ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVII (1973)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

CZESŁAW RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław)

Prace Hugona Steinhausa o sytuacjach konfliktowych

Na początku chciałbym wyjaśnić, dlaczego mój referat ma taki, a nie inny tytuł. Posłużyłem się tu krótkim słownikowym określeniem, czym jest teoria gier (a przynajmniej jak tę nazwę rozumieją matematycy). Najprostsze wyjaśnienie jest takie, że jest to matematyczna teoria, opisująca rozmaite sytuacje konfliktowe. Ponieważ jednak różne prace prof. Steinhausa opisywały również takie sytuacje konfliktowe, które do ortodoksyjnej teorii gier nie należą, sądziłem iż lepiej będzie, gdy referat będzie mówił o badaniach nad sytuacjami konfliktowymi.

Przez wiele lat swej działalności naukowej i nauczycielskiej prof. Steinhaus zajmował się bardzo różnymi działami matematyki — działami życia — nawet tak można powiedzieć. Ale jest jeden temat — właśnie sytuacje konfliktowe, nad którymi pracował i do którego powracał w różnych okresach, począwszy od roku 1925, od pierwszej jego publikacji na ten temat; data ostatniej — rok 1969.

Ta pierwsza, z 1925 r., to praca niemal legendarna. Nazywała się *Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu*. Ukazała się w efemerycznym wydawnictwie studenckim — jednodniówce „Myśl Akademicka" we Lwowie. Po wojnie była ona nieosiągalna. Prof. Steinhaus chciał ustanowić, czy ustanowił nawet, nagrodę za odnalezienie jej odbitki.

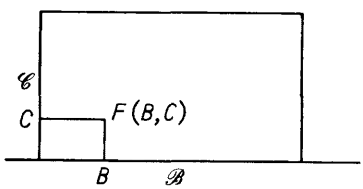
W roku 1957 profesor Ajdukiewicz przywiózł egzemplarz z biblioteki Uniwersytetu Lwowskiego i z tego egzemplarza zostały zrobione kopie fotograficzne. W roku 1960 poprzez Stanisława Ulama praca ta po przetłumaczeniu dotarła do Stanów Zjednoczonych i została tam opublikowana w piśmie fachowym zajmującym się sprawami morskimi: Naval Research Logistics Quaterly, poprzedzona wstępem Harolda W. Kuhna.

Jest to niewielka praca, nie mająca charakteru publikacji matematycznej; właściwie jest to parę uwag, ale uwag, które były na owe czasy rewelacją, uwag, które leżą u podstaw współczesnej teorii gier. Po pierwsze — zostało tam wprowadzone w sposób ścisły pojęcie *strategii* (co prawda pod inną nazwą — sposobu gry, ale przecież nie o nazwy tu chodzi). Drugim istotnym elementem jest tzw. *normalizacja gier*, i wreszcie: pojęcie funkcji wypłaty, która charakteryzuje każdą grę, oraz zasada wyboru strategii minimaksowej.

Pisząc to, profesor Steinhaus nie wiedział, że znany matematyk francuski Emil Borel parę lat wcześniej (mam tu na myśli jego prace z lat 1921 i 1924) doszedł do podobnych idei. Miał on już sprecyzowane pojęcia *strategii czystej* i *strategii mieszanej* i bliski był sformułowania i udowodnienia twierdzenia o minimaksie.

Niedługo potem, bo w 1926 r., ukazała się bardzo ważna praca J. von Neumanna, w której zostało to właśnie twierdzenie o minimaksie udowodnione. Jest to jedno z podstawowych twierdzeń teorii gier.

Zanim zdefiniują wyżej wymienione pojęcia, powiem co to są gry *normalne*, inaczej zwane prostokątnymi. Przypuśćmy, że mamy dwa zbiory: $\mathscr{B}$ (jak białe) i $\mathscr{C}$ (jak czarne). Będę się tu posługiwał tym modelem, o którym często mówił prof. Steinhaus — szachami. Gracze wybierają pewne punkty w tych zbiorach: $B \in \mathscr{B}$ i $C \in \mathscr{C}$, nazywane strategiami. Po niezależnym dokonaniu wyboru przez obydwu graczy odczytuje się wielkość wypłaty $F(B, C)$.



Wygodnie jest tu ustalić, że gdy gracz Biały wybrał strategię B, a Czarny — strategię C, to $F(B, C)$ jest kwotą, którą gracz Biały ma zapłacić Czarnemu (oczywiście może ona być też wielkością ujemną!). I teraz zasada wyboru strategii minimaksowej polega na wybraniu postępowania najbardziej wskazanego dla gracza Białego: co on powinien zrobić, aby ustrzec się przed niekorzystną dla niego wypłatą F; zatem przy wyborze B gracza Białego najgorszą dla niego możliwością jest największa z wszystkich wartości $F(B, C)$ przy $C \in \mathscr{C}$, czyli $\max_{C \in \mathscr{C}} F(B, C)$ — jest to największa kwota jaką on mógłby zapłacić, obierając jako swoją strategię B. Powinien więc się starać zmniejszyć tę szkodę w sposób optymalny, a więc wybrać taką strategię B, przy której to wyrażenie przyjmie wartość najmniejszą, czyli $\min_{B \in \mathscr{B}} \max_{C \in \mathscr{C}} F(B, C)$. To jest właśnie zasada wyboru strategii minimaksowej.

Proszę Państwa — gdybyśmy przeprowadzili podobne rozumowanie odwracając rolę tych graczy, a więc zaczynając od gracza Czarnego, to okazałoby się, że otrzymamy nierówność:

$$\min_{B \in \mathscr{B}} \max_{C \in \mathscr{C}} F(B, C) \geqslant \max_{C \in \mathscr{C}} \min_{B \in \mathscr{B}} F(B, C).$$

Profesor Steinhaus zastanawiał się nad nazwaniem dwu sytuacji, jakie tu mogą zaistnieć: w przypadku ostrej nierówności mówił, że gra jest otwarta, w przypadku równości — że jest zamknięta.

Terminologia ta przez długi czas była w Polsce używana. Obecnie mówi się w tej sytuacji o grach niezdeterminowanych i zdeterminowanych. Oczywiście jest to tylko różnica słowna.

Takie, jak opisałem przed chwilą, strategie nazywamy strategiami czystymi, są to decyzje deterministyczne. Ale można zmodyfikować tę grę, wprowadzając element rachunku prawdopodobieństwa. Przypuśćmy, że mamy pewną miarę probabilistyczną $\bar{B}$ na zbiorze $\mathscr{B}$ strategii gracza Białego i $\bar{C}$ na zbiorze $\mathscr{C}$. Mając miarę prawdopodobieństwa można posługiwać się podstawowym pojęciem rachunku prawdopodobieństwa, jakim jest wartość oczekiwania. Napiszę to od razu w ogólnej postaci, używając symbolu całki (w przypadku skończonym mamy zwykle sumy i można elementy analizy wyeliminować). Niech więc $\bar{F}$ będzie nową funkcją wypłaty:

$$\bar{F}(\bar{B}, \bar{C}) = \int\int F(B, C)\bar{B}(dB)\bar{C}(dC).$$

W ten sposób gra wyjściowa przekształca się w nową grę, w której wybory graczy nie są strategiami czystymi, lecz strategiami mieszanymi, czyli, jak mówimy, są to pewne rozkłady prawdopodobieństwa na zbiorach strategii czystych.

Twierdzenie minimaksowe von Neumanna mówi, że po takiej modyfikacji gra staje się grą zamkniętą, albo inaczej mówiąc, grą zdeterminowaną. To znaczy, że gdybyśmy utworzyli takie samo, jak poprzednio, wyrażenie dla nowej gry, to otrzymamy równość

$$\min_{\bar{B}} \max_{\bar{C}} \bar{F}(\bar{B}, \bar{C}) = \max_{\bar{C}} \min_{\bar{B}} F(\bar{B}, \bar{C}).$$

Fakt, że w niektórych sytuacjach konfliktowych wskazane jest wprowadzenie elementu losowego jest chyba intuicyjnie jasny dla wszystkich. Przypominam sobie, że w pewnej nowelce Conan Doyle'a Sherlock Holmes, walcząc z przemyślnym przeciwnikiem, w pewnym momencie wyjmuje monetę i losuje, który z dwu wariantów wybrać. Robi to, nie chcąc być zdekonspirowany przez, inteligentniejszego być może, wroga. Widzą więc Państwo, że nawet pisarz, bardzo daleki od spraw matematycznych, czuł potrzebę wprowadzenia elementu losowego. Zresztą osoby grające w różnego rodzaju gry — gry w potocznym tego słowa znaczeniu — wiedzą, że nie zawsze należy w identycznych sytuacjach postępować identycznie. W przybliżeniu oznacza to, że wprowadzamy w takich sytuacjach element probabilistyczny.

Twierdzenie von Neumanna miało bardzo wiele dowodów. Z praktycznego punktu widzenia bardzo ważne jest efektywne znajdowania strategii mieszanych, realizujących optymalne strategie. Jest to trudne zadanie numeryczne. Podawano również rozmaite dowody teoretyczne. Są dowody krótkie, ale używające silnych metod topologicznych, jak twierdzenie Brouwera; są też dowody elementarne. Jeden z uczniów prof. Steinhausa, Andrzej Zięba, podał taki elementarny dowód (1958 r.).

To, o czym poprzednio mówiłem, opisywało najprostszą sytuację konfliktową. W „oficjalnej" terminologii jest to gra dwuosobowa prostokątna z pełną informacją, o sumie zero. Powiedzenie, że gra ma sumę zero, oznacza, iż suma wypłat jest równa zeru (to co jeden gracz daje, idzie do kieszeni drugiego). W zagadnieniach

ekonomicznych rozpatruje się gry ogólniejsze — z dowolną skończoną liczbą graczy, a matematycy pozwalają sobie nawet na rozważanie gier z nieprzeliczalną ilością graczy. To jest już bardzo odległe od modeli realnych, ale z punktu widzenia teorii może potrzebne. W każdym razie twierdzenie von Neumanna o minimaksie zostało obecnie wchłonięte przez znacznie ogólniejsze twierdzenie Nasha o istnieniu punktu równowagi. W grach ekonomicznych, w których bierze udział wielu partnerów, jest to naturalne uogólnienie.

Teoria gier bardzo się rozwinęła i ma rozmaite zastosowania: oprócz ekonomii, w statystyce, teorii funkcji decyzyjnych itd. O tych problemach nie będę mówił. Mam nadzieję że referaty poświęcone kwestiom probabilistycznym i statystycznym te tematy uwzględnią. Chciałbym tylko powiedzieć, że prof. Steinhaus używał tu dość dziwnej, ale może uzasadnionej terminologii. Mianowicie w przypadku zagadnień, w których statystyk ma podjąć decyzję, mówił, że gra on z diabłem. A więc gra przeciwko naturze, którą w swoich pracach profesor żartobliwie nazywał diabłem. To zresztą ma swoją genezę w różnych legendach, w których mówi się właśnie o grze z diabłem.

Nie będę mówił tu o wszystkich pracach profesora Steinhausa o sytuacjach konfliktowych, np. nie będę mówił o pracach poświęconych problemowi dochodzenia ojcostwa (praca z pogranicza nauk prawniczych, genetyki i statystyki).

Chcę natomiast zasygnalizować, że teoria gier ma dwa nurty rozwoju. Jeden — aplikacyjny, w sensie zastosowań praktycznych, zastosowań do świata realnego (przede wszystkim w ekonomii), drugi — czysto teoretyczny. Okazało się bowiem, że pewne czysto teoretyczne dyscypliny matematyczne używają metod teorii gier. Chciałbym tu zacytować dwie stosunkowo nowe prace: Andrzeja Ehrenfeuchta, który zastosował metody teorii gier w badaniu sformalizowanych teorii matematycznych, oraz pracę amerykańskiego matematyka Blackwella, który udowodnił twierdzenie topologiczne o oddzielaniu zbiorów analitycznych zbiorami borelowskimi, powołując się na pewne wyniki z teorii gier. Jest to bardzo interesujące zjawisko, że teoria gier, początkowo zdawałoby się, tak odległa od teoretycznej matematyki dyscyplina, potrafiła dotrzeć do tak od niej odległych dziedzin.

Chciałbym jeszcze powiedzieć o bliższym potocznego rozumieniu słowa gra. Gry prostokątne, tak jak je tutaj opisałem, są już opracowaniem matematycznym. Gry zaczerpnięte z życia — takie jak szachy, warcaby, poker, gry strategiczne w wojsku — mają inny charakter. Są to tzw. gry pozycyjne. Polegają na tym, że uczestnicy wykonują kolejno ruchy, poddane określonym regułom. Powstaje w ten sposób rozgrywka, zwana partią i na podstawie reguł wiemy, w którym momencie ta partia się kończy i który z graczy wygrał (ewentualnie czy nastąpił remis).

Okazuje się (i to jest właśnie ta cenna uwaga, którą w owym artykule z 1925 r. uczynił prof. Steinhaus), że gry pozycyjne można zawsze zredukować do gier w postaci normalnej. Nie trzeba wtedy myśleć o poszczególnych ruchach dla graczy, bowiem określenie, co oznacza najlepszy ruch w danej sytuacji, jest bardzo trudne. Powstaje wówczas błędne koło: najlepszy ruch pierwszego gracza to taki, który da mu najwięcej korzyści nawet wtedy, gdy przeciwnik wykona najlepszą swoją

odpowiedź. A więc najlepszy ruch jednego gracza jest zdefiniowany przez najlepszy ruch drugiego. Uniknąć tego można, gdy się wprowadzi pojęcie strategii dla gier pozycyjnych. To jest po prostu zwężenie reguł, jakie sobie sam gracz dobrowolnie nakłada. A więc, zgodnie z ogólnymi zasadami, gracz zamiast wielu możliwości będzie wybierał tylko jedną. I szczegółowy przepis mówiący, którą z nich wybiera, to jest właśnie jego strategia. Widać z tego, że nawet dla takich gier stosunkowo prostych, jak szachy, których opis pozycyjny jest krótki, opisanie tej samej gry za pomocą pojęcia strategii i sprowadzenie jej do postaci normalnej jest trudne po prostu dlatego, że zbiór wszystkich strategii jest wprawdzie skończony, ale bardzo duży. Ale jest to w zasadzie możliwe i do rozważań teoretycznych bardzo potrzebne.

Z grami pozycyjnymi wiąże się bardzo ważna kwestia: okazuje się, że szeroką klasę gier pozycyjnych stanowią gry zamknięte. Jest to twierdzenie Zermeli, przez wiele lat chyba mało znane, które było udowodnione (a przynajmniej przedstawione) na V Kongresie Matematyków w Cambridge w 1912 r., a opublikowane w 2 lata później.

Twierdzenie to mówi, że gry pozycyjne (tzn. polegające na naprzemiennych ruchach graczy) z pełną informacją o przeciwniku i o skończonej długości partii, są zdeterminowane. Prof. Steinhaus twierdził — i chyba jest to słuszne — że większość szachistów nie zdaje sobie sprawy z tego, że gra w szachy jest zdeterminowana. W każdym razie jedyny dużej klasy szachista, który był matematykiem — mistrz świata Emanuel Lasker (napisał dość podłą książkę o grach) — z tego faktu chyba zupełnie sobie sprawy nie zdawał.

Pozwolę sobie teraz przytoczyć pewien wzór, który jest bardzo długi — ale który jest jednocześnie i zapisem i dowodem twierdzenia Zermeli. Jest to pomysł Jana Mycielskiego, który długo z prof. Steinhausem współpracował, a ta współpraca była szczególnie owocna w teorii gier.

Przypuśćmy, że dla dowolnego zbioru X zbiór P jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego parzystej ilości egzemplarzy zbioru X: $P \subset X^{2n}$. Niech

$$\varphi \equiv \bigvee_{a_1} \bigwedge_{b_1} \bigvee_{a_2} \bigwedge_{b_2} \dots \bigwedge_{b_n} \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, b_n \rangle \in P.$$

(Zbiór P jest pewnym zbiorem ciągów tej postaci, ciągów długości $2n$ elementów zbioru X.) Jeżeli taka sytuacja, jak opisana tym wzorem, zaistnieje, mówimy, że pierwszy gracz wygrał. P oznacza zbiór, na który gra gracz pierwszy. Wyrażenie φ mówi, że istnieje taki wybór pierwszego ruchu dla pierwszego gracza, przy którym po każdej odpowiedzi drugiego gracza istnieje drugi ruch pierwszego gracza itd., że wynik jest korzystny dla gracza pierwszego. A więc zdanie φ mówi, że pierwszy gracz ma strategię zwycięską. A teraz napiszemy negację tego zdania. Każda osoba znająca reguły logiki formalnej wie, że otrzymamy wyrażenie następujące

$$\neg\varphi \equiv \bigwedge_{a_1} \bigvee_{b_1} \bigwedge_{a_2} \bigvee_{b_2} \dots \bigvee_{b_n} \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, b_n \rangle \notin P.$$

Wyrażenie to, otrzymane przez zastosowanie reguł de Morgana, mówi, że gracz drugi ma strategię zwycięską — to znaczy, może on uniknąć tego, że ciąg będący wynikiem rozgrywki należy do niekorzystnego dlań zbioru P. A więc, jeśli gracz pierwszy nie ma strategii zwycięskiej, to ma ją drugi — mamy więc dowód twierdzenia Zermeli. Oczywiście trzeba być matematykiem, żeby zrozumieć że to, co tu jest napisane, można zastosować do takiej gry jak szachy. Trzeba do tego umieć zakodować grę w szachy w opisany wyżej schemat. To wymaga pewnych chwytów technicznych, ale są to trudności niewątpliwie drugorzędne.

Rzeczy, o których cały czas jest mowa, wiążą się ze wspomnianym na wstępie artykułem prof. Steinhausa w Myśli Akademickiej. W artykule tym omówiony jest jeszcze inny rodzaj gier — gier pościgowych. To był temat, który od dawna Profesora zajmował. Profesor Steinhaus interesował się głównie modelem pościgu morskiego — ścigania jednego statku przez drugi. Możliwe są tu zresztą najrozmaitsze uogólnienia. W omawianym artykule podane jest sformalizowanie problemu pościgu, przetłumaczonego na język minimaksu. Strategia w tym przypadku jest bardziej skomplikowana, jest nią pewne równanie różniczkowe — przepis, który na podstawie aktualnych położeń obu statków wskazuje kierunek pościgu (strategia dla ścigającego) lub kierunek ucieczki (strategia dla ściganego). Reguły tej gry, to podanie (przy założeniach pewnej regularności) prawych stron odpowiednich równań różniczkowych. Można teraz powiedzieć, że czas, po którym nastąpi schwytanie jest funkcją (a raczej funkcjonałem) tych strategii. Wobec tego to, co poprzednio było powiedziane, stosuje się również do takich gier, jak pościg. Zresztą gry pościgowe można uważać za ciągły wariant gier pozycyjnych. Główna trudność jednak polega na tym, że ruchy nie są wykonywane na przemian, tylko natychmiast każdy odpowiada na to, co zrobił przeciwnik. Są to matematycznie zagadnienia bardzo trudne. Myślę, że można je uważać za wyższy stopień komplikacji niż zagadnienia optymalnego sterowania. Bo zagadnienia optymalnego sterowania można uważać za grę jednoosobową — a tu jest 2 graczy o przeciwstawnych interesach — a więc mamy do czynienia z sytuacją konfliktową.

Chciałbym w tym miejscu przytoczyć nazwiska matematyków, którzy z inspiracji prof. Steinhausa zajmowali się pościgiem: Mycielski, Ryll-Nardzewski, Warmus, Zięba, Zubrzycki — gościnnie także Gustave Choquet, który wygłosił odczyt o teorii pościgu (Posiedzenie Wrocławskiego Oddziału PTM 1947). Sądzę, że mimo uzyskania pewnych rezultatów częściowych, teoria pościgu wymaga głębszego rozbudowania, dopiero pierwsze kroki zostały w niej zrobione.

A teraz ciekawostka, rzecz pozornie niepoważna, chociaż do rozwiązania jej trzeba było użyć poważnych środków. Interesowały prof. Steinhausa gry liczbowe. Jest taka publikacja wspólna z Bolesławem Gleichgewichtem i Jerzym Kucharczykiem (*Uwagi o grach liczbowych*, Zastosowania Matematyki 1960), w której zostało stwierdzone, że gry tego typu jak Toto-Lotek, Liczyrzepka, itd., są grami konfliktowymi: mianowicie interesy grających są przeciwstawne. I konsekwencje tego faktu: jak należy grać (ja do grania nie namawiam). Należy wybierać mało popularne kombinacje. Reguły gry są bowiem takie, że gdy wielu graczy obstawi tę samą

kombinację, to na tym tracą. Jakie kombinacje są mało popularne, to zostało częściowo w tej pracy zbadane.

Chciałbym na chwilę porzucić teorię gier i przejść do sprawy pewnego listu, który w 1944 r. prof. Steinhaus napisał do prof. Bronisława Knastera. Był to list dotyczący podziału pragmatycznego (termin zaproponowany chyba przez prof. Steinhausa). Wszyscy wiemy, jak należy postępować, gdy mamy „sprawiedliwie" podzielić pewien obiekt między dwie osoby: jeden dzieli, a drugi wybiera (prof. Steinhaus pisze, że tradycyjnie dzielił starszy, a wybierał młodszy). Problem polegał na tym, jak to postępowanie uogólnić na większą ilość osób. Zakładamy, że obiekt dzielony daje się podzielić na dowolnie małe części i że to ma być podział sprawiedliwy — przynajmniej w subiektywnym odczuciu każdej osoby. Komplikacja polega na tym, że ocena poszczególnych części tego przedmiotu przez różne osoby jest niejednakowa. Dla 3 osób rozwiązanie podał sam prof. Steinhaus. Inne rozwiązanie znalazła jego córka, pani Lidia Kottowa. Natomiast dla dowolnej liczby n uczestników rozwiązanie podali Bronisław Knaster i Stefan Banach. Spróbuję tu powiedzieć, na czym ta metoda polegała. W pewien sposób numeruje się uczestników podziału, np. w drodze losowania. Pierwszy z nich pokazuje na przedmiocie (mówmy o torcie — był to ulubiony przykład, o którym zawsze mówił prof. Steinhaus), ile sam chciałby wziąć. Drugi może się z tym zgodzić lub nie. Jeśli się zgadza, pytamy trzeciego itd. Jeśli wszyscy się zgodzą, to pierwszy bierze tę część, którą chciał — i zostaje podział reszty pomiędzy $n-1$ uczestników. Jeżeli ktoś się nie zgadza, to widocznie jest zdania, że pierwszy za dużo zażądał. Wobec tego powinien on sam zaznaczyć odpowiednio mniejszą część, która by go zadowoliła i byłaby, jego zdaniem zgodna z zasadą sprawiedliwego podziału. W ten sposób, po skończonej ilości kroków, tort zostanie podzielony i wszyscy będą musieli być zadowoleni, a przynajmniej nikt nie będzie miał podstaw do tego, aby mieć pretensje do pozostałych, a o to właśnie chodziło. To twierdzenie można przeformułować na język teorii miary. Takie przeformułowanie zrobił Stefan Banach. Niech X będzie obiektem dzielonym, a $m_1, \ldots, m_n$ — miarami taksującymi wartość części tego przedmiotu. A więc $m_1(Q)$ dla $Q \subset C$ jest wartością, jaką część Q przedmiotu X przedstawia dla pierwszego uczestnika podziału, itd. Zakładamy unormowanie, tj. przyjmujemy takie jednostki, aby miara całości była równa 1 dla każdego partycypanta. Banach udowodnił, że istnieje taki podział przedmiotu X na n części rozłącznych $X = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$, że wartości subiektywne tych części są jednakowe:

$$m_1(Q_1) = m_2(Q_2) = \ldots = m_n(Q_n) \geqslant 1/n.$$

Może w tym miejscu warto dodać, że w 1940 r. pojawiło się twierdzenie Liapunowa o miarach wektorowych, z którego wynika wyżej wymienione twierdzenie Banacha. Twierdzenie Liapunowa mówi, że gdy miary są bezatomowe (tzn. obiekt jest nieograniczenie podzielny) to zbiór wartości miary:

$$\{\langle m_1(Q), \ldots, m_n(Q)\rangle : Q \subset X\} \subset R^n$$

jest wypukły i domknięty.

Z podziałem pragmatycznym związany jest pewien, i ierozwiązany do dziś problem. Mianowicie problem podziału na części nierówne: z jakichś powodów uczestnicy nie są równouprawnieni — jednemu należy się mniej, a drugiemu więcej. Chyba wszyscy się zgodzimy, że taka sytuacja jest bardziej realna życiowo. Powstało pytanie — jak należy tego podziału dokonać (przy założeniu, że wiadomo ile się komu należy) — aby każdy z uczestników był, przynajmniej według swojej subiektywnej miary, zadowolony. Prof. Steinhaus zauważył, że dla części współmiernych odpowiedź jest pozytywna — dzielimy całość na większą ilość części, a następnie każdy uczestnik dostaje ich kilka (na przykład, jeśli pierwszemu należą się $\frac{2}{3}$ tortu, a drugiemu $\frac{1}{3}$ — to najpierw dokonujemy podziału na 3 części). Prof. Steinhaus postawił hipotezę, że w przypadku wielkości niewspółmiernych zadanie jest nierozwiązalne. Związana z tym jest pewna trudność — trudność w sformalizowaniu zagadnienia — co jest konieczne dla uzyskania rozwiązania negatywnego. Zaznaczam, że nie chodzi tu o rozwiązanie tego typu, jak w twierdzeniu Banacha (przychodzi arbiter, matematyk znający teorię miary i dzieli przedmiot na żądaną ilość części). Chodzi tu o przepis, na którego podstawie uczestnicy sami mogliby, w skończonej ilości kroków, dokonać podziału. A więc trzeba byłoby podać dokładną definicję, jakiego typu postępowania są dopuszczalne, a dopiero potem można próbować dowodzić, że takiego przepisu nie ma. Tej trudności nie ma przy szukaniu rozwiązań pozytywnych.

Problemem podziału sprawiedliwego prof. Steinhaus interesował się także przy okazji pewnych problemów spadkowych. W piśmie szwedzkim „Econometrica" w 1948 r. ukazał się artykuł, w którym Steinhaus pisał między innymi o podziale spadku, złożonego z przedmiotów niepodzielnych. Reguła jest bardzo naturalna. Polega na tym, że każdy ze spadkobierców taksuje przedmioty wchodzące w skład spadku. Te oceny są na ogół różne, bo subiektywne. Przedmiot otrzymuje ten ze spadkobierców, który ocenił go najwyżej, i spłaca pozostałych. W ten sposób wszyscy powinni być zadowoleni: każdy ze spłaconych otrzyma na ogół więcej niż się spodziewał.

Proszę Państwa, przy okazji omawiania problemów podziału chciałbym przytoczyć pewien cytat. W materiałach autobiograficznych prof. Steinhaus pisze: „Podział pragmatyczny nadaje się do rozstrzygania niektórych sporów międzynarodowych terytorialnych". Pozostaje tylko życzyć sobie, aby życie sprawdziło tę hipotezę.

Zagadnienia podziału, które nie są być może w ścisłym sensie zagadnieniami konfliktowymi, a którymi również bardzo interesował się prof. Steinhaus, to problemy z pogranicza geometrii i topologii. Praca, która ukazała się w 1945 r. w Fundamenta Mathematicae dotyczyła podziału zbiorów przestrzennych płaszczyznami i zbiorów płaskich kołami. Mając dane w przestrzeni 3 bryły dowolnie względem siebie położone — należało poprowadzić jedną płaszczyznę tak, ażeby z każdej bryły odciąć z góry zadaną część: na przykład 15% z pierwszej, 30% z drugiej, a z trzeciej — 78%. Prof. Steinhaus podał twierdzenie charakteryzujące, kiedy to zadanie jest rozwiązalne. Mianowicie jest to możliwe wtedy, gdy każda z tych brył daje się oddzielić

płaszczyzną od pozostałych. Oddzielić w sensie teorii miary — tzn. tak, by to, co pozostanie z danej bryły było zbiorem miary zero. Mówiliśmy tu o bryłach — w pracach była mowa o zbiorach mierzalnych miary Lebesgue'a skończonej w przestrzeni trójwymiarowej. Szczególnie jednak interesujący jest przypadek, gdy każdą z tych brył chcemy przepołowić. Wówczas założenie o separowalności jest niepotrzebne. To jest zagadnienie, które prof. Steinhaus sformułował dawniej, a które zostało nazwane „twierdzeniem o kanapce". Obrazowo prof. Steinhaus tak to sformułował: Mamy kanapkę złożoną z chleba, sera i szynki. Należy jednym cięciem noża podzielić ją na 2 części, tak, by ilości chleba, sera i szynki w obu częściach były jednakowe. Problem ten został pozytywnie rozwiązany przez Banacha w oparciu o pewne topologiczne twierdzenie dotyczące odwzorowań kół, a wiążące się z zagadnieniem antypodów.

Przejdźmy teraz do gier pozycyjnych nieskończonych. Mianowicie to, co mówiłem o twierdzeniu Zermeli, dotyczyło gier, w których długość każdej rozgrywki jest skończona (n było tam liczbą ruchów każdego gracza, a więc $2n$ było długością rozgrywki). Otóż łatwo można sobie wyobrazić (a przynajmniej może to zrobić każdy matematyk), że grę prowadzimy nieskończenie długo. To prowadzi do pewnych tylko komplikacji teorio-mnogościowych. Ale w zasadzie sytuacja jest podobna do opisanej poprzednio. Najprostszy schemat byłby taki: pierwszy gracz wybiera cyfrę 0 lub 1, a następnie drugi gracz wybiera jedną z nich, wiedząc jaki był wybór poprzednika, itd. Po przeliczalnej ilości kroków powstaje pewien ciąg zer i jedynek. Ciągi tego typu tworzą zbiór nazywany zbiorem Cantora $\boldsymbol{C}$. Jeśli w zbiorze Cantora jest wyróżniony pewien podzbiór $P \subset \boldsymbol{C}$, to podobnie jak poprzednio możemy powiedzieć, że gracz pierwszy gra na ten zbiór. To znaczy, jeżeli wynik rozgrywki — tej nieskończenie długiej — jest punktem zbioru P, tzn. $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \rangle \epsilon P \subset \boldsymbol{C}$, gdzie $\varepsilon_i = 0$ lub 1, to mówimy o wygranej gracza pierwszego, w przeciwnym przypadku wygrał drugi. Powstaje pytanie, czy istnieje strategia? I tu twierdzenie Zermeli nie funkcjonuje. Korzystając z pewnika wyboru już dawno pokazano, że istnieją takie zbiory P, dla których żaden z graczy nie ma strategii gwarantującej mu wygraną.

Takimi grami i grami podobnymi zajmowali się, chyba jako jedni z pierwszych, Banach i Mazur (są one nawet nazywane grami Banacha–Mazura).

Proszę Państwa — napiszę teraz pewną datę i nawet dzień tygodnia, ponieważ są to rzeczy nie bez znaczenia. Mianowicie dnia 25. X. 1960 na seminarium wtorkowym prof. Steinhaus wygłosił pierwszy komunikat (wspólny z Janem Mycielskim) anonsujący pojawienie się nowego aksjomatu Teorii Mnogości nazwanego przez autorów Aksjomatem Determinacji (AD). Jest to pewnik, który orzeka, że dla każdego zbioru $P \subset \boldsymbol{C}$ opisana wyżej gra jest zdeterminowana (tzn. jeden z graczy ma strategię zwycięską); nie ma absolutnych nakazów przyjmowania aksjomatu wyboru. Przyjęcie AD prowadzi tylko do innej Teorii Mnogości. Taka Teoria Mnogości (TM+AD) jest bardzo porządna, nie ma w niej rozmaitych patologii, które są konsekwencjami pewnika wyboru. A więc np. wszystkie zbiory na prostej są mierzalne w sensie Lebesgue'a i mają własność Baire'a. Co więcej konsekwencją

AD jest pewna słaba wersja pewnika wyboru — wybór z przeliczalnych rodzin zbiorów liczb rzeczywistych. Ta właśnie wersja jest potrzebna do uprawiania analizy klasycznej.

Aksjomat Determinacji nie był od razu ciepło przyjęty przez specjalistów od Podstaw Teorii Mnogości i logików. Wydawał im się może początkowo zbyt skomplikowany i wyrażony w języku bardzo dalekim od tego, jakim posługuje się Teoria Mnogości. Ale ostatnio sytuacja zmieniła się. Aksjomat Determinacji i różne jego warianty były bardzo wszechstronnie badane. Prac takich jest bardzo dużo. Na przykład Paris udowodnił, że dla zbiorów czwartej klasy Baire'a — zbiorów Z_4^0 — Aksjomat Determinacji może być udowodniony bez osobnego postulowania (początkowo udowodniono to dla zbiorów otwartych, potem dla zbiorów typu F_σ i G_σ). Ostatnio pewne nowe wyniki w tej dziedzinie uzyskał Kleinberg, jest to praca jeszcze nie opublikowana. I jeszcze jeden interesujący wynik związany z Aksjomatem Determinacji, wynik Martina. Można go zapisać krótko: $2\mathrm{MC} \to \mathrm{AD}(\Sigma_1^1)$: istnienie liczb kardynalnych mierzalnych pociąga zdeterminowanie wszystkich zbiorów analitycznych. Przypomnę tutaj, że 2MC oznacza postulat istnienia zbioru, na którego wszystkich podzbiorach określona jest miara nietrywialna, przeliczalnie addytywna, znikająca na punktach i przyjmująca wartości 0 lub 1. Prof. Steinhaus nazywał zajmowanie się takimi liczbami kardynalnymi „zajmowaniem się tym co wilkołaki jadają na śniadanie". Uważał, że tak duże liczby są w analizie niepotrzebne. Wynik, który zacytowałem, stanowi pewną polemikę z tym poglądem, z istnienia bowiem takich bardzo dużych liczb kardynalnych wynika, że już na poziomie zbioru Cantora pojawia się nowa własność zbiorów analitycznych.

Proszę Państwa — profesor Alexiewicz powiedział w swoim referacie, że wszyscy znają twierdzenie Banacha–Steinhausa. Wystarczy podać jego nazwę i każdy matematyk je sformułuje. Jest to dowodem doniosłości i popularności tego twierdzenia. Otóż jest jeszcze inne kryterium przyjęcia się i rozprzestrzenienia pewnych wyników naukowych. Mianowicie anonimowość. W pracy Kleinberga mówi się już tylko: Aksjomat Determinacji. Nie cytuje się pracy, w której został on wprowadzony, ani nie podaje się nazwisk autorów. Wydaje mi się, że ta anonimowość to jeszcze wyższa forma sławy niż rozpowszechnienie nazwiska autora.