ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVI (1973)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Dyskusja nad terminologią i symboliką matematyczną

W dziale tym Redakcja zamierza publikować wypowiedzi krytyczne dotyczące obecnie stosowanych terminów, symboli i utartych zwrotów matematycznych, ich zalet i wad, sygnalizujące trudności związane z próbami zmiany zakorzenionego terminu, wreszcie nowe propozycje. Mogą to być wypowiedzi dłuższe, o charakterze artykułów, lub krótkie, kilkowierszowe.

Nie wyklucza się publikowania całkowicie sprzecznych opinii. Opinie publikowane w tym dziale nie będą więc żadnymi obowiązującymi normami; chodzi jedynie o to, aby stosowanie takiego czy innego terminu przez matematyka było oparte na świadomym wyborze, opartym na przemyślanych argumentach, a nie na przyzwyczajeniu lub przypadku.

Redakcja prosi o nadsyłanie materiałów do tego działu (pożądane jest, aby wypowiedzi dotyczące różnych spraw były pisane na oddzielnych kartkach).

1. Dlaczego nie suma? Istniejące w nauce nazwy powinno się zmieniać wtedy, gdy zachodzi tego potrzeba. Dawniej mówiło się *suma* dwóch zbiorów i pisało $A+B$. Później zjawiła się potrzeba wprowadzenia *sumy algebraicznej* zbiorów, dla której najlepiej nadawał się symbol $A+B$. Dlatego dla poprzedniej sumy, zwanej później dla odróżnienia *sumą mnogościową*, wprowadzono symbol $A \cup B$. Jednocześnie wymyślono na Zachodzie bardzo trafną nazwę *union*, wobec której polska nazwa *suma mnogościowa* wydaje się bardzo długa i nieudolna.

Ale co szkodzi, by pó polsku mówić po dawnemu *suma*, a pisać $A \cup B$? Ta sama nazwa dla dwóch różnych pojęć nieraz się zdarza w matematyce. Na przykład mówi się często, że liczba a jest *zerem* funkcji f, chociaż to *zero* nie ma nic wspólnego ze zwykłym zerem. Mówi się też jeszcze stale o *różnicy* dwóch zbiorów, choć ta różnica ma niewiele wspólnego ze zwykłą różnicą. *Nazwa union przyjęła się na Zachodzie nie dlatego, że zachodziła konieczność nowej nazwy, tylko dlatego, że ta nowa nazwa jest wyjątkowo trafna i sugestywna.* Jako argument można przytoczyć fakt, że mówi się nadal *difference* zarówno w przypadku *różnicy mnogościowej* $A \setminus B$ jak i *różnicy algebraicznej* $A-B$.

W języku polskim nie mamy równie trafnej nazwy dla $A \cup B$, i dlatego próby wprowadzenia nowej terminologii będą napotykały opory. Proponowane nazwy *połączenie* czy *złączenie* mają formę rzeczowników odsłownych, których pierwotnym znaczeniem jest czynność, a nie jej wynik. „Łączymy dwa zbiory i otrzymujemy złączenie dwóch zbiorów" to tak jakby powiedzieć „dodajemy dwie liczby i otrzymujemy dodanie dwóch liczb". Niezręcznie — prawda?

Można by zaproponować jeszcze różne inne nazwy dla sumy $A \cup B$, np. *zlep*,

złączka, zestaw. W moim osobistym wyczuciu wszystkie proponowane nazwy ustawiłbym w następującej kolejności, od najmniej złej (bo dobrej nie ma) do najgorszej:

suma, unia, zlep, złączka, złączenie, połączenie, zestaw.

Nazwa *suma* stoi u mnie na pierwszym miejscu, ponieważ już od dawna istnieje i jest używana jeszcze stale, a nie widzę konieczności jej zmiany. *Unia* jest na drugim miejscu ze względu na powiązania z terminologią w innych językach. (Argument, że nie można mówić „uniować dwa zbiory" jest słuszny, ale nie bardzo przekonywający, bo odpowiedź jest prosta: skoro tak nie można mówić, to nie mówmy!) Nazwa *zlep* byłaby kapitalna, gdyby nie to, że zanadto pachnie klejem.

Na ogół jestem przeciwnikiem wprowadzania nowych nazw, jeśli to nie jest konieczne. Czasem jednak taka konieczność zachodzi. Na przykład przeszło 20 lat temu została wymyślona i wprowadzona nazwa *splot* w miejsce francuskiego *produit de composition*. Nazwy polskiej wtedy nie było, a tłumaczenie *iloczyn kompozycyjny* wypadało bardzo niezręcznie. Późniejsza nazwa angielska *convolution* w adaptacji polskiej brzmiała *konwolucja* i była używana tylko przez Steinhausa. Nie przyjęła się, bo nazwa *splot* jest dużo lepsza. Niestety, nie ma dotąd podobnie dobrej nazwy dla $A \cup B$ i być może nie ma jej w ogóle w słownictwie polskim. Poza tym sytuacja jest inna, bo istnieje już od dawna używana nazwa *suma*. Czy warto kruszyć kopie o zmianę tej nazwy tylko dlatego, że na Zachodzie udało się znaleźć *union*?

Podobne uwagi dotyczą także symbolu $A \cap B$, z tą jednak różnicą, że wiele argumentów za zmianą nazwy chybia. Na przykład główny argument, by odróżniać iloczyn mnogościowy od iloczynu algebraicznego odpada, ponieważ w teorii zbiorów nie wprowadza się iloczynu algebraicznego. Poza tym iloczynowi $A \cap B$ odpowiada zwykły iloczyn funkcyj charakterystycznych i w tym sensie pojęcie to jest bliższe zwykłego iloczynu niż suma. I jeszcze jedno: istnieje dobry i gładki termin *część wspólna* zbiorów. Obydwa terminy *iloczyn* i *część wspólna* wydają mi się bardzo dobre, a w każdym razie dużo lepsze językowo od bezmyślnego tłumaczenia *intersection* na *przecięcie*.

Jan Mikusiński

Dopóki zajmowałem się jedynie analizą funkcjonalną, nazwy *suma* na oznaczenie $A \cup B$ i *iloczyn* na oznaczenie $A \cap B$ nie przeszkadzały mi, gdyż ewentualne dodanie słowa „mnogościowy" wystarczyło do odróżnienia tych pojęć od *sumy algebraicznej* $A+B$ i *iloczynu algebraicznego* $A \cdot B$ (jedno i drugie jest używane w teorii pierścieni). Moje rozumienie podstawowych pojęć matematycznych zmieniło się znacznie, gdy zacząłem poznawać teorię kategorii, a potem zagadnienia dydaktyczne. Dziś jestem głęboko przekonany, że jedynym „prawdziwym" *iloczynem mnogościowym* jest $A \times B$ (słowo „kartezjański" uważam za zbędne); co więcej uważam, że używanie nazwy *iloczyn* na określenie $A \cap B$ opóźniło o wiele lat zrozumienie przeze mnie prawdziwego sensu pojęcia iloczynu kartezjańskiego.

Zwróćmy np. uwagę na to, że jakkolwiek wiadomo dobrze, iż pojęcie części wspólnej jest dużo łatwiejsze od pojęcia unii, w niemal każdym podręczniku mówi się najpierw o $A \cup B$, a potem o $A \cap B$. Autorzy sugerują się bezwiednie tym, że suma powinna być przed iloczynem. Znacznie groźniejsze są fałszywe skojarzenia u osób mających trudności z matematyką, a zwłaszcza nauczycieli szkół podstawowych, którzy w rozmaitych wypowiedziach mylą zbiór z liczbą elementów tego zbioru i podświadomie identyfikują zbiór z jego liczbą kardynalną(1).

Przeżywam obecnie rozterki, co jest lepsze: *unia* czy *złączenie*. Przez rok używałem z powodzeniem nazwy *złączenie*, ale drażniły mnie zwroty „działanie złączenia jest łączne" i „złączenie zbiorów rozłącznych". W liceum lepiej mówić: *łączymy* zbiory i dostajemy *unię*, ale w klasie I szkoły podstawowej łatwiejszy jest chyba termin *złączenie*, który nie wyklucza późniejszej nazwy *unia* (podobnie jak „dwa dodać trzy" przechodzi później w „dwa plus trzy").

Podany powyżej przykład z zerem funkcji jest nieprzekonywający. Nie jest prawdą, że liczba zero nie ma nic wspólnego z zerem funkcji; w rzeczywistości „zero funkcji" powstało z dłuższego zwrotu „punkt, w którym funkcja przyjmuje wartość zero". Nazwa „suma zbiorów" powstała przez analogię, a nie przez zastosowanie wyrzutni.

Zbigniew Semadeni

2. Obrazy i przeciwobrazy. Gdy $f: X \to Y$, $x \to y$ (wolę to znakowanie od częstszego $f: X \ni x \to y \in Y$), to dla X używa się u nas najrozmaitszych nazw: *zbiór określoności*, *pole*, *przeciwdziedzina*, *dziedzina*. Zbiór Y bywa nazywany *zbiorem wartości*, *zapasem*, *przeciwdziedziną*; y jest *obrazem* punktu x, zaś u niektórych x jest nazywane *przeciwobrazem* punktu y.

Z wyjątkiem *obrazu* każda z tych nazw ma wady. Są nietrafne psychologicznie; nie ułatwiają bynajmniej wytworzenia właściwego wyczucia roli wyrażanych przez nie pojęć. Są też nieudatne językowo.

Warto by więc może przejąć z literatury francuskiej (i częściowo angielskiej) nazwy *źródła* dla X i x, *obrazu* dla Y i y. Powstaje wprawdzie kłopot, gdy f posyła X nie na Y, ale do Y (chyba lepiej tak mówić; utarte „w zbiór Y" jest bardzo niewdzięczne do wymawiania). Może by *obrazem* nazywać, jak dotąd, zbiór $f(X)$, a zbiór Y — *przestrzenią obrazów* lub *celem*? A może istnieje lepsze rozwiązanie? W teorii kategorii używana jest nazwa *kodziedzina*(2), ale poza teorią kategorii czułbym się z nią źle.

Wielu matematyków powitałoby też z zadowoleniem zapis wyrażający, że

(1) Jednym z najlepszych „osiągnięć" studentów, z jakim spotkałem się na egzaminie, był przykład $20-(3+4) = (20-3)\cdot(20-4)$ podany jako ilustracja jednego z praw de Morgana. Student wyleciał za drzwi, ale problem terminologiczny pozostał.

(2) Z. Semadeni i A. Wiweger, *Wstęp do teorii kategorii*, 1972.

odwzorowanie $\cdot f$ jest określone dla niektórych $x \in E$. Zapis $f: E \supset X \to Y$ jest za ciężki.

Witold Kleiner

3. Przeciw WKW. Zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy" proponowałbym skracać do „gdy". Istnienie jakiegoś skrótu, który odpowiadałby angielskiemu „iff" i francuskiemu „ssi", jest na pewno potrzebne, nawet jeśli nie byłby powszechnie stosowany, lecz stanowił jedynie pewną możliwość. Mógłby się on przyczynić, prędzej niż to robią perswazje, do usunięcia z języka matematycznego zwrotów „na to by... potrzeba i wystarcza by" (gdzie nie wiadomo co czemu potrzeba, a co czemu wystarcza) wraz z „warunkami koniecznymi i dostatecznymi" skracanymi w folklorze do „WKW", co wcale nie jest takim skrótem, bo mówi się wtedy „WKW na to by... jest by". Oczywiście, dobrym skrótem jest strzałka „$\Leftrightarrow$", ale ją też trzeba jakoś czytać.

Słowo „gdy" używane jest w języku potocznym na początku zdania podporządkowanego, opisującego akcję odbywającą się równocześnie z akcją opisywaną w zdaniu głównym. Nie ma ono znaczenia równoważności logicznej, ale nie ma też znaczenia implikacji: nie służy do objaśnienia przyczyny. Niestety, bywa często używane niewłaściwie zamiast „jeśli" (np.: gdy $x = 0$, to $\sin x = 0$). Język polski ma obfitość wyrażeń bliskoznacznych, co można wykorzystać do nadawania im bardziej sprecyzowanych znaczeń, m. in. matematycznych, zgodnie z potrzebą coraz to nowych rozróżnień. Dlatego, mimo że „gdy" nie wyraża w języku potocznym równoważności logicznej, to można nadać mu to znaczenie w języku matematycznym, tak jak w swoim czasie zwrotowi „jeśli...to" nadano znaczenie implikacji. Można też patrzeć na „gdy" jako na skrót (do ostatniego wyrazu) dotychczasowego zwrotu. Przy pisaniu można by je podkreślać, a w druku wyróżniać kursywą.

PRZYKŁADY. 1. Podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej jest zwarta, *gdy* jest domknięta i ograniczona. 2. Układ równań ... ma rozwiązanie niezerowe, *gdy* jego wyznacznik jest równy zeru. 3. Przestrzeń zwarta Hausdorffa jest AR-em, *gdy* jest retraktem pewnej kostki.

Sprzeciw wobec „WKW" nie jest jednak jedynie sprzeciwem wobec nazw. Nadużywa się równoważności logicznej w sformułowaniach twierdzeń. Oczywiście nie jest błędne sformułowanie: produkt jest wtedy i tylko wtedy zwarty, gdy przestrzenie produktowane są zwarte. Ale jedna implikacja jest trywialna, a druga jest centralnym twierdzeniem topologii ogólnej. Początkujący może być zdezorientowany czytając tego rodzaju stwierdzenia. Komasowanie dwu implikacji do równoważności często zaciera ostrość i sugestywność sformułowań. Np. w zakresie przestrzeni topologicznych z bazą przeliczalną są prawdziwe wynikania: 1. regularność $\Rightarrow$ metryzowalność i 2. metryzowalność $\Rightarrow$ normalność. Każde ze sformułowań

za pomocą równoważności: „metryzowalność $\Leftrightarrow$ normalność", czy też „metryzowalność $\Leftrightarrow$ regularność", jest uboższe w treść od koniunkcji zdań 1 i 2. Zatem sprzeciw wobec „WKW" jest sprzeciwem także wobec nadużywania „gdy".

Jerzy Mioduszewski