ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVI (1973)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

A. I. DEMCZYSZYN (Chmielnicki)

Początki teorii zagadnień brzegowych typu Sturma–Liouville'a

Powstanie teorii zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych oraz dalszy jej rozwój związane są z pracami Sturma i Liouville'a, napisanymi w latach 1833-1840. Prace te nie tylko uogólniają poszczególne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych, pojawiających się w fizyce matematycznej, ale ponadto stały się podstawą dalszego rozwoju tej teorii.

Celem tego artykułu jest przedstawienie historii powstania twierdzenia oscylacyjnego, które nazywa się twierdzeniem Sturma–Liouville'a i przyczynienie się w ten sposób do naświetlenia historii teorii zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych. Poza pracą Bôchera [1], która ma charakter encyklopedyczny, w literaturze z zakresu historii matematyki teoria ta jest niewystarczająco omówiona.

Twierdzenie oscylacyjne po raz pierwszy zostało sformułowane przez Sturma w pracy [5]. W pracy tej bada się własności funkcji v spełniającej równanie

$$L\frac{d^2v}{dx^2}+M\frac{dv}{dx}+Nv=0, \tag{1}$$

gdzie v, L, M, N są funkcjami zmiennej x, określonymi na przedziale (a, b). Poza tym Sturm rozpatruje równanie (1) w postaci samosprzężonej

$$\frac{d\left(K\frac{dv}{dx}\right)}{dx}+Gv=0, \tag{2}$$

gdzie K i G określone są za pomocą współczynników równania (1).

Założywszy, że K jest funkcją dodatnią na (a, b), zaś G — dowolną, Sturm udowodnił, że funkcja v i jej pochodna dv/dt nie mogą być równocześnie równe zeru i dlatego funkcja v zmienia znak w punkcie, w którym jest równa zeru. Ze względu na dalsze zastosowanie równania (2) wielkości K, G, v rozpatruje się jako funkcje zmiennej x i parametru λ. Dalej bada się, jak w zależności od parametru λ zmienia się stosunek $\frac{Kdv/dx}{v}$, występujący w wielu zagadnieniach w warunkach brzegowych, a także jak zmieniają się zera funkcji v.

W tym celu Sturm przekształca równanie (2) i nałożywszy na funkcje $K(x, \lambda)$ i $G(x, \lambda)$ pewne dodatkowe warunki dochodzi do wniosku; gdy λ rośnie, stosunek $\frac{Kdv/dx}{v}$ i zera funkcji v maleją. Na tej podstawie Sturm dochodzi do twierdzenia, które zgodnie z materiałami źródłowymi sformułujemy tak:

Dane są dwa równania różniczkowe

$$\frac{d\left(K_1\frac{dv_1}{dx}\right)}{dx}+G_1 v_1 = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d\left(K_2\frac{dv_2}{dx}\right)}{dx}+G_2 v_2 = 0, \tag{4}$$

które zachodzą dla x z przedziału (a, b), przy czym zachodzą nierówności

$$G_2 \geqslant G_1, \quad K_2 \leqslant K_1 \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{K_2\frac{dv_2}{dx}}{v_2}\right)_{x=a} \leqslant \left(\frac{K_1\frac{dv_1}{dx}}{v_1}\right)_{x=a}.$$

Wówczas funkcja v_2 ma w (a, b) nie mniej zer niż funkcje v_1 oraz i-te zero funkcji v_2 jest mniejsze od i-tego zera funkcji v_1.

Twierdzeniu temu Sturm poświęca w swej pracy wiele miejsca. Rozpatruje on przypadki, gdy warunki twierdzenia spełnione są na każdym końcu przedziału oddzielnie, a następnie, gdy spełnione są równocześnie na obydwu końcach przedziału. Dochodzi on do wniosku, że w przedziale (a_1, b_1) zawartym w przedziale (a, b) funkcja v_2 może mieć najwyżej o jedno zero mniej niż funkcja v_1 i że między dwoma kolejnymi zerami α i β funkcji v_1 nie może leżeć więcej niż Δ zer funkcji v_2, gdzie Δ jest różnicą liczb zer funkcji v_2 i v_1 w przedziale (a, b).

Twierdzenie to zachodzi również wtedy, gdy funkcje K, G i v nie zależą od parametru. Zachodzi ono również wtedy, gdy porównuje się równanie postaci (2) z równaniem, w którym K i G są stałe i którego rozwiązanie wyraża się za pomocą funkcji elementarnych. Właśnie tę ostatnią własność wykorzystał Sturm do dowodu twierdzenia oscylacyjnego.

Analogicznie do badania funkcji v Sturm bada funkcję

$$T = K\frac{dv}{dx}+pv,$$

gdzie p jest pewną funkcją zmiennej x (lub stałą) spełniającą warunek

$$GK+p^2-K\frac{dv}{dx} > 0$$

(G i K są funkcjami x i λ, spełniającymi warunki omawianego twierdzenia). Dochodzi on do wniosku, że do funkcji T można stosować to twierdzenie.

Przytoczone wyżej twierdzenie i wnioski z niego Sturm wykorzystuje do dowodu twierdzenia oscylacyjnego. W tym celu przekształca on dalej równanie (2). Istota tych przekształceń polega na tym, że jeśli równanie (1) jest samosprzężone, to można je zapisać w postaci (2)

$$\frac{d\left(L\frac{dv}{dx}\right)}{dx}+Nv=0. \tag{5}$$

Jeśli w równaniu (5) dokonać zamiany zmiennych: $v=u/\sqrt{L}$, to otrzymamy równanie

$$\frac{d^2u}{dx^2}+Ru=0, \tag{6}$$

gdzie

$$R=\frac{N}{L}-\frac{1}{\sqrt{L}}\frac{d^2\sqrt{L}}{dx^2}.$$

W dalszym ciągu Sturm rozpatruje równanie (6). Jeżeli przyjąć, że funkcja R jest dodatnia i ciągła w (a, b), to $r_0 \leqslant R \leqslant R_0$, gdzie r_0 jest najmniejszą, zaś R_0 największą wartością funkcji R w przedziale (a, b). Rozpatrzmy teraz dwa równania

$$\frac{d^2u_1}{dx}+r_0u_1=0, \tag{7}$$

$$\frac{d^2u_2}{dx^2}+R_0u_2=0. \tag{8}$$

Są to równania liniowe o stałych współczynnikach i rozwiązanie ich można napisać w postaci

$$u_1=C_1\sin(x\sqrt{r_0}+c_1), \qquad u_2=C_2\sin(x\sqrt{R_0}+c_2),$$

gdzie C_1, C_2, c_1, c_2 są dowolnymi stałymi, które można dobrać tak, by zachodziło omawiane twierdzenie dla równania (6) i każdego z równań (7) i (8). Dlatego można twierdzić, że funkcja u przyjmuje w przedziale (a, b) wartość 0 co najmniej tyle razy, ile zer ma funkcja u_1 i najwyżej tyle razy, ile zer ma funkcja u_2. Ponieważ odległość między dwoma kolejnymi zerami funkcji u_1 wynosi $\pi/\sqrt{r_0}$, więc u ma w przedziale (a, b) co najmniej tyle zer, ile wynosi część całkowita liczby $(b-a)\sqrt{r_0}/\pi$. Tak więc liczba zer funkcji u w przedziale (a, b) zależy od długości przedziału i współczynnika R. Dlatego też, jeżeli w równaniu (6) współczynnik R będzie funkcją zmiennej x oraz funkcją dodatnią i rosnącą parametru λ, to równanie (6) rozwiązanie u może przyjmować w (a, b) wartość 0 dowolnie wiele razy, jeżeli tylko parametr λ przyjmie odpowiednią wartość. W ten sposób otrzymaliśmy twierdzenie oscylacyjne.

Niech parametr λ przebiega odcinek $[\lambda', \lambda'']$ i $R(x, \lambda)$ będzie funkcją ciągłą zmiennych x i λ rosnącą ze względu na λ:

$$\lim_{\lambda\to\lambda'} R(x, \lambda)=-\infty, \qquad \lim_{\lambda\to\lambda''} R(x, \lambda)=+\infty.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna wartość λ, dla której równanie (6) ma rozwiązanie u przyjmujące w przedziale (a, b) wartość 0 dowolną z góry zadaną ilość razy i spełniające dane warunki brzegowe.

Twierdzenie sformułowane dla równania (6) zachodzi i dla równania (2), a więc i dla równania (1).

Jeżeli chodzi o rozszerzenie twierdzenia oscylacyjnego na równania różniczkowe wyższych rzędów, to zajmowali się tym zagadnieniem w szczególnych przypadkach Rayleigh, Kirchhof, Meyer i inni. W całej ogólności zrobił to po raz pierwszy Liouville w swoich pracach [2], [3], [4].

Rozpatruje w nich zagadnienie brzegowe dla równania drugiego rzędu postaci

$$\frac{dKdL\dots dMdNdv}{dx^n}+\lambda v = 0, \tag{9}$$

gdzie $K, L, \dots, M, N$-$n-1$ funkcji zmiennej x, niezależnych od λ z następującymi warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} &\text{przy } x = a;\ v = A;\ \frac{Ndv}{dx} = B, \dots, \frac{KdL\dots dMdNdv}{dx^{n-1}} = D; \\ &\text{przy } x = b;\ \alpha v+\beta\frac{Ndv}{dx}+\dots+\gamma\frac{KdL\dots dMdNdv}{dx^{n-1}} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie $A, B, \dots, D, \alpha, \beta, \dots, \gamma$ — dowolne stałe (niektóre z nich, oprócz D, mogą być równe zeru).

Dla równania (9) Liouville udowodnił twierdzenie oscylacyjne, które można sformułować tak:

Można w dokładnie jeden sposób wyznaczyć parametr λ tak, by równanie różniczkowe (9) *miało rozwiązanie, które wewnątrz przedziału (a, b) ma dowolną z góry zadaną ilość zer i spełnia warunki brzegowe* (10).

Liczne twierdzenia analogiczne do twierdzeń Sturma są przez Liouville'a dowodzone metodami różnymi od metod Sturma.

Po Sturmie i Liouville'u liczni matematycy zajmowali się twierdzeniem oscylacyjnym, badali jego zastosowania do poszczególnych problemów fizyki matematycznej i uogólniali je. Należy tutaj wymienić takich matematyków, jak Schläfli (1876), Bôcher (1894), Klein (1894), Picard (1896), Van Vleck (1898) i inni.

Prace cytowane

[1] M. Bôcher, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd II, Teil I, Heft 4, Leipzig 1900, str. 437-463.
[2] J. Liouville, Journal de l'École Polytechnique, 25 cahier, 1837.
[3] — J. Math. Pures Appl. 3 (1838), 255-256.
[4] — Ibidem, str. 561-614.
[5] G. Sturm, J. Math. Pures Appl. I (1836), str. 106-186.