

Następne twierdzenie, które będzie nazywane *twierdzeniem o zbieżności martyngałów*, jest konkretyzacją zasady Z_1:

Jeżeli $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *jest nadmartyngałem oraz* $\sup_n E\{|X_n|\} < \infty$, *wtedy granica* $\lim_{n\to\infty} X_n$ *istnieje i jest prawie na pewno skończona.*

Jeśli ciąg $\{\ldots, X_{-1}, X_0\}$ *(uporządkowany z lewej do prawej) jest nadmartyngałem, wtedy (prawie na pewno) istnieje granica*

$$\lim_{n\to-\infty} X_n = X_{-\infty} \quad \textit{oraz} \quad -\infty < X_{-\infty} \leqslant \infty.$$

Prawie na pewno znaczy tutaj wszędzie na przestrzeni zdarzeń elementarnych z wyjątkiem pewnego zbioru o prawdopodobieństwie zero. (Jedną z godnych uwagi różnic między teorią prawdopodobieństwa a teorią miary jest, że probabiliści piszą często „prawie na pewno", podczas gdy specjaliści z teorii miary „prawie wszędzie".)

Twierdzenie o zbieżności martyngałów powinno być zestawione z *twierdzeniem ergodycznym*, które podamy w następującej postaci:

Niech $Z_1, Z_2, \ldots$ *będą zmiennymi losowymi o skończonych wartościach oczekiwanych i o własności: dla dowolnej liczby* $n \geqslant 0$ *łączny rozkład* $Z_j, Z_{j+1}, \ldots, Z_{j+n}$ *nie zależy od* $j \geqslant 1$. *Wtedy, prawie na pewno, granica*

$$\lim_n \frac{Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}{n} \tag{8.1}$$

istnieje i jest skończona.

Oznaczmy przez Z'_n iloraz występujący w (8.1), wtedy Z'_n jest średnią ważoną zmiennych $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, a Z'_{n+1} jest średnią ważoną zmiennych $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_n$, Z_{n+1}. Dlatego Z'_{n+1} jest „grubszym" uśrednieniem aniżeli Z'_n. Natomiast z równości definiującej martyngał $\{X_n, n \geqslant 0\}$ wynika, że X_n jest uśrednieniem zmiennej X_{n+1}. Jeżeli więc istnieje jakiś związek między twierdzeniem o zbież-

ności martyngałów a twierdzeniem ergodycznym, to można przypuszczać, że twierdzenie ergodyczne odpowiada twierdzeniu o zbieżności martyngałów z malejącymi wskaźnikami. Przykład z paragrafu 11 potwierdza to przypuszczenie w specjalnym przypadku.

9. Ciąg dalszy paragrafu 3. W przykładzie paragrafu 3 mamy

$$E\{|X_n|\} \leqslant E\{|X|\}.$$

Dlatego z twierdzenia o zbieżności martyngałów wynika, że granica $\lim_n E\{X|\mathscr{F}_n\}$ istnieje prawie na pewno. Można udowodnić, że granica ta jest identyczna z $E\{X|\mathscr{F}_\infty\}$, gdzie $\mathscr{F}_\infty$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym wszystkie zbiory z $\bigcup_n \mathscr{F}_n$. Otrzymaliśmy w ten sposób twierdzenie o pewnego typu ciągłości dla warunkowych wartości oczekiwanych. Istnieje również analogiczne twierdzenie dla zstępującego ciągu σ-ciał.

10. Ciąg dalszy paragrafu 4. W paragrafie 4 przyjmijmy $E\{Y_j\} = 0$ dla wszystkich j. Ciąg $\{X_n, n \geqslant 1\}$ jest wtedy martyngałem i zgodnie z twierdzeniem o zbieżności martyngałów szereg $\sum_j Y_j$ jest zbieżny (prawie na pewno) jeżeli tylko $\sup_n\{|\sum_{j=1}^n Y_j|\} < \infty$. Przypuśćmy na przykład, że $E\{Y_j^2\} < \infty$ dla dowolnego j; wtedy szereg $\sum_j Y_j$ jest szeregiem ortogonalnych zmiennych losowych i dlatego zbiega przeciętnie (tzn. w $L^2(\Omega)$), gdy $\sum_j E\{Y_j^2\} < \infty$, czyli gdy $\sup_n E\{X_n^2\} < \infty$. Ze skończoności supremum wynika, że spełnione są założenia twierdzenia o zbieżności martyngałów.

Wykazaliśmy w ten sposób, że ze zbieżności przeciętnej sum niezależnych zmiennych losowych o wartościach oczekiwanych zero wynika zbieżność prawie na pewno. Aby uzyskać następne zastosowanie teorii martyngałów do sum niezależnych zmiennych losowych przyjmijmy, że $Z_1, Z_2, \ldots$ są zmiennymi niezależnymi o wspólnym rozkładzie i o wartościach oczekiwanych a. Jeżeli $X_0 = 0$ i $X_n = \sum_{j=1}^n (Z_j - a)$ dla $n > 0$, to ciąg $\{X_n, n \geqslant 0\}$ jest ciągiem sum niezależnych zmiennych losowych z zerowymi wartościami oczekiwanymi i jako taki jest martyngałem. Jeżeli ν jest skończonym momentem zatrzymania (względem minimalnego ciągu σ-ciał) o skończonej wartości oczekiwanej oraz $\nu_1 = 0$ i $\nu_2 = \nu$, to można udowodnić, w oparciu o pewną wersję zasady Z_1, że $\{X_{\nu_1}, X_{\nu_2}\}$ jest martyngałem złożonym z dwóch zmiennych losowych, których wartości oczekiwane są równe zero. Z równości $E\{X_\nu\} = 0$ wynika, że

$$E\Big\{\sum_{j=1}^{\nu} Z_j\Big\} = aE\{\nu\}. \tag{10.1}$$

Ta tożsamość to podstawowe *twierdzenie Walda* z analizy sekwencyjnej; ma ono wiele zastosowań w statystyce.

11. Ciąg dalszy paragrafu 3. Stosując twierdzenie o zbieżności martyngałów do martyngału z paragrafu 5, uzyskujemy istnienie (prawie na pewno) granicy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}. \tag{11.1}$$

Można pokazać, że granica ta równa się $E\{Y_1\}$. Wynik ten jest znany probabilistom jako *mocne prawo wielkich liczb* i może być również otrzymany w oparciu o twierdzenie ergodyczne (patrz rozważania o związkach między twierdzeniem ergodycznym a twierdzeniem o zbieżności martyngałów w paragrafie 5).

12. Ciąg dalszy paragrafu 6. Przypuśćmy, że zbiór S jest ograniczony. Udowodnimy najpierw, że prawie każda trajektoria błądzenia startującego z punktu $\xi \in S$ dotrze do brzegu. Istnieją elementarne dowody tego faktu, a poniższy dowód jest jedynie ilustracją teorii martyngałów. Jeżeli u jest funkcją harmoniczną zdefiniowaną na S, wtedy $\{u(X_n), n \geqslant 0\}$ jest ograniczonym martyngałem i dlatego prawie na pewno zbieżnym. W szczególności, gdy funkcja u równa się którejś ze współrzędnych, to ciąg $u(X_n)$ jest zbieżny jedynie wtedy, gdy począwszy od pewnego miejsca jest stały. Dlatego trajektoria błądzenia musi osiągnąć brzeg (gdzie już pozostaje), co kończy dowód.

Jeżeli ξ jest punktem wewnętrznym, to istnieje taka zmienna losowa ν o wartościach całkowitych (moment pierwszego dojścia do brzegu), że X_ν jest punktem brzegu, a punkty X_j dla $j < \nu$ jeszcze do brzegu nie należą. Zmienna ν jest momentem zatrzymania (względem minimalnego ciągu σ-ciał). Jeżeli u jest funkcją harmoniczną na S i $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \nu$, to z twierdzenia o momentach zatrzymania (nieznacznie wzmocnionego) wynika, że $\{u(\xi), u(X_\nu)\}$ jest martyngałem złożonym z dwóch zmiennych losowych i dlatego

$$u(\xi) = E\{u(\xi)\} = E\{u(X_\nu)\}. \tag{12.1}$$

Oznaczmy przez $\mu(\xi, \eta)$ prawdopodobieństwo, że $X_\nu = \eta$, czyli że błądzenie startujące z punktu ξ osiągnie brzeg w punkcie η. Rozkład $\mu(\xi, \cdot)$ nazywa się *miarą harmoniczną* względem punktu ξ. W terminach miar harmonicznych równość (12.1) można zapisać jako

$$u(\xi) = \sum u(\eta)\mu(\xi, \eta), \tag{12.2}$$

gdzie sumowanie przebiega wszystkie brzegowe punkty η. Tak więc funkcja harmoniczna na S jest wyznaczona przez swe wartości na brzegu, a mianowicie jest średnią ważoną (wyznaczoną przez miarę harmoniczną) swoich wartości brzegowych. Z własności wartości oczekiwanych warunkowych wynika, że jeżeli u jest funkcją określoną na brzegu zbioru S, a w punktach wewnętrznych funkcja u zdefiniowana jest wzorem (12.2), wtedy funkcja u jest harmoniczna na S. Udowodniliśmy w ten sposób, że istnieje dokładnie jedna funkcja harmoniczna o zadanych wartościach brzegowych. Pomijamy odpowiednie rozważania związane z ogólniej-

szą definicją harmoniczności, w której uśrednia się po punktach różnych od najbliższych sąsiadów.

Uzyskany wynik szczególnie przemawia do intuicji, gdy $d = 1$. Wtedy S jest zbiorem punktów $-a, \ldots, b$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi, a błądzenie polega na wykonywaniu kroków równych 1 lub -1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ każdy i trwa do momentu osiągnięcia punktu $-a$ lub b. Używając języka graczy: gracz bierze udział w uczciwej grze i w wyniku każdej partii uzyskuje lub traci dolara z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, niezależnie od wyników poprzednich partii. Rozpoczyna on grę z a dolarami, jego przeciwnik z b dolarami i gra ciągnie się do momentu, gdy jeden z nich straci wszystkie swoje pieniądze; X_n równa się wygranej (która może być dodatnia lub ujemna) po n partiach. Gra rozpoczyna się w momencie 0, przyjmujemy więc $X_0 = 0$. Ponieważ funkcja tożsamościowa u, $u(\xi) = \xi$ na S, jest harmoniczna, więc ciąg $\{X_n, n \geqslant 0\}$ jest martyngałem i dlatego z (12.1) otrzymujemy

$$E\{X_\nu\} = 0, \tag{12.1'}$$

czyli średni końcowy zysk równa się 0, jak być powinno. Równość (12.1') może być potraktowana jako szczególny przypadek (10.1). Z (12.1') wynika dobrze znany fakt, że prawdopodobieństwo ruiny przeciwnika, tzn. prawdopodobieństwo, że $X_\nu = b$ jest $a/(a+b)$.

13. Ciąg dalszy paragrafu 7. Gdy $d = 2$, to własności błądzenia są ściśle powiązane z własnościami funkcji analitycznych i harmonicznych. Rozpatrzymy przede wszystkim proste zastosowanie w przypadku, gdy S jest całą płaszczyzną. Można pokazać, że prawie każda trajektoria błądzenia startującego z dowolnego punktu ξ jest wtedy gęsta (na płaszczyźnie). Fakt ten jest odpowiednikiem twierdzenia Liouville'a, że ograniczona funkcja analityczna na płaszczyźnie jest stała. Twierdzenie to udowodnimy w sposób probabilistyczny. Ponieważ część rzeczywista i urojona funkcji analitycznych są funkcjami harmonicznymi, to uzyskamy silniejszy wynik, gdy wykażemy, że dowolna funkcja harmoniczna i ograniczona jest stała. W rzeczywistości udowodnimy więcej, a mianowicie, że funkcja harmoniczna, która jest ograniczona z góry lub z dołu jest funkcją stałą. Przyjmijmy, korzystając z liniowości zbioru funkcji harmonicznych, że u jest funkcją dodatnią i rozpatrzmy martyngał $\{u(X_n), n \geqslant 0\}$. Oczywiście

$$E\{u(X_0)\} = E\{u(X_n)\} = E\{|u(X_n)|\}.$$

Z twierdzenia o zbieżności martyngałów wynika, że martyngał ten jest (prawie na pewno) zbieżny. Jeżeli teraz wybierzemy trajektorię, która jest gęsta i na której u ma granicę równą pewnej stałej C, wtedy funkcja u musi być (z ciągłości) tożsamościowo równa C, co właśnie należało udowodnić.

Przechodzimy obecnie do przeniesienia wyników paragrafu 12 i będziemy odtąd zakładać, że zbiór S jest ograniczony, a d dowolną liczbą naturalną. Zbieżność prawie na pewno ograniczonego martyngału $\{u(X_n), n \geqslant 0\}$, gdzie u jest funkcją

równą którejś ze współrzędnych, pociąga istnienie (prawie na pewno) granicy

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty.$$

Jest to możliwe jedynie wtedy, gdy wartości X_∞ leżą na brzegu zbioru S. Oznaczmy przez $\mu(\xi, A)$ prawdopodobieństwo, że błądzenie startujące z ξ osiągnie zbiór borelowski A położony na brzegu S. $\mu(\xi, \cdot)$ jest wtedy miarą na podzbiorach brzegu, tzw. *miarą harmoniczną* (względem ξ). Jeżeli u jest funkcją harmoniczną ograniczoną z góry lub z dołu, to z twierdzenia o zbieżności martyngałów wynika istnienie (prawie na pewno) granicy $\lim_{n\to\infty} u(X_n)$. Znaczy to, że funkcja u ma granicę w punktach brzegowych wzdłuż prawie każdej trajektorii. Te rozważania kontynuować będziemy jeszcze w paragrafie 16. Załóżmy teraz dodatkowo, że u jest funkcją ciągłą na domknięciu S. Wtedy oczywiście $\lim_{n\to\infty} u(X_n) = u(X_\infty)$ prawie na pewno i dowodzi się wprost, że ciąg zmiennych losowych

$$u(X_0), u(X_1), \ldots, u(X_\infty)$$

jest martyngałem. Ponieważ wartości oczekiwane pierwszej i ostatniej zmiennej są równe, więc

$$u(\xi) = E\{u(X_\infty)\} = \int u(\eta)\mu(\xi, d\eta), \tag{13.1}$$

e obszarem całkowania jest brzeg zbioru S. Dlatego $u(\xi)$ jest średnią ważoną (wyznaczoną przez miarę harmoniczną) swoich wartości brzegowych. Odwrotnie, jeżeli u jest funkcją ciągłą na brzegu zbioru S, a w punktach zbioru S funkcja u dana jest wzorem (13.1), to można pokazać, wykorzystując rozważania paragrafu 16, że u jest funkcją harmoniczną. W tych punktach brzegu, w otoczeniu których jest on dostatecznie porządny (dokładniej, w punktach regularnych w sensie teorii potencjału), zadane na brzegu wartości funkcji u są równe jej granicy. W taki sposób teoria martyngałów rozwiązuje zagadnienie Dirichleta dla funkcji harmonicznych. Ten typ rozważań stosuje się nie tylko do klasycznych funkcji harmonicznych, ale również do rozwiązań ogólnych eliptycznych i parabolicznych równań z pochodnymi cząstkowymi.

14. Przykład. Zastosowanie do różniczkowania. Ścisły związek między teorią martyngałów a różniczkowaniem można zilustrować na następującym przykładzie. Niech Ω będzie przedziałem $[0, 1]$ i niech prawdopodobieństwo zbioru A będzie równe jego mierze Lebesgue'a oznaczonej przez $|A|$. Dla dowolnego $n \geqslant 1$ niech $A_{n1}, \ldots, A_{nk_n}$ będzie rozbiciem przedziału $[0, 1]$ na rozłączne podprzedziały i załóżmy, że $(n+1)$-sze rozbicie jest podzbiorem n-tego czyli, że każdy zbiór A_{nj} jest sumą pewnych zbiorów $(n+1)$-szego rozbicia. Jeżeli $\mathcal{F}_n$ jest σ-ciałem generowanym przez n-te rozbicie, to $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Dla dowolnej funkcji f całkowalnej na $[0, 1]$ zmienne losowe X_n zdefiniowane wzorem

$$X_n = \frac{1}{|A_{nj}|} \int_{A_{nj}} f(\omega)d\omega \quad \text{na } A_{nj},\ j \geqslant 1,$$

tworzą martyngał względem $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$, dla którego

$$E\{|X_n|\} \leqslant \int_0^1 |f(\omega)|\, d\omega. \tag{14.1}$$

Gdy f jest funkcją ciągłą i gdy $\lim_{n\to\infty} \max_j |A_{nj}| = 0$, to oczywiście

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = f(\omega)$$

dla wszystkich ω. Bez tych założeń istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} X_n$ prawie wszędzie na [0, 1] wynika z twierdzenia o zbieżności martyngałów.

Ogólniej, można zastąpić przedział [0, 1] dowolną przestrzenią $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$ z miarą P taką, że $P\{\Omega\} = 1$. W tym kontekście rozbiciem będzie podział Ω na (co najwyżej) przeliczalną ilość rozłącznych zbiorów mierzalnych, przy czym $n+1$ rozbicie winno być podrozbiciem n-tego. $\int_A f d\omega$ zostanie zamieniona na $\mu(A)$, gdzie μ jest miarą, a zmienna losowa X_n będzie równa $\mu(A_{nj})/P(A_{nj})$ na A_{nj}, jeśli mianownik nie znika, a w przeciwnym przypadku dowolnej liczbie. Przy takich definicjach ciąg zmiennych losowych X_n będzie martyngałem, gdy

(a) $$P\{A_{nj}\} > 0 \quad \text{dla wszystkich } n, j,$$

lub gdy

(b) $$\mu\{A_{nj}\} = 0 \quad \text{dla } P\{A_{nj}\} = 0.$$

Jeżeli jedynie

(c) $$\mu \geqslant 0,$$

to ciąg X_n będzie nadmartyngałem.

Jeżeli zachodzi (a) lub (b) lub (c), to wartość oczekiwana $E\{|X_n|\}$ jest nie większa niż wahanie miary μ, stąd wnioskujemy, że martyngał (lub nadmartyngał) X_n zbiega prawie wszędzie. Ponieważ dowolna, skończona, σ-addytywna funkcja zbioru jest różnicą dwóch miar, otrzymujemy więc twierdzenie, że dowolna σ-addytywna funkcja zbioru ma pochodną względem skończonej miary i przy dowolnym zstępującym ciągu podziałów.

15. Przykład. Funkcje na nieskończenie wymiarowej kostce. Z definicji wynika, że każda zmienna wchodząca w skład martyngału jest uśrednieniem dowolnej zmiennej o większym wskaźniku. Poniższy przykład podkreśla ten fakt bardzo wyraźnie. Niech Ω będzie zbiorem ciągów nieskończonych $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots, 0 \leqslant \xi_j \leqslant 1$ i niech P będzie miarą na Ω równą produktowi miar Lebesgue'a, czyli niech P będzie nieskończenie wymiarową objętością. Przyjmijmy poza tym, że f jest funkcją określoną na Ω i całkowalną. Korzystając z powszechnie używanych oznaczeń definiujemy zmienne X_n następująco:

$$X_n = \int\int \ldots f(\ldots, \xi_0, \xi_1, \ldots) \prod_{j=n+1}^{\infty} d\xi_j.$$

Całkujemy tutaj po $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots$ Można udowodnić, że gdy $\mathscr{F}_n$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym wszystkie zdarzenia określone warunkami postaci $\xi_j < c$ dla $j \leqslant n$, to prawie na pewno $X_n = E\{f|\mathscr{F}_n\}$. Jest to intuicyjnie jasne: obliczamy wartość oczekiwaną f znając wszystkie współrzędne do n-tej włącznie. Dlatego (por. paragrafy 3 i 9) ciąg $\{X_n\}_{-\infty<n<\infty}$ jest martyngałem zbieżnym w dwóch kierunkach: granice $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ i $\lim_{n\to-\infty} X_n = X_{-\infty}$ istnieją prawie na pewno. Można pokazać, że granice te są równe odpowiednio f i $E\{f\}$.

16. Przypadek ciągłego zbioru parametrów. Niech $\{X_t, t \in I\}$, gdzie I jest przedziałem na prostej, będzie nadmartyngałem. Z zasady Z_2 wynika, że każdą zmienną losową $\omega \mapsto X_t(\omega)$ można zmienić na zbiorze ω o prawdopodobieństwie zero tak, by prawie każda trajektoria, to znaczy dla prawie każdego ω funkcja $t \mapsto X_t(\omega)$, była ciągła, z wyjątkiem punktów z nieciągłościami typu oscylującego. Taka zmiana nie wpływa na łączne rozkłady zmiennych losowych lub na fakt, że rodzina zmiennych losowych jest nadmartyngałem. Teoria nadmartyngałów z ciągłym zbiorem parametrów jest bardzo bogata i odgrywa istotną rolę w probabilistycznej teorii potencjału. Tutaj podamy tylko jedno zastosowanie będące kontynuacją paragrafów 7 i 13. Niech $\{Z_t, 0 \leqslant t < \infty\}$ będzie ruchem Browna w d-wymiarowej przestrzeni, startującym z punktu ξ. Rezygnujemy z dokładnego wypisywania rozkładów, przypominamy jedynie, że Z_0 równa się tożsamościowo ξ, wartości zmiennych Z_t leżą w przestrzeni d-wymiarowej, a każda trajektoria: $t \to Z_t(\omega)$ jest funkcją ciągłą. Okazuje się, używając oznaczeń paragrafu 7, że jeżeli $T_0 = 0$, T_1 jest pierwszym momentem takim, że Z_t jest punktem $B(\xi)$, T_2 jest pierwszym momentem $t > T_1$ takim, że Z_t jest punktem $B(Z_{T_1})$ i tak dalej i jeżeli $X_n = Z_{T_n}$, to ciąg $\{X_n, n \geqslant 0\}$ jest dokładnie błądzeniem rozpatrywanym w paragrafach 7 i 13. Dlatego trajektoria błądzenia składa się z punktów trajektorii ruchu Browna. Gdy S jest całą przestrzenią i gdy u jest funkcją harmoniczną (lub analityczną, gdy $d = 2$) na S oraz gdy $|u|$ nie jest zbyt duże (dokładne sformułowanie pomijamy), to $\{u(Z_t), t \geqslant 0\}$ jest martyngałem. Przyjmijmy, że zbiór S jest ograniczony (odpowiednim, bardziej ogólnym założeniem jest, że uzupełnienie zbioru S ma dodatnią pojemność). Niech $T = \sup_n T_n$ będzie momentem osiągnięcia brzegu. Można wtedy udowodnić, że moment T jest prawie na pewno skończony i że (co jest oczywiste) można utożsamiać Z_T z zmienną X_∞, zdefiniowaną w paragrafie 13. Dlatego rozkład zmiennej Z_T jest miarą harmoniczną względem punktu, z którego ruch Browna się rozpoczyna. Nieco głębsze rozważania aniżeli przeprowadzone w paragrafie 13 pokazują, że jeżeli u jest funkcją harmoniczną i dodatnią na S i gdy $u(Z_t) = 0$ dla $t > T$, to proces $\{u(Z_t), t \geqslant 0\}$ jest nadmartyngałem. (Wynik ten jest prawdziwy i dla funkcji nadharmonicznych dodatnich z wyjątkiem parametru $t = 0$, gdy $u(\xi) = \infty$, i obecne rozważania mogą być odpowiednio uogólnione na ten przypadek.) Z wyniku tego, korzystając z istnienia lewostronnych granic dla trajektorii martyngału, można wyciągnąć wniosek, że funkcja u ma granicę przy zbliżaniu się do brzegu zbioru S wzdłuż prawie każdej trajektorii ruchu Browna:

$$\lim_{t \uparrow T} u(Z_t)$$

istnieje prawie wszędzie. Uzyskane twierdzenie jest probabilistycznym uogólnieniem klasycznego *twierdzenia Fatou* mówiącego, że dowolna funkcja harmoniczna dodatnia w kole S ma granicę w punktach brzegu koła, wzdłuż prawie każdego promienia, tzn. granica $\lim_{r \uparrow a} u(re^{i\theta})$ istnieje dla prawie każdego θ. (Wynik ten został później uogólniony na kule o dowolnej liczbie wymiarów.) Zauważmy, że twierdzenie Fatou jest bardziej specjalne, bo w nim S jest kołem. Z drugiej strony trajektorie Fatou mają przyjemniejszą definicję i można je dokładnie identyfikować. Jednakże twierdzenie probabilistyczne zastosowane do koła (ogólniej kuli) pozwala wyprowadzić twierdzenie Fatou, a nawet gdy wzmocni się twierdzenia o zbieżności, uzyskać uogólnienia na funkcje nadharmoniczne lub bardziej jeszcze ogólne klasy funkcji. Okazuje się więc, że probabilistyczna wersja jest w sposób istotny związana z geometrią obszaru.

Bibliografia

[1] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, New York 1953.
[2] Paul A. Meyer, *Probability and Potentials*, Blaisdell, Waltham, Mass., 1966.