ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVI (1973)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W sprawie Toto-Lotka

Od Redakcji: Do Polskiego Towarzystwa Matematycznego wpłynął list w sprawie Toto-Lotka, który drukujemy ze skrótami, wraz z odpowiedzią przesłaną autorowi. Uważamy bowiem, że sprawy poruszane w tym liście interesować mogą wiele osób, a przypadki błędnych wnioskowań statystycznych nie są rzadkie. Zaznaczamy jednak, że interesuje nas tu tylko matematyczna strona zagadnienia.

Sprawa jaką poniżej pozwalam sobie przedłożyć nie leży w zainteresowaniach PTM, nie wątpię jednak, że ze względu na szkodę, jaką wyrządza społeczeństwu — choć nie grozi naszej gospodarce narodowej — znajdzie zainteresowanie u Członków Towarzystwa...

Chodzi mi o Państwowe Przedsiębiorstwo „Totalizator Sportowy" ...przyglądam się wynikom losowań już tylko z bieżącego roku:

	data	wylosowano numery	padło
1	2. I. 1972	1, 13, 22, 26, 42, 47 i 23	1×6 oraz 4×5+1
2	9. I. 1972	9, 10, 20, 34, 35, 40 i 21	2×6 oraz 9×5+1
3	9. I. 1972	5, 18, 19, 28, 34, 46 i 32	— oraz 8×5+1
4	16. I. 1972	3, 7, 20, 27, 38, 45 i 31	1×6 oraz 5×5+1
5	23. I. 1972	12, 14, 19, 23, 33, 46 i 15	2×6 oraz 5×5+1
6	30. I. 1972	1, 10, 17, 25, 31, 40 i 39	4×6 oraz 11×5+1
7	6. II. 1972	1, 5, 15, 32, 42, 49 i (?)	— oraz 4×5+1
8	13. II. 1972	2, 16, 30, 31, 40, 42 i 47	2×6 oraz 6×5+1
9	13. II. 1972	6, 10, 13, 24, 31, 46 i 15	1×6 oraz 3×5+1
10	20. II. 1972	20, 22, 31, 34, 39, 46 i 21	1×6 oraz 3×5+1
11	27. II. 1972	9, 18, 29, 30, 38, 44 i 28	7×6 oraz 9×5+1
12	5. III. 1972	1, 15, 12, 37, 39, 43 i 26	— oraz 5×5+1
13	5. III. 1972	10, 12, 21, 22, 29, 31 i 43	1×6 oraz 4×5+1

Wyraźne jest, że pozycje: 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12 i 13 są zgodne z prawidłowością teoretyczną, potwierdzoną przez rzeczywistość z przeszłości — choć nie mamy żadnej pewności, że i tu nie zostały podsunięte w poszczególnych dniach (w czasie dokonywania kontroli odcinków) kupony wypełnione cyframi, jakie padły w losowaniu dnia poprzedniego, np. z „piątką premiową", za które wypłaty wynoszą średnio 600-900 tys. zł.

Pozycja 2 — wyklucza absolutnie możliwość trafienia dwóch „szóstek", gdyż

ma dwie pary. Twierdzenie to umacnia fakt, że cyfra dodatkowa „21" stanowi parę z cyfrą „20" i trafienie 9 „piątek premiowanych" również jest absolutnie nieuzasadnione teoretycznie.

Pozycja 6 — jakkolwiek układ jest rozłożony — to wynik czterech „szóstek" i aż 11 „piątek premiowanych" stoi w zupełnej sprzeczności z prawdopodobieństwem. Taki „przypadek losowy" mogła spowodować tylko ręka ludzka.

Pozycja 11 — gdzie zachłanność zainteresowanych pozwoliła sobie na 7 „szóstek" — budzi godne pożałowania politowanie nad brakiem umiaru...

Mam nadzieję, że moje rozumowanie uzyska potwierdzenie przez Autorytety Towarzystwa Matematycznego...

Nazwisko znane Redakcji

W odpowiedzi na Pana list chciałbym przede wszystkim wyrazić podziękowanie za Pańskie zaufanie do autorytetu Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Postaram się odpowiedzieć możliwie wyczerpująco na pytania zawarte w Pańskim liście.

1° Teoria prawdopodobieństwa dostarcza metod obliczania prawdopodobieństw określonych zdarzeń losowych przy określonych założeniach. W przypadku gry w Toto-Lotka, zdarzenia te dotyczą różnych kombinacji wyników losowań, a założenia, przy których wyznaczane są te prawdopodobieństwa orzekają, że losowanie odbywa się uczciwie, tj. że wszystkie możliwe kombinacje sześciu liczb spośród 49 mają jednakowe prawdopodobieństwo.

2° Liczby trafień „szóstki" (jak również i innych kombinacji) zależą nie tylko od procesu losowania liczb (ciągnienia), lecz również od drugiego procesu losowego, mianowicie wypełniania kuponów przez grających. W tym drugim procesie zachodzi przypuszczalnie zjawisko preferowania pewnych kombinacji nad inne. Statystyczne własności tych preferencji nie są (o ile mi wiadomo) znane, wobec czego teoria prawdopodobieństwa nie może dostarczyć odpowiedzi na pytanie, jaka jest oczekiwana liczba kuponów (spośród kilkunastu milionów kuponów wypełnionych w danym tygodniu), na których znajduje się określona kombinacja liczb.

Można jednak rozsądnie przypuścić, że pewne kombinacje (uważane za „typowe") zakreślane są częściej niż inne.

3° Z punktu 2 wynika, że nie można udzielić odpowiedzi na Pańskie podstawowe pytanie, mianowicie czy teoria prawdopodobieństwa przewiduje trafienie 6-8 „szóstek" przy 15-19 milionach zakładów. Liczba trafionych „szóstek" zależy bowiem od tego, czy wylosowany układ był układem uważanym przez grających za „typowy", a więc częściej obstawianym, czy też był układem „dziwnym", który preferowało mniej grających.

W każdym jednak razie, istnienie *jakichkolwiek* preferencji grających w kierunku

pewnych typów układów *musi* spowodować, że liczby trafień „szóstek" będą podlegać większym wahaniom przypadkowym niż miałoby to miejsce, gdyby wypełnianie kuponów było procesem losowym, w którym każda kombinacja ma jednakowe szanse pojawienia się.

Niestety, bez znajomości struktury preferencji grających w Toto-Lotka, teoria prawdopodobieństwa nie może odpowiedzieć na pytanie, jakiego rzędu wahań liczby trafień „szóstek" można oczekiwać w kolejnych tygodniach. W związku z tym, nie jest bynajmniej oczywiste, że cytowane przez Pana liczby trafień „szóstek" świadczą o dokonywaniu oszustw.

Dla lepszego wyjaśnienia tego punktu wygodnie może będzie posłużyć się pewną analogią. Wyobraźmy sobie, że wszystkie imiona zostały wypisane na kartkach, a następnie kartki te wrzucono do urny i starannie wymieszano. Każdego tygodnia wybiera się losowo jedno z imion, a następnie wszyscy ludzie w Polsce o wylosowanym imieniu otrzymują określoną nagrodę. Wówczas każdy człowiek w Polsce miałby jednakowe szanse, że otrzyma nagrodę w najbliższym tygodniu, bowiem prawdopodobieństwo, że akurat jego imię zostanie wylosowane jest takie samo, jak dla innych imion. Jednakże liczby osób nagrodzonych będą podlegać znacznym wahaniom: np. Janów jest w Polsce znacznie więcej niż Pafnucych.

Liczby osób nagrodzonych zależą w tym przypadku od dwóch procesów losowych: losowania imion z urny, oraz nadawania imion dzieciom przez rodziców, przy czym w tym drugim procesie poszczególne imiona mają różne prawdopodobieństwa.

Rozkład imion w populacji Polski odpowiada w tym przykładzie rozkładowi wypełnionych kuponów, a losowanie imion — losowaniu liczb. Przykład ten wskazuje więc, że wahania liczby „szóstek" nie muszą świadczyć o nieuczciwości procesu losowania, a ponadto wskazuje on jeszcze na fakt, że dla oceny prawdopodobieństwa określonej liczby „szóstek" nie wystarczają obliczenia prawdopodobieństw zdarzeń odnoszących się wyłącznie do wyników ciągnień.

4° Prawdopodobieństwo, że przy losowym wyborze 6 liczb z 49 wypadną co najmniej dwie liczby kolejne, wynosi

$$\frac{48\binom{47}{4}}{\binom{49}{6}},$$

co równa się około 0,61. Tak więc, w mniej więcej 61% losowań należy oczekiwać co najmniej dwóch liczb kolejnych, a jedynie w około 39% przypadków układ wylosowany będzie (w Pana terminologii) „rozłożony".

Tak więc, pojawienie się dwóch kolejnych liczb nie jest bynajmniej wyjątkiem i przytoczone przez Pana wyniki nie świadczą — wbrew temu co Pan sugeruje — iż proces losowania nie odbywa się uczciwie.

5° Istotną rolę odgrywa też i prawna strona zagadnienia. Przypuśćmy na chwilę, że udałoby się w jakiś sposób oszacować rozkład preferencji grających w odnie-

sieniu do poszczególnych kombinacji. Można byłoby wówczas wyznaczyć, dla danego wyniku losowania, prawdopodobieństwo określonej liczby trafień „szóstki". Przypuśćmy również, że w danym tygodniu liczba trafień „szóstki" była większa niż można byłoby rozsądnie oczekiwać na podstawie tych obliczeń. Zdarzenie takie mogłoby oczywiście nasunąć podejrzenie, iż dokonano tu oszustwa (np. przez podrzucenie odpowiednio wypełnionych kuponów już po losowaniu), i ewentualnie ukierunkować poszukiwania władz śledczych, jednakże *nie mogłoby* stanowić dowodu rzeczowego w sądzie, w przypadku rozprawy o oszustwo w Toto-Lotku. Prawo bowiem nakazuje traktować oskarżonego do chwili zapadnięcia wyroku skazującego tak, jakby był on niewinny, a interpretować zdarzenia na jego niekorzyść uznając je za dowody rzeczowe dopiero wtedy, gdy nie ma innej możliwej interpretacji.

Tak np., jeżeli gracz w pokera uzyska, dajmy na to, w dziesięciu kolejnych rozdaniach karetę, można prywatnie uznać, że jest on oszustem na podstawie obliczenia znikomego prawdopodobieństwa takiego zdarzenia i odmówić dalszej gry z nim. Z prawnego punktu widzenia jednak, wynik taki stanowi jedynie (poważną) poszlakę, ale jednak nie dowód rzeczowy oszustwa; dla skazania owego gracza trzeba byłoby jeszcze schwytać go na gorącym uczynku.

6° Nawiasem mówiąc, dla grających w Toto-Lotka matematyka ma następującą radę (sformułowaną przez zmarłego niedawno Profesora Hugona Steinhausa): przy założeniu uczciwości losowań, można w prosty sposób zwiększyć swoją oczekiwaną wygraną, mianowicie obstawiając kombinacje jak najbardziej nietypowe, np. 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc., tj. takie, które są możliwie rzadko obstawiane przez innych grających. Prawdopodobieństwo trafienia „szóstki" jest takie same, jak i dla innych kombinacji, ale w przypadku trafienia nie trzeba się dzielić wygraną z wielką liczbą osób.

Wracając jeszcze raz do przykładu z losowaniem imion: jeżeli suma do podziału na nagrody jest stała, to Pafnucy jest w znacznie korzystniejszej sytuacji niż Jan.

Jeszcze raz dziękuję Panu za świadczący o Pana trosce o dobro społeczne list.

ROBERT BARTOSZYŃSKI