ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVI (1973)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

H. BEHNKE (Münster)

Autonomia geometrii (*)

Wykształcony laik, zapytany o podział matematyki na działy, na ogół rozróżni „konstrukcyjną geometrię" i „matematykę posługującą się rachunkami", którą prawdopodobnie nazwie algebrą. Gdy potem pomyśli o geometrii analitycznej zmiesza się i być może powie: „Nie, matematyka dzieli się na geometrię i analizę". Jeśli w dodatku uczył się rachunku różniczkowego w nowoczesnej postaci, to potrafi rozróżnić algebrę i analizę i na pewno wymieni trzy działy: algebrę, analizę i geometrię. Algebra jest tą właśnie dziedziną matematyki, która może być nazwana obliczeniową, w której nie ma jednak procesów granicznych. Z chwilą, gdy wystąpi jakiś aksjomat zupełności albo ciągłości, znajdziemy się w analizie. Jeśli jednak ktoś nie czyni tego rozróżnienia, to jeśli nie należy akurat do grupy skrajnie postępowych fachowców, a mianowicie do związku „bourbakistów", jest w pełni usprawiedliwiony. Wielokrotnie bowiem, od czasu powstania analizy, to znaczy od około 1700 r. zdarzało się, że nie rozdzielano analizy od geometrii. W nauce, którą nazywaliśmy dotychczas „geometrią analityczną" część niegeometryczna zajmuje się wyłącznie formami liniowymi i kwadratowymi, a więc mamy tu do czynienia z algebrą, a nie analizą. To doprowadziło do tego, że bez żadnych środków administracyjnych i specjalnych starań stopniowo wykład „geometrii analitycznej" przeszedł w wykład algebry liniowej.

Prześledźmy, jak w ciągu stuleci rozwoju matematyki objawiała się swoistość geometrii w stosunku do innych dziedzin. Najstarszy ze znanych nam rękopisów matematycznych to *Papirus Rhinda*, pochodzący z około 2000 r. p.n.e. Jest to zbiór przepisów na obliczanie wraz z wieloma zastosowaniami praktycznymi, szczegól-

(*) *Od redakcji.* Zamieściliśmy artykuł H. Behnkego [*Die Autonomie der Geometrie*, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 18 (1971), str. 145-160] ze względu na interesujący dla nauczycieli zarys historyczny geometrii „elementarnej" i wpływ jej na nauczanie. Oczywiście redakcja nie podziela stanowiska krytycznego w stosunku do reformy nauczania geometrii, gdyż rewolucja jaka się dokonała w nauczaniu w szkolnictwie średnim jest nieodwracalna i stanowi znaczny postęp w stosunku do stanu poprzedniego. Nie zajmując stanowiska własnego redakcja zamierza zamieścić wypowiedzi kilku z najwybitniejszych matematyków, w tym i spośród zupełnie młodego pokolenia, krytycznie ustosunkowujących się do niektórych tendencji wprowadzonego programu szkoły średniej, zwłaszcza do tendencji nauczania materiału formalnego przy nieuwzględnianiu materiału bogatego w treść matematyczną i wzbogacającego wyobraźnię.

nie do obliczania pól. Żadne dowody nie są podawane, oczywiście nie było jeszcze świadomości ich potrzeby. Wszystkie rachunki są przeprowadzane na przykładach. Także Babilończycy, których dzieła matematyczne pochodzą z lat 700-600 p. n. e., a więc są o ponad tysiąc lat późniejsze, podają wszystko bez dowodu, z wielu przykładami. Pozostawili daleko w tyle Egipcjan. Pomimo tak zasadniczego ograniczenia, otrzymali wiele rezultatów o stożkach i ostrosłupach ściętych i obliczyli szereg innych skomplikowanych objętości. Kto się interesuje przedgrecką matematyką, może posłużyć się jako wstępem wspaniałym dziełem van der Waerdena *Awakening science.*

Potem na arenę weszli Grecy. Przede wszystkim należy wymienić Talesa z Miletu. Znał on wartościowe wyniki babilońskie i egipskie. Który jednak z rezultatów odnoszących się do pola tarczy kołowej (który już Egipcjanie zupełnie dobrze podali jako $\frac{16}{9}\pi r^2$, Babilończycy natomiast — rzecz osobliwa — korzystali z „gorszej" formuły $3r^2$) miał wybrać? Dziś powiedzielibyśmy: „To były wszystko wartości przybliżone". Ale Tales tego nie mógł wiedzieć z góry. W ten sposób z konieczności doszedł do poszukiwania dowodu, a to było początkiem złotego wieku matematyki greckiej. Tak tę sprawę przedstawia historyk Eudemos żyjący za czasów Arystotelesa, a więc na 50 lat przed Euklidesem.

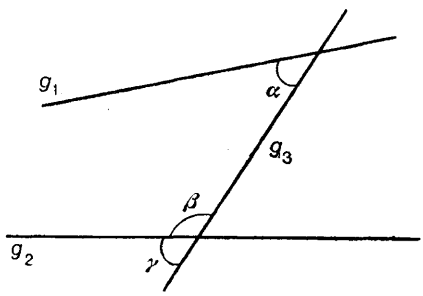
Mamy bardzo dobry obraz żywej działalności matematycznej i wspaniałych osiągnięć matematyki 5-4 stulecia w Grecji, gdyż krótko po 300 r. p. n. e. większość greckich osiągnięć Euklides zdołał ująć w swym potężnym dziele. Cała matematyka grecka jest wyłącznie geometrią w bardzo wąskim sensie. Co można ewentualnie nazwać grecką algebrą, to rachowanie odcinkami i prostokątami. Nawet liczby i proporcje przedstawiane są na odcinkach.

Grecy traktowali lekceważąco biegłość rachunkową Egipcjan i Babilończyków, którzy pod pewnymi względami stali wyżej niż Grecy. Dla Greków były to tylko metody pomiarowe, których wartość polegała na biegłości technicznej. Cała ich działalność była skierowana na związki logiczne i to dziedzictwo przejęliśmy od nich całkowicie. Van der Wearden opisuje, jak grecka matematyka obumiera dlatego, że algebra znalazła się w ślepym zaułku. Dla nich istnieją tylko liczby całkowite i co najwyżej wymierne, chociaż już Teodoros z Cyreny około 390 r. p. n. e. odkrywa pojęcie niewspółmierności. Podaje przekątną w kwadracie o bokach całkowitych, ale nie uznaje tego za przedstawienie jakiejkolwiek liczby. O tego typu zahamowania rozbiła się matematyka grecka.

Za czasów Odrodzenia zaczyna się ponowne studiowanie *Elementów* Euklidesa i natychmiast zaczyna się ich komentowanie. Komentarze ukazują, że pomimo wielkości tego dzieła, zawiera ono wiele luk. Rozpala się dyskusja dokoła aksjomatu równoległości. Euklides formułuje go następująco: Jeśli dwie proste g_1 i g_2 przeciąć trzecią prostą i dwa kąty wewnętrzne leżące po tej samej stronie prostej dają razem mniej niż dwa kąty proste, to proste g_1 i g_2 przecinają się (rys. 1).

Wypowiedź ta nie jest symetryczna względem obu równoległych. Z wcześniejszych, zestawionych przez Euklidesa aksjomatów można wywnioskować, że istnieje co najmniej jedna równoległa do danej prostej. Jeśli kąty α i γ (rys. 1) są równe,

to proste g_1 i g_2 są równoległe. Dla istnienia równoległych nie musiało się wprowadzać nowego aksjomatu. Jednak Euklides musiał jako nowe założenie wysunąć to, że przez punkt poza prostą przechodzi tylko jedna równoległa.



Rys. 1

Gdy nastąpił w Europie renesans matematyki greckiej, zwrócono uwagę na tę asymetrię i starano się ją usunąć. Wówczas Girolamo Saccheri około 1700 r. stwierdził, że suma kątów w trójkącie musi być zawsze nie większa niż dwa kąty proste, a jeśli dodać aksjomat równoległości — musi być równa dwom kątom prostym. Tym samym stało się jasne, że geometria sferyczna nie może czynić zadość wszystkim aksjomatom poprzedzającym aksjomat równoległości, gdyż w geometrii tej suma kątów trójkąta jest zawsze większa niż dwa kąty proste. W istocie rzeczy nie spełnia już ona aksjomatu, który można tak sformułować: z trzech punktów prostej dokładnie jeden leży między pozostałymi. W geometrii sferycznej prosta jest okręgiem w sensie geometrii euklidesowej; z trzech punktów każdy leży między dwoma pozostałymi.

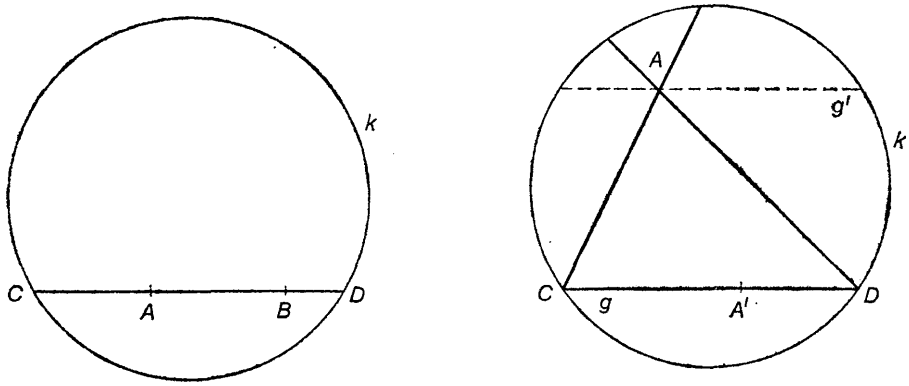
Znaczenie aksjomatów „leżenia między" było przez długi czas przeoczane przy budowie geometrii euklidesowej. Euklides ich jeszcze nie sformułował. Dopiero w 1880 r. Moritz Pasch znalazł ostatni z niezbędnych dla budowy geometrii euklidesowej aksjomatów „leżenia między". Brzmi on: Jeśli prosta leżąca w pewnej płaszczyźnie przecina jeden bok trójkąta tej płaszczyzny, to przecina ona jeszcze jeden bok. W tym czasie właśnie odkryto, jak ważne są te aksjomaty „leżenia między". Felix Klein podał bardzo sugestywny pozorny dowód fałszywego twierdzenia, że każdy trójkąt jest równoboczny tak, że w sposób ukryty naruszył jeden z tych aksjomatów.

Nie udało się usunąć tej asymetrii przez długi czas. Dopiero Gauss pierwszy zauważył, że jest to niemożliwe.

Oznacza to, że do aksjomatów Euklidesa poprzedzających aksjomat równoległości można dołączyć zaprzeczenie aksjomatu równoległości i nie dojdzie się do sprzeczności. Można zażądać, by przez dany punkt poza daną prostą można było przeprowadzić nieskończenie wiele równoległych. Wystarczy, by przeszły tylko dwie. Z aksjomatów „między" wynika, że przechodzi wówczas nieskończenie wiele. Z aksjomatów przystawania otrzymuje się stąd dalej, że to samo zachodzi dla dowolnej prostej i dowolnego punktu nie leżącego na niej.

Istnieją więc tylko trzy możliwe sytuacje dla równoległych. 1. Istnieje dokładnie jedna równoległa (zagwarantowana w geometrii euklidesowej przez aksjomat Euklidesa). 2. Zawsze jest ich nieskończenie wiele. 3. Nie istnieją równoległe.

Gauss w 1816 r. miał zbudować „pseudogeometrię" z nieskończenie wielu równoległymi, nic jednak nie opublikował. W dwa lata później korespondował na ten temat bezpośrednio ze Schweikartem. Nikt wówczas nie przypuszczał, że taka pseudogeometria może mieć coś wspólnego z rzeczywistością. W tym czasie w 1829 r. Łobaczewski opublikował pierwszą teorię geometrii nieeuklidesowej. Bezpośrednio potem, w 1831 r. J. Bolyai również opublikował taką teorię. Panowało jednak przez dłuższy czas prawie ogólne przekonanie, że „w naszej rzeczywistości" istnieje tylko jedna geometria, a mianowicie euklidesowa, jakby dana a priori. Matematycy skłaniali się ku sądowi, że w obu pozostałych geometriach w jakiś sposób dojdzie się w końcu do sprzeczności, chociaż pozostawało sprawą otwartą, jakiej natury będzie ta sprzeczność. Przekonanie o wyróżnionej roli geometrii euklidesowej zostało mocno wstrząśnięte przez odkrycie F. Kleina w 1871 r., że z punktu widzenia logicznego obie geometrie nieeuklidesowe — a chodzi głównie o geometrię z nieskończenie wielu równoległymi — mają te same prawa co euklidesowa, albo mówiąc inaczej, że są względnie niesprzeczne. „Względnie niesprzeczne" oznacza, że mogłaby wystąpić w nich sprzeczność tylko w tym przypadku, gdyby geometria euklidesowa była sprzeczna. Ponieważ, pogląd, że z punktu widzenia czysto matematycznego wszystkie te geometrie są równouprawnione, ma fundamentalne znaczenie, pozwalam sobie krótko przypomnieć model Kleina–Cayleya. Dane jest koło k, a wewnątrz niego dwa punkty A i B, które wyznaczają cięciwę, o punktach końcowych C i D (rys. 2).



Rys. 2

Stosunek anharmoniczny

$$\lambda \overset{\text{df}}{=} \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (A, B, C, D)$$

jest liczbą jednoznacznie wyznaczoną przez A i B oraz $0 < (A, B, C, D) < 1$. Gdy B_1 jest innym punktem cięciwy o końcach CD zawartym między B i D, to $(A, B_1, C, D) = (A, B, C, D)(B, B_1, C, D)$. Stosunek podwójnego podziału jest więc

funkcją multyplikatywną. To nasuwa następującą definicję odległości punktów wewnątrz koła:

$$d(A, B) = -\ln(A, B, C, D).$$

Jest to dopuszczalna definicja, gdyż punkty A i B, $A \neq B$, wyznaczają jednoznacznie C i D. Otrzymujemy nową miarę d wewnątrz koła o następującej własności: $d(A, B_n) \to \infty$ dla dowolnego ciągu punktów B_n dążącego do punktu brzegowego. To znaczy, że w mierze d punkty brzegu są nieskończenie odległe, nieosiągalne. Wiadomo, że stosunek anharmoniczny jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych. Przeprowadzają one całą płaszczyznę rzutową na siebie, a przy tym prostą rozważaną jako zbiór punktów, na prostą. Grupa ta zawiera pewną podgrupę P, która koło k przeprowadza na siebie, dokładniej, tarczę otwartą na tarczę otwartą, a okrąg na okrąg. Jeśli wewnątrz k dany jest odcinek AB i dowolny punkt A' wraz z wychodzącą z A' „półcięciwą" s', to P zawiera przekształcenie, które A przeprowadza w A' a B w punkt B' na s' leżący wewnątrz k, wobec czego $d(A, B) = d(A', B')$. Szczegółowe rozważenie tego pozwala sprawdzić, że w modelu tym zachodzą aksjomaty kongruencji. Tym samym zachodzą wszystkie aksjomaty Euklidesa prócz aksjomatu równoległości: Do każdej cięciwy s i punktu A wewnątrz k istnieje nieskończenie wiele cięciw przechodzących przez A, które nie przecinają s wewnątrz k (rys. 2). Ponieważ w naszym modelu jako punkty bierzemy pod uwagę tylko punkty wewnętrzne, a jako proste bierzemy cięciwy, to w tym modelu do każdej prostej g i leżącego poza nią punktu A istnieje nieskończenie wiele prostych przechodzących przez A i nieprzecinających g. Z drugiej strony możemy wszystkie wypowiedzi tej geometrii przetłumaczyć znowu na język geometrii euklidesowej. Należy zastąpić słowo „punkt" przez „punkt wewnątrz k" „prostą" przez „cięciwę", odległość przez logarytm naturalny stosunku anharmonicznego. Jeśli więc wszystkie twierdzenia geometrii euklidesowej są prawdziwe, to i twierdzenia tej geometrii nieeuklidesowej są również prawdziwe. Ta geometria nieeuklidesowa jest więc równouprawniona pod względem logicznym z euklidesową.

Ale co to znaczy? Ileż to zbudowano już konstrukcji pojęciowych i jakąż niezliczoną ilość można jeszcze zbudować teorii niesprzecznych. Większość matematyków XIX wieku odpowiedziałaby: „W naszym świecie istnieje tylko geometria euklidesowa, wszystkie inne nowo utworzone geometrie są czystą grą pojęciową". Oczywiście, od dawna nie można tego było powiedzieć o geometrii sferycznej. Była ona — z racji nauczania trygonometrii sferycznej w szkołach średnich — wydatnie uprawiana, gdyż umożliwia wiele zastosowań. Została zbudowana jako geometria na sferze dwuwymiarowej w przestrzeni trójwymiarowej. Dlatego nie zwracało uwagi, że to jest geometria nieeuklidesowa, przecież powstała „w" geometrii euklidesowej. Można ją jednak zbudować zupełnie autonomicznie, nie biorąc pod uwagę otaczającej przestrzeni trójwymiarowej. Aby uplastycznić mą myśl, będę mówił o myślących pluskwach żyjących na dwuwymiarowej sferze S i nie posiadających żadnego organu umożliwiającego stwierdzenie otaczającej przestrzeni. Najkrótszymi liniami są dla nich koła wielkie na S i przez każdy punkt przechodzi dokładnie

tyle kół wielkich, ile w naszych płaszczyznach prostych przez punkt. Pluskwy te będą mogły zbudować geometrię, która w kilku punktach będzie różniła się od euklidesowej. Nie ma więc równoległych, istnieją trójkąty przystające, ale nie ma podobnych, suma kątów w trójkącie jest większa od dwóch kątów prostych, a nadwyżka ponad tę sumę zależy od wielkości trójkąta. Euklides tego pluskwiego świata mógłby napisać podręcznik w sensie naszego Euklidesa. Podręcznik pod kilku tylko punktami różniłby się od podręcznika Greka, natomiast związki logiczne byłyby te same.

Widzimy więc, że istnieją trzy geometrie elementarne: euklidesowa — o jednej równoległej, hiperboliczna, której model podałem — o nieskończenie wielu i sferyczna — bez równoległych.

W roku 1897 Hilbert swym dziełem *Podstawy geometrii* doprowadza do końca tysiącletnie usiłowania zbudowania podstaw geometrii euklidesowej. Wykorzystując dorobek wielu generacji matematyków mógł zrezygnować z niektórych aksjomatów, np. aksjomatu Euklidesa, że każde dwa kąty proste są przystające. Z drugiej strony musiał wprowadzić np. aksjomaty „między". Wtedy nasunęło się pytanie, czy podana liczba aksjomatów nie jest za duża. W dziele swym badał pod tym kątem Hilbert również geometrie nieeuklidesowe, niearchimedesowe, i niepascalowskie. Uzyskał podstawy geometrii euklidesowej bez luk, czyniące zadość żądaniom ścisłości, jeśli nie ma się zastrzeżeń do naszej logiki. Książka Hilberta oznaczała tym samym zakończenie pewnego okresu i dała sugestywny przegląd aksjomatów i podstawowych twierdzeń geometrii euklidesowej. Nie wskazaliśmy jednak dotychczas na najważniejszą cechę tej książki. Jest to całkowite oderwanie się od otaczającego nas świata. Podstawowe pojęcia „punkt", „prosta" i „płaszczyzna" oznaczają tylko tyle, ile wynika o nich z aksjomatów. Nie usiłuje się już wyprowadzić pojęć geometrycznych w sposób filozoficzny albo powiązać z problematycznymi i niejasnymi pojęciami poglądowymi a priori. Jeszcze w 1882 r. Pasch pisał, że aksjomaty należy budować bezpośrednio na obserwacji przyrody, a Feliks Klein, 13 lat tylko starszy od Hilberta i współpracujący z nim, nazywa aksjomaty wypowiedziami oczywistymi. Hilbert w sposób radykalny zerwał z takim pojmowaniem aksjomatyki. Dla niego geometria jest już tylko tworem ludzkiego ducha, używanym dla opanowania przyrody, nie dającym się jednak wyprowadzić ze świata fizycznego. W wielu swoich odczytach na konferencjach matematycznych podkreślał, że pod pojęciami geometrycznymi można sobie wyobrazić cokolwiek. Dziś nie formułujemy tego w ten sposób. Charakteryzuje to jednak ówczesną sytuację. Doświadczenie może być w procesach logicznych jeszcze wykorzystane tylko jako impuls dla tworzenia pojęć. W żadnym wypadku jednak nie może być użyte obecnie jako uzasadnienie, chociażby dlatego, że w minionych stuleciach powstał cały śmietnik fałszywych rozumowań opartych na „doświadczeniu". Z punktu widzenia samej matematyki, wszystkie geometrie są równouprawnione. Dla wyróżnienia geometrii euklidesowej można dać już tylko to uzasadnienie, że posługuje się nią fizyka i tylko ona jest w niej wykorzystana.

W 16 lat później upadła i ta podpora. Zanim jednak zajmiemy się tą dokumentną utratą monopolistycznego znaczenia geometrii euklidesowej, powiemy kilka słów

o odkryciach Descartesa. Żył w XVII wieku, zanim miały miejsce opisane wydarzenia matematyczne. Od niego pochodzi znana nam „geometria analityczna". Jej zasadniczą treścią jest izomorfizm wielkości euklidesowych i liczb rzeczywistych. W „czystej geometrii euklidesowej" nie były jeszcze potrzebne żadne liczby. Na każdym z nas w młodym wieku zrobiło głębokie wrażenie to, że za pomocą współrzędnych kartezjańskich można opisywać figury geometryczne.

Można w oparciu o geometrię euklidesową również konstruować liczby rzeczywiste. W tym celu wprowadza się klasy zorientowanych odcinków powstających ze siebie przez przesunięcie równoległe i następnie w znany sposób cztery elementarne operacje arytmetyczne na odcinkach za pomocą konstrukcji geometrycznych. Otrzymuje się ciało zorientowanych odcinków, które jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych. Tak przeprowadzali to bardzo szczegółowo M. Pasch, F. Schur i H. Prüfer. Prace ich były w swoim czasie wysoko cenione, metod ich jednak nie wprowadzono w podręcznikach. Można by było powiedzieć: w takim razie cała analiza w gruncie rzeczy sprowadza się do geometrii. Oczywiście taki pogląd nie mógł się przyjąć, gdyż było to zanadto skomplikowane, by mogło służyć jako uzasadnienie, jako nauka o prostych tematach naszej dyscypliny. Takie wykłady wymarły już od dawna, ale echem tego są ataki J. Dieudonnégo, mistrza z kręgu bourbakistów, gdy mówi o „starej geometrii euklidesowej" i Descartesie. Nie może to nam jednak przeszkodzić w rozpatrywaniu przedstawionego zarysu dziejów jako części historii geometrii euklidesowej. Jeśli jednak postępuje się odwrotnie, wychodząc z liczb rzeczywistych i buduje przestrzeń euklidesową nad ciałem liczb rzeczywistych, to droga jest nam dobrze znana. Każdy wie, że punkt może być dany przez trójkę liczb x_1, x_2, x_3, odległość punktów x_1, x_2, x_3 i y_1, y_2, y_3 przez $\left(\sum(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$, i tak postępując z liczb rzeczywistych zbudujemy całą geometrię euklidesową. Droga ta jest krótsza niż poprzednio opisana i ulega dalszemu skróceniu, gdy wciągnąć wektory do pomocy. I teraz można naturalnie powiedzieć: „Cała geometria sprowadza się do algebry i analizy". Ale przez to nie zyskuje się nic, tak samo jak nic nie otrzymuje się przez powiedzenie Papy'ego „Cała matematyka sprowadza się do teorii mnogości". Przy konstrukcji matematyki wprowadza się ciągle nowe elementy i cechą charakterystyczną rozwoju matematyki jest wprowadzanie tych nowych elementów. Dlatego wydaje mi się rzeczą jałową zajmowanie tak skrajnych stanowisk.

Z punktu widzenia dydaktyki kwestia budowy geometrii elementarnej przedstawia się zupełnie inaczej niż w rozważaniach pryncypialnych. Tu nie ma przeszkody w mieszaniu aksjomatów geometrycznych i algebraicznych. W istocie, istnieje obecnie wiele elementarnych podręczników, które tak postępują. W ostatnim okresie zwraca uwagę książka Gustawa Choqueta *Nauczanie geometrii*[1]. Przeznaczona jest w zasadzie dla wykładowców oraz — jak pisze autor — dla miłośników geometrii. Mile brzmi to w uszach, gdy uczony tej miary co Choquet po wielu atakach, które były ostatnio skierowane na geometrię, mówi o zamiłowaniu do geometrii, więcej — do elementarnej geometrii.

---

[1] Polski przekład: PZWS, Warszawa 1972.

A teraz wracam do ostatnich dziesięcioleci XIX wieku. Rozwinęła się wówczas geometria na powierzchniach w przestrzeni trójwymiarowej. Szczególnie przyczynili się do jej rozwoju Włosi: E. Beltrami (1835-1900) i L. Bianchi (1856-1928). Zaczątki jej stworzył Gauss w 1827 r. w swoich *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

Wprowadzono rozróżnienie między własnościami, które zależą tylko od powierzchni, a własnościami, które zależą od jej włożenia w przestrzeń. Własności geometrii na samej powierzchni są wyznaczone przez jej pierwszą formę różniczkową $\sum g_{ij}du^i du^j$. Własności drugiego rodzaju, np. krzywizna krzywej na powierzchni, zależą od drugiej formy różniczkowej. Istnieją wzajemnie jednoznaczne i różniczkowalne odwzorowania f danej powierzchni F_1 na pewne powierzchnie F_2, które zmieniają drugą formę różniczkową, ale nie zmieniają pierwszej. Mówimy wówczas, że f jest odwzorowaniem zachowującym długość. Wtedy f zachowuje całą geometrię na powierzchni. By mieć bliższy wgląd w geometrię na powierzchni, można sobie znowu wyobrazić myślące pluskwy i rozważyć, jaką stworzyłyby geometrię. Istnieją na niej krzywe odpowiadające prostym. Są to linie geodezyjne, które lokalnie mają najkrótszą długość. W takiej geometrii dla pola i długości kąta zachodzą inne twierdzenia niż w geometrii euklidesowej. Geometria ta została silnie rozwinięta w latach 1880-1920.

Istnieje uogólnienie tej teorii oparte na klasycznej pracy habilitacyjnej Bernharda Riemanna z r. 1854, *O hipotezach leżących u podstaw geometrii.* Riemann dla dowolnego n naturalnego zbudował n-wymiarową geometrię, wychodząc z formy różniczkowej $\sum g_{ij}du^i du^j$, gdzie $i, j = 1, 2, \ldots, n$. W oparciu o teorię Riemanna można było rozszerzyć wspomnianą poprzednio geometrię różniczkową. Tę nazwano *geometrią riemannowską.* Do 1914 r. uważano tego typu rozważania geometryczne za czystą teorię, bez związku ze światem fizycznym.

I wówczas nastąpiło w naszej nauce wydarzenie o kolosalnym znaczeniu, które nadało tej teorii realne znaczenie, o czym poprzednio nawet nie można było myśleć. Dla rozbudowy swych fizycznych przestrzeni Einstein korzystał z geometrii, w których dane krzywe, a mianowicie tory promieni świetlnych, były geodetykami. Równocześnie wykazał, że również światło podlega grawitacji, a więc przebiegając w pobliżu mas ciężkich jak np. słońce, przebiega tor zakrzywiony w sensie geometrii euklidesowej. Okazało się niezbędne dla fizyki stworzenie geometrii, w której tory te byłyby najkrótszymi liniami. Stosunkowo prosto zostało to dokonane za pomocą geometrii riemannowskich, a mianowicie w ten sposób, że n^2 wielkości g_{ij} dane jest przez tensor impulsu-energii. To oznaczało, że wielkości g_{ij} są wyznaczone w ten sposób, by tory świetlne były geodetykami. I tak niespodziewanie geometria riemannowska stała się realną geometrią. Rola geometrii euklidesowej spadła do roli teorii przybliżonej, z której można korzystać dla oddania rzeczywistości, gdy nie wchodzi w grę ruch materii o dużej prędkości. W ten sposób znikła w nauce ostatnia przyczyna wyróżniania geometrii euklidesowej przed innymi geometriami. Nowe geometrie mogą być traktowane jedynie metodami analitycznymi. Chociaż mamy do czynienia z językiem geometrycznym, zmuszeni jesteśmy przyjąć technikę

analizy. Na całej szerokości fronu badań wysunęła się naprzód algebra i analiza na miejsce, które zajmowała przedtem geometria.

Geometria euklidesowa, jako specjalny przypadek riemannowskiej, była formułowana coraz to bardziej algebraicznie. Podstawowymi stały się: przestrzeń wektorowa i iloczyn skalarny, których definicje podawane były czysto algebraicznie. Tego typu ujęcie przyjęło się dzisiaj. Przy egzaminach wielu kandydatów na pytanie: „co rozumiemy pod geometrią euklidesową?" odpowiada: „Jest to przestrzeń wektorowa (to pojęcie jest rozumiane dzisiaj czysto algebraicznie), ze specjalnym iloczynem skalarnym". W tak szybkim rozwoju nauki, pięknie wykończone przez Hilberta przedstawienie geometrii euklidesowej, mimo całego uznania dla mistrza, straciło na znaczeniu. To trzeba przyznać. Ciężko się robi człowiekowi, gdy Jean Dieudonné, bez wątpienia bardzo sugestywnie, woła: „Les imbéciles ne sont pas tolerés". (Nie będziemy tolerować głupców.) Głosi, że geometria euklidesowa wraz ze swą klasyczną konstrukcją i specjalnymi twierdzeniami nie należy już do nauczania matematyki.

Dawna geometria analityczna nie istnieje już, gdyż nie można już wskazać izomorfizmu między tworami analitycznymi a geometrycznymi. Pojęcia geometryczne są już tylko nazwami wyrażeń algebraicznych. W tym momencie występuje u nauczyciela chwila zamieszania. Odpada przecież ta motywacja, którą brał z doświadczenia, gdzie chodziło o to, by biegle operować podstawowymi pojęciami geometrycznymi przyporządkowanymi naiwnej rzeczywistości. Jeszcze nie tak dawno uważano, że w nauczaniu szkolnym dopiero wtedy twierdzenie matematyczne staje się zrozumiałe, gdy można je unaocznić w sposób poglądowo geometryczny. Było to oczywiście przesadne stanowisko. Jednakowoż świadomość autonomii pojęć geometrycznych jest powszechna i tego nie można pominąć w nauczaniu.

Należy przyznać Dieudonnému, że jego punkt spojrzenia może służyć za podstawę naukowo ambitnej encyklopedii, takiej jak np. dzieło Bourbakiego. Ale praca badawcza na wysokim szczeblu nie może dawać uprawnień do komenderowania w nauczaniu matematyki, a zwłaszcza w szkolnictwie średnim.

Nauczający chętnie przyjmują nowe idee podawane przez badaczy. Powstały w ten sposób niepokój wśród nauczycieli zapobiega ciągłemu niebezpieczeństwu skostnienia nauczania. Gdy się uczy przez kilka lat można się bardzo wygodnie urządzić, ucząc ciągle tego samego. Ale rutyna nie działa przekonywująco, gdy materiał nie sprawia radości. Dlatego nauczający nie mogą się obyć bez badaczy naukowych. Nie mogą natomiast badacze narzucić nauczającym decyzji w sprawie dydaktyki nauczania. Tu należy zwrócić uwagę na punkty widzenia wymykające się uczonym. Podstawowe pojęcia geometryczne i liczby rzeczywiste w sposób naturalny nasuwają się młodemu człowiekowi i wgląd we wzajemne relacje wielkości algebraicznych i geometrycznych, który zawdzięczamy Descartesowi, pozostaje podstawową nauką dla młodzieży.

Operowanie relacjami algebraicznymi i pojęciami geometrycznymi wymaga wprawy. Pole ćwiczeń nazywa się geometrią analityczną. Jest to na pewno nieszczęśliwie dobrana nazwa. W dziale tym, poza geometrią, naucza się form liniowych

i kwadratowych. Można by wynaleźć inną nazwę. Ale to wywołałoby wiele zamieszania. Nie można tak sobie, po prostu usunąć nazwę o kilkusetletniej tradycji. Wydaje się, że najlepiej będzie, gdy pogodzimy się z dotychczasową nazwą, nawet za cenę zaliczenia do „imbéciles".

Podobnie w życiu: Gdy się ktoś przedstawia „Zając jestem", nie uważa się, że jest on zającem. Walka z nonsensowymi nazwami jest walką z wiatrakami. W szczególnych wypadkach, jak nasz na przykład, można w końcu osiągnąć zwycięstwo, ale po dłuższym okresie zamieszania. Niedawno znany wydawca w Nowym Jorku, który wydał dzieło poważnego matematyka o geometrii analitycznej, zapytał mnie, dlaczego ono nie idzie. Odpowiedź była prosta. Autor i wydawca coś innego rozumieli pod „geometrią analityczną". Nie można wydawcy wziąć za złe, że nie studiował tej drugiej teorii. Nie należał do elity matematycznej. Autor pod „geometrią analityczną", zgodnie z klasyfikacją bourbakistów, rozumie bardzo żywo rozwijający się i wysoki dział teorii funkcji analitycznych wielu zmiennych. To jest oczywiście sensowne. Wydawca natomiast rozumiał pod tym tradycyjną geometrię analityczną i opublikował książkę przyjmując, że znajdzie wielu nabywców w szeroko rozpowszechnionym nauczaniu na etapie początkowym.

Zmiana znaczenia słowa „geometria analityczna" grozi zaciemnieniem dziejów naszej nauki. Gdzie uzna się zasługi Descartesa, jeśli cała geometria, a nawet jej nazwa, w ten sposób zanika? Nieco znajomości historii powinien mieć każdy z nas.

W każdym razie mamy za sobą dwa tysiące lat, w których geometria euklidesowa uchodziła za wzór ścisłości. Tego się przekreślić nie da. Wprawdzie J. Dieudonné powiada: „Gdy uczę się kierowania autem nie studiuję wpierw konstrukcji maszyny parowej Watta", Jednak sprawa techniczna, jak kierowanie autem, i zajęcie intelektualne, jakim jest studium matematyki, należą do zbyt różnych i trudno porównywalnych dziedzin naszego życia.

Ile już płacimy za tę ahistoryczną drogę nauczania matematyki pokazuje wyraźnie nasza młodzież, która zamierza studiować matematykę uniwersytecką. Wykłady dla rozpoczynających studia są stale dostosowywane do nowych poglądów. Nauka w szkole średniej jest znacznie bardziej konserwatywna. Musi nawiązywać do zmysłowych wyobrażeń dziecka i zrobić długą drogę w ciągu 11 lat nauczania. Uniwersytet jednak beztrosko zakłada punkt zerowy poza końcowym etapem szkoły średniej. Z powodu tej przepaści między uniwersytetem a szkołą średnią przepada ze studium matematyki pewien procent młodych ludzi. Jest rzeczą karalną starać się o dalszy dopływ młodych ludzi, jeśli tak zły stan rzeczy nie będzie złagodzony. Wymaga to lepszego wzajemnego zrozumienia wszystkich kategorii nauczycieli matematyki. Jeśli nie ze względu na rzecz samą w sobie, to chociażby ze względu na młodych ludzi należy dążyć do osiągnięcia lepszego zrozumienia warunków nauczania na różnych etapach.

Nauczanie elementarne bezwzględnie musi nawiązywać do pojęć nasuwających się w życiu codziennym. Z jednej strony występują tu liczby, z drugiej pogląd doświadczalny nasuwający elementarne pojęcia takie, jak punkt, prosta, płaszczyzna. Po długim łańcuchu błędów wiemy już dziś, że nie możemy poglądu doświadczal-

nego brać z całą powagą. Wprawdzie obserwacja promieni świetlnych czy liniałów prowadzi nas do geometrii euklidesowej, wystrzegamy się jednak tego, by uważać, że zachodzi ona w naszym świecie. Jest ona jednak bezsprzecznie niezbędna dla człowieka jako środek opanowywania otaczającego świata w skromniejszym zakresie.

Jeśli uczymy geometrii euklidesowej w jej ramach klasycznych chociażby nawet pobieżnie, nie można pominąć jej logicznej struktury. Nie da się pogodzić z suwerennością nauczyciela, gdy nie wie, co należy do podstaw geometrii i nie ma wglądu w jej dwutysiącletni rozwój. Geometria analityczna, jeśli uczeń jest matematycznie wrażliwy, jest fundamentalnym przeżyciem poznawczym, a co więcej, ważnym narzędziem. Niezbędna jest ona dla poznania przestrzeni euklidesowej R^3 wraz z przekształceniami ortogonalnymi, a to musi być nauczane w szkole średniej.

Przez wiele dziesięcioleci w całym prawie świecie w wykładach geometrii analitycznej wykorzystywano dzieło Salmona i Fiedlera. W dziele tym podane są niezliczone punkty osobliwe trójkąta i własności stożkowych. Działo się to za czasów naszych ojców i dziadków. Wiele z tego już poszło w zapomnienie, a wiele jeszcze się zapomni. Poza istotnym jądrem wszystko odpada, by zrobić miejsce nowym działom, które same będą z kolei musiały ustąpić. Leży to w istocie nauki, że w jej rozwoju z wielu rzeczy musi się zrezygnować i zostaje tylko koncentrat. Byłoby absurdem zrezygnować i z tej reszty. Nie możemy więc zrezygnować z geometrii analitycznej, a nawet samą nazwę oddać innej gałęzi matematyki. Chętnie przyjmujemy do wiadomości, że dziś można zbudować matematykę z teorii mnogości, algebry, teorii uporządkowania i abstrakcyjnej topologii. Ale w ten sposób nie można postępować w szkole, a nawet — powiedziałbym — w początkowych wykładach uniwersyteckich. Zasadniczo nie można zrezygnować z autonomii geometrii, takiej jakiej dotychczas dawało wyraz nauczanie geometrii euklidesowej i analitycznej. Zbyt wiele zastosowań geometrii zależnych jest od tego i zbyt mocno związana jest ona z naszymi wyobrażeniami.

Oczekujemy, że dla dobra młodzieży stale odnawiać się będzie wzajemne zrozumienie z przedstawicielami szybko rozwijających się badań współczesnych, wśród których jest wielu wspaniałych wodzów, lecz również i nadgorliwców. Nieciągłość nauczania może przynieść kolosalne szkody w naszym zawodzie. Zmniejszenie rozdźwięku warte jest zachodu najlepszych. Jeśli idzie o uporczywych, powinni sobie uświadomić, że nie można chronić geometrii środkami administracyjnymi. Decydujące dla dalszego istnienia geometrii są przekonywające nauczanie i powstawanie coraz nowszych, oryginalniejszych podręczników podtrzymujących zapał nauczycieli i budzących entuzjazm uczniów.