ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVI (1973)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

MARIA WYCECH-ŁOSIOWA (Warszawa)

Sympozjum Matematycznych Metod Ekonomii jego problematyka, cele i przebieg

Od Redakcji: W dniach od 1 lutego do 31 lipca 1972 r. odbyło się Sympozjum Matematycznych Metod Ekonomii zakończone konferencją poświęconą modelom von Neumanna. Sympozjum i konferencja zostały zorganizowane przez Instytut Matematyczny PAN. Bezpośrednim organizatorem był prof. Jerzy Łoś. Możliwość zorganizowania Sympozjum na tak dużą skalę oraz przyjęcie zaproszeń przez najwybitniejszych specjalistów z krajów, w których matematyczne metody ekonomii są rozwinięte, są wynikiem wieloletniego kształcenia w tematyce Sympozjum grupy młodych matematyków w Instytucie Matematycznym PAN pod kierunkiem prof. Łosia.

Przez 6 miesięcy, od lutego do lipca 1972 r., trwało w Warszawie zorganizowane przez Instytut Matematyczny PAN międzynarodowe Sympozjum Matematycznych Metod Ekonomii. Wydaje się, że problematyka naukowa tego Sympozjum i jego charakter mogą zainteresować szersze grono matematyków.

Przed omówieniem tematyki Sympozjum warto może krótko wyjaśnić, czym się zajmuje, kiedy powstała i jakimi działami matematyki się posługuje stosunkowo niedawno powstała dyscyplina — ekonomia matematyczna. Używanie języka matematyki w opisie zjawisk gospodarczych ma już dość długą historię. Zainicjowane zostało przez A. Cournota w wydanej w 1838 r. książce pt. *Rozważania nad zasadami matematycznymi teorii bogactwa.* Niestety jej autor nie zdobył w ten sposób popularności, gdyż przez wiele lat nie sprzedano ani jednego egzemplarza jego dzieła. Wreszcie w 1863 r. zdecydował się na nowe wydanie, z którego usunął wszystkie wzory, co zresztą wcale nie zwiększyło poczytności traktatu. Podobny był los innych tego rodzaju prób z połowy XIX w. Dopiero w latach siedemdziesiątych posługiwanie się matematyką staje się czynnością uznaną, a nawet powstaje w ekonomii kierunek zwany szkołą matematyczną. Jeden z jego głównych przedstawicieli L. Walras w *Elementach ekonomii politycznej* (1874) opisuje za pomocą układu równań zależności między cenami towarów a popytem i podażą i stara się udowodnić, że istnieje taka cena, przy której obie te wielkości się wyrównują (punkt równowagi), zachowując inne warunki założone w tym opisie. Poprawny dowód istnienia punktu równowagi nie był jednak w tym czasie możliwy, bowiem matematyka nie dysponowała jeszcze odpowiednimi narzędziami. Jak się okazało znacznie później, wymaga on twierdzenia o punkcie stałym, które udowodnił Brouwer dopiero w 1909 r.

Powszechnie uważa się, że współczesna ekonomia matematyczna narodziła się w latach trzydziestych naszego wieku i bierze swój początek w pracach dwóch matematyków, referowanych we Wiedniu na seminarium prowadzonym przez K. Mengera. Są to: praca Johanna von Neumanna *O pewnym układzie równań ekonomicznych i o uogólnieniu twierdzenia Brouwera o punkcie stałym* (1937) oraz 2 prace Abrahama Walda (1935, 1936). Znaczenie ich polegało m. in. na tym, że po raz pierwszy zostały w nich sformułowane poprawne modele matematyczne opisujące zjawiska gospodarcze oraz podano ścisłe dowody istnienia punktów równowagi w tych modelach. I znowu trzeba powiedzieć, że prace te zostały właściwie docenione dopiero w latach pięćdziesiątych i stały się wtedy impulsem powstania nowych kierunków badań współczesnej ekonomii. Prace A. Walda dały początek teorii ogólnej równowagi, a praca J. von Neumanna teorii liniowych modeli wzrostu gospodarczego. W końcu lat trzydziestych widmo matematyki krążyło już nad ekonomią. W tym czasie powstaje również wydane w 1945 r. dzieło P. Samuelsona *Zasady analizy ekonomicznej* opatrzone mottem „Matematyka — to język," które jest pierwszą próbą ujęcia całości teorii ekonomicznych w języku matematycznym, co przyniosło jej autorowi nagrodę Nobla w 1970 r.

Lata powojenne to stopniowy i coraz intensywniejszy rozwój matematycznej ekonomii, która stara się ująć w postaci modeli zasadnicze procesy gospodarcze, jakimi są produkcja i rozdział strumienia dóbr, a następnie za pomocą matematyki bada je, wyciągając wnioski o treści ekonomicznej. Do konstrukcji modeli ekonomicznych używa się bardzo wielu pojęć matematycznych w zależności od potrzeby, problematyki i charakteru badań. Równania różniczkowe występują tam, gdzie pewne wielkości zmieniające się w czasie oddziaływają na siebie, wywołując wzrost lub malenie. Taką sytuację obserwujemy np. przy badaniu dochodu narodowego lub produkcji globalnej w zależności od stopy akumulacji, zmian populacji i postępu technicznego. Przy badaniu rozdziału dochodu narodowego problem jest formułowany w języku podzbiorów wypukłych przestrzeni liniowych i ich przekształceń ciągłych, a głównym narzędziem są twierdzenia o punktach stałych. Optymalizacyjna teoria wzrostu posługuje się programowaniem dynamicznym, a jeśli uwzględnia czynniki losowe, to sięga do procesów stochastycznych. Nie jest to zresztą jedyne zagadnienie, w którym interweniuje probabilistyka. Wiele bowiem czynników ekonomicznych zależy od przypadku, a randomizacja decyzji (wywodząca się z idei von Neumanna w teorii gier) jest stałym narzędziem matematycznej ekonomii, choćby dlatego, że z dowolnego zbioru decyzji tworzy zbiór wypukły. Teorie dualności często i w sposób naturalny interweniują w modelach ekonomicznych, a nawet znalazły w nich nową interpretację. Polega ona na tym, że ceny są formą liniową wiązki towarów dającą w efekcie jej wartość pieniężną, a współczynniki kosztów są formą liniową rozmiarów produkcji, prowadzącą do kosztu globalnego. Dualność przestrzeni liniowych stała się w ten sposób nie tylko narzędziem badania, ale i źródłem inwencji w matematycznej ekonomii. Analiza wypukła jest coraz powszechniej używana w badaniach modeli ekonomicznych, i to nie tylko w odniesieniu do ogólnych przestrzeni liniowych (przestrzenie lokalnie wypukłe grają oczywiście główną rolę),

ale również w zwykłych skończenie wymiarowych przestrzeniach euklidesowych. W praktyce mamy bowiem skończoną ilość towarów, fabryk, ośrodków dyspozycji i konsumentów. Dlatego w modelach ekonomicznych muszą występować przestrzenie skończenie wymiarowe, co prowadzi do zainteresowania geometrią ciał wypukłych, rozkładami macierzy, teorią nierówności i wieloma innymi zagadnieniami, które jeszcze przed 20 laty były uważane za wyczerpane lub peryferyjne. Teoria Frobeniusa-Perrona, rozkłady funkcji liniowych macierzy i lemat Farkasa są tego najlepszymi przykładami.

Konieczność wyzyskiwania różnorodnych metod matematycznych dla doskonalenia opisów zjawisk ekonomicznych spowodowała w ostatnich latach ogromne zainteresowanie tą dyscypliną w środowiskach matematycznych, czego przykładem może być zajęcie się tą tematyką przez S. Smale'a, jednego z laureatów medalu Fieldsa. W wielu krajach powstają całe zespoły matematyków i ekonomistów rozwijające tę dyscyplinę, a nawet instytuty, jak np. CEMI w Moskwie lub International Institute of Quantitative Economics w Toronto.

Sympozjum Matematycznych Metod Ekonomii było głównie poświęcone wielosektorowym liniowym modelom wzrostu gospodarczego, w szczególności modelom von Neumanna, oraz tym teoriom matematycznym, które są specyficznie związane z ich badaniem, a więc analizie wypukłej i programowaniu dynamicznemu. Prace Sympozjum koncentrowały się wokół 3 seminariów nazwanych: von Neumanna, Markowa i Farkasa.

Na seminarium von Neumanna zajmowano się uogólnieniami modeli von Neumanna. Porównywano własności oryginalnych modeli, opisanych parą macierzy, z modelami zadanymi stożkami, superliniowymi przekształceniami i transformacjami liniowymi w przestrzeniach częściowo uporządkowanych. Wiele miejsca poświęcono zagadnieniom ujęcia w tych modelach dodatkowych czynników ekonomicznych, takich jak praca, płaca, konsumpcja, usługi, handel zagraniczny i regulowanie gospodarki przez opodatkowywanie i subsydiowanie sektorów gospodarczych. Prace tego seminarium opierały się w dużym stopniu na wynikach, jakie w tej tematyce uzyskali pracownicy Grupy Statystyki i Metod Matematycznych Ekonomii IM PAN.

Seminarium Markowa poświęcone było teorii programowania dynamicznego, ze szczególnym uwzględnieniem tych aspektów, które wiążą się bezpośrednio z modelami wzrostu gospodarczego. Omawiano na nim najnowsze wyniki w zakresie modeli deterministycznych i stochastycznych, dyskutowano problemy wyboru kryteriów optymalności, istnienia optymalnych polityk i asymptotycznego zachowania się rozwiązań optymalnych (twierdzenia o magistrali). Na szczególną uwagę zasługiwały nadesłane na Sympozjum prace E. W. Dynkina i jego uczniów, dotyczące modeli wzrostu gospodarczego uwzględniających czynniki losowe, jakimi mogą być zmiany demograficzne i meteorologiczne, wahania cen na rynkach oraz odkrycia i wynalazki tworzące postęp naukowo-techniczny. Grupa młodych uczestników z IM PAN prezentowała na tym seminarium swoje wyniki dotyczące programów dynamicznych i gier z niepełną informacją, ciągłych procesów decyzyjnych i ich zastosowań w teorii zapasów.

Seminarium Farkasa poświęcone było analizie wypukłej. Omawiano na nim różnego typu twierdzenia o dualności (mnożniki Lagrange'a, twierdzenie Kuhna-Tuckera, twierdzenia Milutina-Dubowickiego), uogólnienia lemmatu Farkasa oraz twierdzenia o separacji, o których roli w badaniu modeli ekonomicznych i problemów optymalizacyjnych wspominaliśmy już poprzednio. Seminarium to często prowadzili najwybitniejsi specjaliści z tej dziedziny ze Związku Radzieckiego, Wietnamu i USA.

Na Sympozjum pojawiała się również inna problematyka, której potrzeba omówienia wynikała z zainteresowań uczestników lub wiązała się z bieżącymi pracami przyjeżdżających gości. Tak więc grupa młodych uczestników zorganizowała seminarium z teorii gier, a obecność wybitnych specjalistów wprowadziła do programu teorię użyteczności, ogólną teorię równowagi ekonomicznej, nowy algorytm Scarfa-Hansena wyznaczania punktu stałego ciągłych przekształceń sympleksu. Niekiedy organizowano mniej formalne dyskusje na tematy związane z pracami Sympozjum, np. dyskusje o roli „optymalizacji", o sposobach ujmowania czynników losowych w modelach wzrostu gospodarczego i o roli matematyki w badaniach ekonomicznych.

Kulminacyjnym momentem prac Sympozjum była Konferencja poświęcona modelom von Neumanna (10-15 lipca), której przewodniczył profesor Oskar Morgenstern.

Celem Sympozjum było przedyskutowanie aktualnej problematyki związanej z badaniami nad liniowymi modelami wzrostu gospodarczego, przyczynienie się do jej rozwoju i stymulacja dalszych badań. Przede wszystkim jednak chodziło o zaszczepienie tej problematyki w środowiskach naukowych w Polsce. Uczestnictwo w Sympozjum młodych polskich matematyków i ekonomistów, wspólny ich pobyt przez 6 miesięcy z zagranicznymi rówieśnikami, kontakt z wybitnymi specjalistami z wielu krajów — wydawał się najlepszą drogą zainicjowania badań w omawianych dziedzinach w niektórych ośrodkach naukowych w kraju.

Zgodnie z takimi zamierzeniami uczestnicy Sympozjum dzielili się na dwie grupy — uczestników stałych, którzy przebywali na nim całe 6 miesięcy oraz wykładowców, którzy przyjeżdżali na różne okresy prowadząc wykłady, seminaria i uczestnicząc w pracach Sympozjum. Grupa stałych uczestników (ponad 50 osób, w tym połowę z Polski) składała się w zasadzie z młodych naukowców, przed lub po doktoracie, reprezentujących 15 krajów (Austria, Bułgaria, Czechosłowacja, Dania, Francja, Holandia, Meksyk, NRD, NRF, Rumunia, Szwajcaria, Syjam, Węgry, Włochy, Związek Radziecki oraz Polska). W Sympozjum i Konferencji uczestniczyło około 50 uczonych z 13 krajów, ponadto udział korespondencyjny brali niektórzy naukowcy, którzy nie mogli przybyć osobiście (E. W. Dynkin i jego uczniowie, David Gale, Borys S. Mitiagin, Roy Radner), ale którzy przyczynili się do jego osiągnięć, nadsyłając swoje prace, które były dyskutowane na seminariach. Wśród wybitnych uczestników Sympozjum należy wymienić takich ekonomistów, jak Oskar Morgenstern, William Brock, Terje Hansen, Walery L. Makarow, Lionel W. McKenzie, Luigi Passinetti, Karl Vind, i matematyków, jak Martin J. Beckmann, Euge-

nij G. Golstein, Hoang Tuy, Victor Klee, Borys Pszeniczny, Vsievołod F. Pugaczow, Albert C. Offord, Stephen Robinson, R. Tyrrell Rockefellar, G. S. Rubinstein. Osobno należy wspomnieć o udziale profesora Tjallinga C. Koopmansa, który od początku służył organizatorom swą radą i poparciem w sprawach programu naukowego i doboru uczestników i spędził na Sympozjum 6 tygodni, wykładając i inicjując dyskusje.

Sympozjum było finansowane przez Polską Akademię Nauk przy współudziale UNESCO, która udzieliła subwencji na koszta podróży i pewnych urządzeń biurowych, a również współpracowała — w osobach swych przedstawicieli — w selekcji stypendystów.