ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVI (1973)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. ODERFELD i A. SCHINZEL (Warszawa)

O pracach matematycznych Michała Kaleckiego

Profesor Michał Kalecki, zmarły w 1970 r., był ekonomistą o światowej sławie. Jego ogromny dorobek w tej dziedzinie był wielokrotnie analizowany przez fachowców. Jeśli przypominamy o tym w piśmie matematycznym, to tylko dlatego, że chcielibyśmy zwrócić uwagę na to, że twórczość ekonomiczną Kaleckiego znamionuje znakomite opanowanie matematyki jako narzędzia. W swych pracach używał swobodnie aparatu matematycznego, nie nadużywając go nigdy dla próżnego efektu.

Jednakże cel tej notatki jest inny. Chcemy wspomnieć o Kaleckim jako o matematyku.

Matematyka czysta interesowała go zawsze, jednakże pierwszą pracę z tej dziedziny [1] ogłosił dopiero w 1958 r. Miał wtedy 59 lat, co należy uznać za fakt niezwykły, gdyż współczesna matematyka, i być może fizyka, należą do nauk, w których osiąga się pierwsze ważne wyniki zwykle w młodym wieku. Sprawa jest tym bardziej niezwykła, że Kalecki był w matematyce amatorem, zresztą w najpiękniejszym znaczeniu tego słowa. Wspomniana praca [1] leży na pograniczu teorii liczb i probabilistyki. Jej tytuł był na tyle łudzący, że jeden z autorów tej notatki referując na innym miejscu([1]) twórczość Kaleckiego w dziedzinie teorii liczb pominął tę pozycję. Treść jest następująca:

Niech po k-tym okręgu ($k = 1, 2, \ldots, m$) o jednostkowej długości porusza się punkt ze stałą prędkością θ_k. Liczby $1, \theta_1, \ldots, \theta_m$ są liniowo niezależne nad ciałem liczb wymiernych.

Każdy okrąg jest podzielony na dwa łuki, które dla wygody nazwiemy odpowiednio białym i czarnym. Długość k-tego łuku białego jest p_k, przy czym $|1-2p_k| \leqslant \leqslant \alpha < 1$, gdzie α jest liczbą stałą.

Co jednostkę czasu zliczamy, ile punktów jest na łukach czarnych. Jeśli ta liczba jest parzysta, mówimy, że zaszło zdarzenie A; jeśli nieparzysta — zdarzenie B. Czynności te nazywamy grą i powtarzamy je N razy.

Niech $(A)_{Nm}$ i $(B)_{Nm}$ oznaczają odpowiednio częstości zajścia zdarzeń A i B.

([1]) Andrzej Schinzel, *O pracach Michała Kaleckiego z teorii liczb*, Ekonomista, 1970, str. 1021-1022.

Niech wreszcie $(A_jA_{j+a})_{Nm}$ i $(B_jB_{j+a})_{Nm}$ oznaczają odpowiednio częstości zdarzeń $A \cap A$ i $B \cap B$ w grach numer j oraz $j+a$, gdzie a jest stałą liczbą naturalną.

Autor dowodzi następujących twierdzeń:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(A)_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(B)_{Nm} = \tfrac{1}{2};$$

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(A_jA_{j+a})_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(B_jB_{j+a})_{Nm} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(A_jB_{j+a})_{Nm} = \lim_{m\to\infty}\lim_{N\to\infty}(B_jA_{j+a})_{Nm} = \tfrac{1}{2}.$$

Dowody opierają się na twierdzeniach o ekwipartycji (Sierpiński 1909, Weyl 1916).

W interpretacji probabilistycznej oznacza to, że gry numer j oraz $j+a$ są asymptotycznie niezależne w sensie stochastycznym. W pracy [1] są jeszcze uogólnienia tych twierdzeń.

Późniejsze badania M. Kaleckiego koncentrowały się na teorii liczb, a przedmiotem ich były zwłaszcza własności liczb pierwszych. Dotyczą ich prace [2], [3], [4], [5], [6] i [8] z podanego na końcu spisu. Jedną z najważniejszych własności liczb pierwszych wyraża twierdzenie udowodnione w 1896 r. przez J. Hadamarda i Ch. de la Valée Poussina dotyczące liczby $\pi(x)$ liczb pierwszych nie przekraczających x.

Twierdzenie orzeka, że

$$(*) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x} = 1.$$

Dowody Hadamarda i de la Valée Poussina opierały się na teorii funkcyj analitycznych. Pierwsze dowody bez użycia głębszych pojęć analizy podali w 1948 r. A. Selberg i P. Erdös. Dowody te, aczkolwiek w technicznym sensie elementarne, były jednak bardzo skomplikowane. Wielu wybitnych matematyków podało ich nowe bardziej przejrzyste wersje. Jedna z nich pochodząca od A. G. Postnikowa i P. N. Romanowa została wyłożona w książce A. O. Gelfonda i Ju. Linnika *Elementarnyje mietody w analiticzeskoj tieorii cziseł.*

Pragnieniem prof. Kaleckiego było znalezienie prostego i elementarnego dowodu wzoru (*). Udało mu się to zrealizować w 1966 r., kiedy to w pracy [6] znacznie uprościł dowód Postnikowa i Romanowa. Następnie powrócił raz jeszcze do tego tematu, podając w pracy [8] dowód wzoru (*) oparty na innej niż poprzednio myśli. Produkt uboczny tych badań stanowi praca [7]. We wcześniejszej pracy [3] prof. Kalecki, używając własności funkcji o wzroście regularnym, wyprowadził w sposób przejrzysty z wzoru (*) znany wzór asymptotyczny dla liczby liczb $\leqslant x$ złożonych z k czynników pierwszych.

Wreszcie w 1968 r. prof. Kalecki pod wpływem wspomnianej książki Gelfonda i Linnika zainteresował się twierdzeniem H. B. Manna o dodawaniu ciągów.

Niech A, B będą dwoma ciągami rosnącymi liczb całkowitych $a_0 = 0, a_1, \ldots$; $b_0 = 0, b_1, \ldots$, zaś C ciągiem rosnącym utworzonym z sum a_i+b_j, gdzie i, j prze-

biegają wszystkie wartości nieujemne. Oznaczmy przez $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ liczbę dodatnich wyrazów ciągów A, B, C nie przekraczających n. Jeżeli przy wszystkich n dodatnich $A(n) \geqslant \alpha n$, $B(n) \geqslant \beta n$, to według twierdzenia Manna,

$$C(n) \geqslant \min(1, \alpha+\beta)n.$$

M. Kalecki pragnął znaleźć prosty dowód tego twierdzenia i w badaniach swoich otrzymał następujący wynik (patrz [9])([2]):

Jeżeli n nie należy do C, to

$$C(n) \geqslant A(n)+\frac{\beta}{1+\beta}n.$$

Prace Kaleckiego tu zreferowane wiążą się z twierdzeniami o charakterze centralnym i zapewniają ich autorowi trwałą pozycję w matematyce.

Kończąc tę notatkę pragniemy strawestować zdanie historyka matematyki E. T. Bella ([3]) odnoszące się do siedemnastowiecznego „księcia amatorów" Fermata: jego dzieła — a raczej jego rekreacja — wynikały z czystej miłości matematyki.

Spis prac cytowanych M. Kaleckiego

[1] *Model mechanistyczny zjawiska losowego*, Zastos. Mat. 4 (1958), str. 113-129.

[2] *O pewnych sumach rozciągniętych na liczby pierwsze lub czynniki pierwsze*, Prace Mat. 8 (1964), str. 121-129.

[3] *Twierdzenie o sumach typu* $\Sigma\sigma\left(\frac{N}{r}\right)$ *i jego zastosowanie*, ibidem 9 (1965), str. 129-135.

[4] *O liczbach będących sumami liczb pierwszych pewnego typu*, ibidem 9 (1965), str. 193-200.

[5] *Uogólnienie postulatu Bertranda*, Wiadom. Mat. 9 (1967), str. 219-220.

[6] *A simple elementary proof of* $M(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu(n) = o(x)$, Acta Arith. 13 (1967), str. 1-7.

[7] *On the sum* $\sum_{n\leqslant x} \{f(x/n)\}$, Prace Mat. 11 (1968), str. 189-191.

[8] *A short elementary proof of the prime number theorem*, ibidem 13 (1969), str. 51-55.

[9] *On an inequality in the general additive theory of numbers*, ibidem 15 (1971), str. 133-134.

([2]) Prof. Mann w liście do jednego z autorów tej notatki zwrócił uwagę na fakt, że otrzymana nierówność wynika bezpośrednio z pewnego twierdzenia Besicovitcha.

([3]) E. T. Bell, *Men of mathematics*, New York 1962, str. 58.