ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVII (1973)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

KAZIMIERZ URBANIK (Wrocław)

Idee Hugona Steinhausa w teorii prawdopodobieństwa

Z wielu możliwych sposobów przedstawienia zasług Hugona Steinhausa dla teorii prawdopodobieństwa wybrałem taki, który można by nazwać historycznym. Przedstawię bowiem to co się działo w tej teorii przed Steinhausem i to co odkryto po Nim. W ten sposób wskażę współrzędne naukowe Jego idei, uwidocznię ich znaczenie i wielkość. Pokażę, jakie poglądy panowały dawniej w rachunku prawdopodobieństwa i jakie głoszone są dzisiaj, a dla uzyskania większego autentyzmu często będę udzielał głosu ludziom z różnych epok.

Zazwyczaj historyczne spojrzenie na zagadnienie doprowadza do tego, że zaczynamy nasze opracowanie od słów: już starożytni Grecy... I rzeczywiście, myśl o tym, że prawa przyrody realizują się poprzez układy zdarzeń losowych nie obca była filozofom Grecji starożytnej. To przecież twierdził propagator epikurejskiego materializmu Titus Lucretius Carus w *De rerum natura*. Indyjski statystyk P. C. Mahalanobis zwraca uwagę na to, że jakościowe koncepcje przypadku i prawdopodobieństwa zawarte są w istocie w religijnym kierunku syād czyli syādvāda rozwiniętym w VI wieku naszej ery, kierunku o siedmiu kategoriach logicznych badanych zjawisk ([13]). Mimo to, za początek nauki o prawach rządzących przypadkiem uważa się rok 1654, rok wymiany listów między Pascalem i Fermatem, w których rozważa się prawa rządzące rzutem kością i matematyczne szanse wygranej w grze w kości. A już w 1657 r. Ch. Huyghens ogłasza swój traktat *De rationiis in ludo aleae* poświęcony obliczeniom w grach hazardowych. W 1713 roku Jakub Bernoulli ogłasza słynne *Ars conjectandi*. Powoli wyłaniają się bardzo jeszcze niedoskonałe podstawowe koncepcje nowego rachunku — rachunku zdarzeń przypadkowych. Matematyczne pojęcie prawdopodobieństwa nie jest jeszcze jawnie określone w listach Pascala i Fermata. Huyghens zadowala się pojęciem „nadziei", czyli wartości oczekiwanej. Mówi on tak: „*Jeżeli ilość przypadków, w których wygrywam kwotę a jest równa p i ilość przypadków, w których wygrywam kwotę b jest q, przy czym wszystkie przypadki są jednakowo możliwe, to wartość mojej nadziei jest równa* $(ap+bq)/(p+q)$". Określenie prawdopodobieństwa występuje po raz pierwszy w *Ars conjectandi*. Według Bernoulliego „*prawdopodobieństwo to stopień przeświadczenia i odnosi się do pewnośc*

jak część do całości". Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przypadkowego to ilościowe ujęcie praw rządzących przypadkiem. Dla nas jest to jasne, ale 250 lat temu sytuacja nie była tak klarowna. Ówcześni oscylowali w swych poglądach od bezwzględnego potępienia i wyśmiania rachunku prawdopodobieństwa jako „największego kłamstwa na świecie" do wręcz mistycznego uwielbienia.

W XVIII wieku Abraham de Moivre i Pierre Simon de Laplace rozwijają i doskonalą analityczne metody rachunku prawdopodobieństwa. Laplace'owi zawdzięczamy tak zwaną klasyczną definicję prawdopodobieństwa, która mówi, że prawdopodobieństwo zdarzenia jest stosunkiem liczby sprzyjających przypadków do liczby wszystkich możliwych przypadków, przy czym przyjmuje się, że wszystkie przypadki są jednakowo możliwe. W 1812 roku Laplace ogłasza swój słynny traktat *Théorie analytique des probabilités*. Powoli rachunek prawdopodobieństwa wkracza do sal uniwersyteckich.

Początkowo gry hazardowe były jedynym konkretnym materiałem, na którego podstawie rozwijały się metody nowego rachunku. W miarę jednak upływu czasu daje o sobie znać ogólność matematyczna. Prawa formułowane dla gier hazardowych, a dotyczące takich czy innych konfiguracji rezultatów rzutów kością, dają się stosować do zjawisk demograficznych, takich jak zgony czy przyrost naturalny, które również podlegają przypadkowym fluktuacjom. W rzeczy czytanej na sesii literackiej Uniwersytetu Wileńskiego w 1817 r., a poświęconej rachunkowi losów, Jan Śniadecki tak mówi: „*Zamierzyłem sobie zastanowić uwagę Uniwersytetu nad rachunkiem matematycznym wcale u nas nie tkniętym i mało znanym, trudnym wprawdzie, ale pod wszystkimi względami niezmiernie ważnym, to jest nad rachunkiem losów (calculus probabilitatis), który nazwałem rachunkiem chybi-trafi. Lubo na pierwsze wejrzenie nic się nie zdaje tak śliskie, niestałe i od wszelkiej rachuby dalekie, jak to, co nazywawamy hazardem, losem, przypadkiem; głębsza atoli uwaga ukazuje nam, że to jest oscyllacya, czyli ustawiczne wahanie się trafów i chybień, to jest zdarzeń pomyślnych i niepomyślnych*". Dalej Śniadecki formułuje swe poglądy na rolę nowego rachunku. „*Pascal, który w roku 1654 najpierwszy nam pokazał to przystosowanie matematyki rozwiązawszy zadanie trzech graczów nie mogących gry kończyć i pytających się w jakiej proporcyi mają rozdzielić między sobą pulę, mówię, zapewne wtenczas nie pomyślał, do jak głębokich wynalazków i do jak rozległych w towarzystwie użycia to przystosowanie poprowadzi*". ... „*Rozumiano nasamprzód, że ta nauka prowadzi i zachęca do gry, co jest właśnie przeciwne temu, co się z niej pokazuje*"; i dalej pisze: „*Drugie użycie tego rachunku jest w obrachowaniu strat i zysków, nadziei i obawy w loteryach krajowych, które nazwać można wynalazkiem rządowej nieprawości... Trzecie użycie tego rachunku jest w obrachowaniu śmiertelności ludzkiej. Tu się rozwiązuje to ważne zadanie: Jakie jest prawdopodobieństwo trafu, że człowiek mający np. 30 lat, żyć jeszcze będzie taką a taką liczbę lat? Co nazywamy podobieństwem życia. Za fundament temu rachunkowi służą tablice tak nazwane śmiertelności, jaką najpierwszy ułożył astronom angielski Halley w roku 1693 z ludności, urodzin i pogrzebów miasta Wrocławia, jako miasta gdzie kilkakrotnie rejestra pokazały ludność jak w zastanowieniu, gdzie przy mniejszym zbytku i rozpuście bieg przyrodzenia po-*

rządniejszy". Miło mi przekazać te słowa i stwierdzić, iż przynajmniej w tej materii smuga cienia nie zalegała wówczas nad Wrocławiem.

„*Jakże można odważyć się mówić o prawach przypadku? Czyż przypadek nie jest antytezą wszelkiego prawa?*" Od tych słów zaczyna J. Bertrand swój *Calcul des probabilités*, wydany w 1889 r. Ta pozorna sprzeczność nęci. Sprawami przypadku zajmują się wielkie umysły epoki: Gauss, Laplace, Poisson, Czebyszew, Bertrand, Poincaré i Markow. Wzbogacili oni rachunek prawdopodobieństwa o nowe fakty, o nowe metody. Wskazali nowe kierunki zastosowań, ale nic nie zrobili w dziedzinie podstaw tego rachunku. Czym jest rachunek prawdopodobieństwa na przełomie XIX i XX wieków?

Już w drugiej połowie XIX wieku R. Clausius, J. C. Maxwell i L. Boltzmann rozwinęli kinetyczną teorię gazów. Pokazali oni, że takie makroskopowe fenomenogiczne pojęcia, jak ciśnienie, temperatura czy entropia, są statystyczną konsekwencją zderzeń molekuł znajdujących się w chaotycznym ruchu. Sprowadzono więc prawa termodynamiki do twierdzeń z rachunku prawdopodobieństwa. W 1902 r. J. Gibbs ogłasza swój słynny traktat *Elementary Principles in Statistical Mechanics* mający ogromny wpływ na dalszy rozwój fizyki teoretycznej. Jednocześnie rachunek prawdopodobieństwa uzyskał nowe odżywcze źródło problematyki badawczej i nową dziedzinę zastosowań. Czy wyjaśniło to przynajmniej w pewnej mierze naturę pojęcia prawdopodobieństwa? Oddajmy tu głos znakomitemu fizykowi Marianowi Smoluchowskiemu, który w pracy: *Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik* (Die Naturwissenschaften 17 (1918)) pisał: „*Różnorodne rozbiory filozoficzne pojęcia prawdopodobieństwa nie dają w tym względzie żadnego bliższego wyjaśnienia. W ogóle filozofowi chodzi tu zwykle o coś zupełnie innego niż fizykowi. Filozof kieruje swą uwagę przede wszystkim ku momentom subjektywnym psychologicznym idei prawdopodobieństwa, analizuje jej znaczenie gnoseologiczne, bada, w jaki sposób można by sądy prawdopodobne włączyć do systematu logiki formalnej obok sądów prawdziwych i fałszywych, ale nie ma zwyczaju rozważać bliżej zagadnienia, jakiego rodzaju obiektywne fakty leżą u podstaw sądów prawdopodobnych. W przeciwieństwie do tego, ścisłe przyrodoznawstwo interesuje się nie subiektywnymi wypowiedziami i domniemaniami, uprawnionymi bądź nie, interesuje się natomiast prawdopodobieństwem obiektywnym lub matematycznym*".

Po tym racjonalnym i krzepiącym matematyków na duchu stwierdzeniu następuje zakończenie podane w całkowicie odmiennej tonacji zawierające, jak byśmy dzisiaj powiedzieli marzenie o ukrytych parametrach: „*Wreszcie nie będzie zapewne zbędna uwaga, że z naszego sposobu pojmowania rzeczy nie wynika naturalnie, aby rachunek prawdopodobieństwa miał wartość nowej zasady badania, niezależnej od pozostałej wiedzy o przyrodzie gdyż stanowi on tylko upraszczającą schematyzację statystyczną pewnych związków funkcjonalnych, bardzo często występujących w świecie zjawisk fizycznych, a tak złożonych, iż dokładne ich badanie natrafia na wielkie trudności*".

Tak patrzyli na rachunek prawdopodobieństwa fizycy. Matematycy byli jeszcze bardziej krytyczni. We wstępie do wydanych w 1906 r. *Zasad Rachunku Prawdopo-*

dobieństwa — Wł. Gosiewski pisze: „*Od czasów Laplace'a nie uczyniono istotnego postępu w rachunku prawdopodobieństwa. Dopiero J. Bertrand w wykładach tego przedmiotu, mianych w Kolegjum Francuskiem w r. 1888 zrobił krok pierwszy, i to ujemny, bo wykazał tylko pewne słabe strony teoryi prawdopodobieństwa*". Stefan Mazurkiewicz w 1915 r. w *Poradniku dla Samouków* pisał: „*Ustalonej definicji prawdopodobieństwa, jako przedmiotu matematycznej teorii prawdopodobieństwa, dotychczas niema*".

Wróćmy do przełomu stuleci. W 1900 r. odbył się w Paryżu II Międzynarodowy Kongres Matematyków. Na tym Kongresie Dawid Hilbert miał odczyt zawierający nierozwiązane zagadnienia, których zbadanie, jego zdaniem, powinno stymulować dalszy rozwój matematyki. Od tego czasu przeszło prawie 3/4 wieku, a problematy Hilberta cieszą się nadal zainteresowaniem matematyków. Co więcej, rozwój idei i metod związanych z tymi problematami stanowi większą część osiągnięć dwudziestowiecznej matematyki.

Szósty problemat Hilberta dotyczył aksjomatyzacji tych fizycznych dyscyplin, w których matematyka odgrywa decydującą rolę, przede wszystkim teorii prawdopodobieństwa i mechaniki.

Warto podkreślić, że dla Hilberta rachunek prawdopodobieństwa jest częścią fizyki, a nie matematyki.

Pierwszą jeszcze bardzo niezdarną próbę aksjomatyzacji rachunku prawdopodobieństwa podjął w 1908 r. G. Bohlmann [2], W 1917 r. S. Bernstein w pracy [1] podał koncepcję oparcia podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa na relacji porządkującej zdarzenia według prawdopodobieństwa ich występowania. Jest to tak zwana jakościowa koncepcja prawdopodobieństwa rozwinięta później przez Koopmana i Gliwienkę.

Duży rozgłos szczególnie wśród niematematyków zyskała częstościowa koncepcja R. von Misesa idealizująca eksperyment statystyczny w ten sposób, że podstawą teorii są pojęcia kolektywu (ciągu losowego) i reguły wyboru podkolektywu. Prawdopodobieństwo jest tu częstością występowania zdarzenia w kolektywie ([14]). Intuicje leżące u podstaw koncepcji von Misesa są jasne, ale ich formalizacja daleka od norm obowiązujących matematykę XX wieku. Harald Cramér krytykując przeplatanie się empirycznych i matematycznych elementów w teorii von Misesa, porównuje zdefiniowane tam pojęcie prawdopodobieństwa z definicją w geometrii punktu jako granicy kredowych plam o malejących rozmiarach. Gwoli prawdy trzeba dodać, że sam Mises nie uważał rachunku prawdopodobieństwa za teorię matematyczną i bardzo niechętnie odnosił się do wszelkich prób formalizacji jego koncepcji.

Myśl o związku rachunku prawdopodobieństwa z teorią miary była głoszona już przez Borela. Ukazanie się jego rozprawy [3] to początek ery współczesnej w teorii prawdopodobieństwa. Idee probabilistyczne przeniesione w klasyczną dziedzinę liczb rzeczywistych dają paradoksalne, a przez to niezwykle interesujące rezultaty. Takim jest na przykład wynik Borela głoszący, iż prawie każda liczba rzeczywista z przedziału (0, 1) ma asymptotycznie jednakową liczbę zer i jedynek w swym roz-

winięciu dwójkowym. Zamiast rozwinięcia dwójkowego można wziąć rozwinięcie względem dowolnej bazy. Okazuje się, że wówczas prawie każda liczba ma identyczną frekwencję cyfr w tym rozwinięciu. To prowadzi do pojęcia liczby absolutnie normalnej, która w każdej bazie ma jednostajny rozkład cyfr w swym rozwinięciu. Prawie każda liczba jest absolutnie normalna. Ale, jak to często bywa w matematycznej praktyce, niełatwo podać efektywny przykład takiej liczby. Pierwszy zrobił to W. Sierpiński w 1917 r. Innym przykładem liczby absolutnie normalnej jest liczba zapisana w układzie dziesiętnym

$$0{,}12345678910111213141516171819202122 23\ldots,$$

gdzie po przecinku wypisujemy kolejno wszystkie liczby naturalne. Oczywiście dowód tego faktu wcale nie jest banalny.

Zetknięcie się koncepcji probabilistycznych z koncepcjami mnogościowymi i miarowymi i sukcesy tego mariażu na pewno były jedną z przyczyn zainteresowania się matematyków rachunkiem prawdopodobieństwa i jego podstawami. Starałem się również przekonać Czytelników o tym, jak skomplikowane i rozbieżne były poglądy na istotę prawdopodobieństwa, jak trudny był proces formalizacji rachunku prawdopodobieństwa w latach dwudziestych naszego stulecia.

W 1923 r. wychodzi czwarty tom Fundamenta Mathematicae, a w nim znajdują się dwie prace: Antoniego Łomnickiego: *Nouveaux fondements du calcul des probabilités* i Hugona Steinhausa: *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure* (prace [12] i [18]). Prace te to półmetek, to istotny postęp w wielowiekowym dziele ugruntowania rachunku prawdopodobieństwa na solidnych matematycznych podstawach. Łomnicki na gruncie miarowo-mnogościowych pojęć precyzuje pojęcia zdarzeń elementarnych, zdarzeń losowych i prawdopodobieństwa jako miary określonej na zdarzeniach losowych. Interpretuje te pojęcia na dostępnych mu wówczas przykładach. Dzisiejszy czytelnik pracy Łomnickiego przy całym uznaniu jego trudu odczuwa pewien niedosyt. Tak istotne dla teorii prawdopodobieństwa pojęcie niezależności, pojęcie, które wyodrębnia teorię prawdopodobieństwa z teorii miary, nie jest w jego rozprawie omówione. Brak też uściślenia takich pojęć, jak zmienna losowa czy wartość oczekiwania. Zrobi to dopiero Andrzej Kołmogorow gruntując aksjomatyczne podstawy teorii prawdopodobieństwa. Wróćmy jednak do czwartego tomu Fundamenta Mathematicae. Hugo Steinhaus w swej pracy w naturalny sposób pokazał jak szczególny, ale niezmiernie ważny przypadek nieklasycznego systemu probabilistycznego, a mianowicie nieskończony ciąg rzutów monetą, można sformalizować poprzez przyporządkowanie ciągom rezultatów rzutów, które bez zmniejszenia ogólności można uważać za ciągi zero-jedynkowe liczb rzeczywistych z odcinka (0, 1), a raczej ich rozwinięć dwójkowych. Przy tej operacji zdarzenia losowe przechodzą na zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a, a prawdopodobieństwo na miarę Lebesgue'a. Jest to pełna matematyzacja nieskończonej gry w orła i reszkę. Pozwala ona na przekład problematów probabilistycznych na język teorii miary i teorii funkcji rzeczywistych, a więc na język dobrze już roz-

winiętych teorii matematycznych. I tak na przykład zagadnienie Steinhausa–Wienera o wyznaczeniu prawdopodobieństwa tego, że szereg liczb rzeczywistych

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm c_k$$

ze znakami wybieranymi niezależnie z jednakowym prawdopodobieństwem 1/2 jest zbieżny sprowadza się, jak to zauważył Steinhaus, do znalezienia miary Lebesgue'a zbioru tych liczb t, dla których jest zbieżny szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k(t),$$

gdzie r_k są funkcjami Rademachera:

$$r_k(t) = \operatorname{sign}(\sin 2^k \pi t).$$

Główny rezultat polega na tym, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k(t)$ jest zbieżny albo rozbieżny prawie wszędzie w zależności od tego, czy $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ jest zbieżny, czy też rozbieżny. Funkcje Rademachera są przykładem ciągu funkcji niezależnych, a więc steinhausowską formalizacją ciągu niezależnych zmiennych losowych. Steinhaus docenił rolę pojęcia niezależności w swych badaniach. Owocem tych badań prowadzonych wraz z uczniami, przede wszystkim z Markiem Kacem, jest seria prac ogłoszonych w Studia Mathematica pod wspólnym tytułem *Sur les fonctions indépendantes*. Pierwsza część, której autorem był Mark Kac, ukazała się w szóstym tomie Studia Mathematica w roku 1936, a ostatnia, dziesiąta część, której autorem był Hugo Steinhaus, w trzynastym tomie w 1953 r. Do spraw poruszonych w tej serii prac jeszcze wrócę.

Wspominając lwowski okres w referacie wygłoszonym na VIII Zjeździe Matematyków Polskich w Warszawie w 1953 r., a w szczególności proces matematyzacji rachunku prawdopodobieństwa, Hugo Steinhaus z goryczą mówił: „*Kilkakrotnie zdarzało się, że najnowocześniejsze idee tej nauki zakwitały u nas, ale na krótko, i nigdy nie doszło do stworzenia silnej szkoły. Przyczyny były dwojakie. Siła atrakcyjna szkoły warszawskiej wciągała w orbitę znaczną część młodych matematyków i czyniła ich obojętnymi na wszystko, co nie było teorią mnogości; drugą przyczyną, która zaczęła działać dopiero później, była niewyraźna sytuacja polityczna kraju, która w 1939 roku zamieniła się w klęskę*".

Pełna matematyzacja rachunku prawdopodobieństwa dokonana została w 1933 r. w fundamentalnej pracy Andrzeja Kołmogorowa: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [11]. Zawarte jest w niej rozszerzenie idei Hugona Steinhausa: od ciągów rzutów monetą przechodzi się do dowolnych zdarzeń losowych, a miarę Lebesgue'a zastępuje dowolna miara unormowana. Kołmogorowska trójka: przestrzeń zdarzeń elementarnych, σ-ciało zdarzeń losowych i miara — prawdopodobieństwo staje się ogólnie przyjętym matematycznym schematem układów losowych.

Głębokie znaczenie wyniku Kołmogorowa polega także na uchwyceniu paraleli między niezależnością stochastyczną a produktowaniem kartezjańskim. To podstawowe pojęcie, które jak wspomniałem, wyodrębnia teorię prawdopodobieństwa z teorii miary uzyskało wreszcie swą mnogościowo-miarową interpretację. Szóste zagadnienie Hilberta w swej części dotyczącej rachunku prawdopodobieństwa zostało rozwiązane. Stosując terminologię sportową należałoby powiedzieć, że finał należał do Kołmogorowa, ale dwóch matematyków polskich Hugo Steinhaus i Antoni Łomnicki doszło do półfinału. Wartość tego wyczynu jest tym większa, że byli oni wraz z Wacławem Sierpińskim i Andrzejem Mostowskim (których prace przyczyniły się do rozstrzygnięcia pierwszego zagadnienia Hilberta — cantorowskiej hipotezy continuum) — jedynymi uczonymi polskimi, których wkład w rozwiązanie problematów Hilberta liczy się w matematyce światowej.

W 1969 r. ukazało się rosyjskie tłumaczenie [15] pamiętnego odczytu Dawida Hilberta zaopatrzone w aktualne komentarze. W komentarzu do szóstego problematu Borys Gniedenko tak pisze: „*Aksjomatyka przedstawiona przez A. N. Kołmorogowa, opierająca się na koncepcjach teorii mnogości i teorii miary z logicznego, czy też z filozoficznego punktu widzenia nie jest ani jedyną możliwą, ani też bardziej doskonałą od innych. Jej sukces wyjaśnia wiele przyczyn, wśród których wspomnimy o następującej: Odpowiadała ona ogólnemu duchowi tamtych czasów, ściśle wiązała teorię prawdopodobieństwa z metryczną teorią funkcji i tym samym odkryła przed nią bogaty arsenał dobrze rozwiniętych metod badawczych, pozwoliła ująć w jeden prosty schemat nie tylko klasyczne działy teorii prawdopodobieństwa, ale też aktualnie rodzące się jej pojęcia i zagadnienia*". Na zakończenie zaś tego komentarza B. Gniedenko stwierdza „*Jest rzeczą całkowicie jasną, że żywa matematyczna dyscyplina* (ma tu na myśli teorię prawdopodobieństwa) *z tak niezwykle rozległymi powiązaniami z wszystkimi dosłownie dziedzinami wiedzy zawsze będzie wymagać dokładnego zbadania jej podstaw i to z różnych pozycji. I bez względu na to, jak dobrze są ugruntowane jej aksjomatyczne podstawy, dopóki trwa jej rozwój, dopóty będą kontynuowane poszukiwania innych sposobów jej logicznego uzasadnienia*". Probabilistyka naszych dni jest dowodem głębokiej słuszności tej oceny. Rozwój matematyki i innych dziedzin, w których znajduje ona zastosowanie, przyczynia się do nowego spojrzenia na sprawy, które wydawałoby się są już dawno załatwione. Przypatrzmy się kilku takim nowym tendencjom, z których jedna jest wyraźną kontynuacją idei Hugona Steinhausa.

Muszę w tym miejscu dodać, że Steinhaus, tak jak i inni uczeni budujący matematyczne podstawy teorii prawdopodobieństwa, odczuwał pewien niedosyt. Trójka kołmogorowska, a w szczególności prawdopodobieństwo jako unormowana miara abstrakcyjna, nie miały tych intuicji, które tkwią w praktycznych zastosowaniach. To tłumaczy Jego poszukiwania innych dróg matematyzacji probabilistycznych koncepcji, to również tłumaczy podobne poszukiwania Kołmogorowa.

Koncepcja rozkładu jednostajnego na prostej nie mieści się w ramach kołmogorowskiej teorii prawdopodobieństwa, a jest bardzo użyteczna w wielu zagadnieniach fizyki, statystyki, teorii łańcuchów Markowa czy probabilistycznych zastosowań

w teorii liczb i analizie. Wprawdzie już A. N. Kołmogorow miał nieopublikowane pomysły formalizacji tych koncepcji, ale dokonał tego Alfred Rényi w 1954 r. [14] wprowadzając pojęcie warunkowej przestrzeni probabilistycznej złożonej z przestrzeni zdarzeń elementarnych, σ-ciała zdarzeń losowych, rodziny warunków i prawdopodobieństwa warunkowego. W prostych ale nieklasycznych przypadkach jest ono indukowane przez miarę nieskończoną na całej przestrzeni zdarzeń elementarnych. W szczególności uzyskuje się w ten sposób formalizację rozkładu jednostajnego na prostej jako prawdopodobieństwa warunkowego indukowanego przez miarę Lebesgue'a na prostej.

By omówić drugi kierunek koniecznych uogólnień rachunku prawdopodobieństwa przypomnijmy najpierw, że w swej kołmogorowskiej postaci jest on matematycznym modelem klasycznej mechaniki statystycznej. Istotnie, przestrzeń zdarzeń elementarnych to przestrzeń fazowa rozpatrywanego układu fizycznego. Niech S będzie σ-ciałem zdarzeń losowych. Fizyczną interpretację rodziny S uzyskujemy następująco: funkcje S-mierzalne na przestrzeni fazowej to wielkości fizyczne. Szczególnie prostymi wielkościami fizycznymi związanymi z rozpatrywanym układem fizycznym są indykatory zbiorów S-mierzalnych. Opisują one własności systemu w zero-jedynkowym języku logiki formalnej. Wyznaczają również matematyczną strukturę całej rodziny wielkości fizycznych. Jest rzeczą oczywistą, że rodzinę indykatorów zbiorów S-mierzalnych można utożsamić z σ-ciałem S. W fizyce nazywa się ono logiką układu fizycznego. Stan układu fizycznego to rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni fazowej. Matematyczny model klasycznej mechaniki statystycznej, to używając języka fizycznego, przestrzeń fazowa, logika i stan, co w przekładzie na język rachunku prawdopodobieństwa daje, jak to pokazaliśmy, trójkę Kołmogorowa: przestrzeń zdarzeń elementarnych, σ-ciało zdarzeń losowych i miarę-prawdopodobieństwo. Stąd już krok do współczesnego opisu rozpatrywanej sytuacji za pomocą pary; logiki będącej σ-algebrą Boole'a i stanu będącego miarą unormowaną na tej logice. Jednym z pomostów między tymi dwoma ujęciami jest twierdzenie Sikorskiego–Loomisa o reprezentacji σ-algebr Boole'a.

Efekty kwantowe, a w szczególności zasada nieoznaczoności Heisenberga powodują to, że boolowska logika nie jest możliwa do przyjęcia w mechanice kwantowej. Zastępuje się ją przez logikę będącą σ-kratą z orto-uzupełnieniem, spełniającą dodatkowy warunek mówiący o istnieniu orto-uzupełnienia w b elementu a zawartego w b. Poza oczywiście σ-algebrą Boole'a typowymi przykładami są tu tak zwane standardowe logiki podprzestrzeni ośrodkowej, nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta. One to służą do opisu kwantowej mechaniki. Stanami w niej są funkcje przeliczalnie addytywne na ortogonalnych elementach logiki unormowane na elemencie maksymalnym. Są to kwantowe odpowiedniki rozkładów prawdopodobieństw. Ich badanie jest treścią tak zwanego niekomutatywnego rachunku prawdopodobieństwa. Na podstawie twierdzenia Gleasona [4] stany w mechanice kwantowej czyli kwantowe miary probabilistyczne są nieujemnymi, samosprzężonymi operatorami o jednostkowym śladzie. W kwantowej teorii pola występują niestandardowe logiki związane z algebrami von Neumanna. Niekomutatywny rachunek

prawdopodobieństwa w najbliższej przyszłości przyciągać będzie z całą pewnością zainteresowanie wielu badaczy i dostarczy nam nowych informacji o prawach rządzących przypadkiem w mikroświecie.

Rozwinięta w ostatnich latach teoria informacji znalazła szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i praktyki. Pierwsza definicja informacji w całej swej ogólności była dana przez C. E. Shannona w 1948 r. ([17]). Shannonowskie podejście jak i wiele innych opierało się na teorii prawdopodobieństwa i prowadziło do wzoru na informację

$$H = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k,$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jest rozkładem prawdopodobieństwa rozpatrywanego systemu losowego. Wzór ten był adaptowany przez Shannona ze statystycznej fizyki, gdzie przedstawiał entropię systemu. Z intuicyjnego punktu widzenia informacja wydaje się prostszym pojęciem dającym jedynie globalny opis badanego systemu w przeciwieństwie do rozkładu prawdopodobieństwa, który jest kompletną charakterystyką systemu losowego. Innymi słowy, informacja jest czymś pierwotniejszym od prawdopodobieństwa. Dlatego też winna być zdefiniowana bez użycia pojęcia prawdopodobieństwa, i co więcej, sama powinna definiować prawdopodobieństwo. Zadanie to w pewnej mierze było w 1961 r. rozwiązane przez R. S. Ingardena i przeze mnie ([5]), a także w inny sposób przez J. Kampé de Feriet w 1970 r. ([10]). Niektóre z aksjomatów tam użytych nie mają zbyt prostej intuicyjnej interpretacji. Wydaje mi się, że takie intuicyjne określenie informacji jest jednak możliwe. Ostatnio na *European Meeting of Statisticians* w Budapeszcie (wrzesień 1972) przedstawiłem koncepcję określenia pojęcia informacji za pomocą bardzo intuicyjnych własności bez użycia pojęcia prawdopodobieństwa. A oto one: 1° prawo złożonego wyboru 2° lokalny charakter informacji, 3° prawo nierozróżnialności systemów informacyjnie równoważnych i 4° prawo wzrostu informacji. Co więcej, poza zdegenerowanymi przypadkami tak określona informacja wyznacza prawdopodobieństwo jednoznacznie. A zatem można przyjąć informację za pojęcie pierwotne, a prawdopodobieństwo za wtórne. Daje to możliwość innego spojrzenia na pojęcie prawdopodobieństwa ([24]).

Przy wszystkich swych niedostatkach częstościowa koncepcja von Misesa ciągle przyciągała uwagę badaczy. Nie zrezygnowano z matematycznego uzasadnienia tej koncepcji. W pracy *On tables of random numbers* ogłoszonej w 1963 r. w Sankhya A. N. Kołmogorow podejmuje niezwykle interesującą próbę oparcia pojęcia skończonego ciągu losowego na pojęciu złożoności, będącym formalizacją procesu generowania ciągu przez maszyny cyfrowe. Złożoność ciągu y przy danym ciągu wyjściowym x przy użyciu maszyny A jest to długość najkrótszego programu, przy którym maszyna A daje y z x. Z grubsza mówiąc, ciągi losowe są to ciągi o maksymalnej złożoności. Przyporządkować im można odpowiednik frekwencji czyli praw-

dopodobieństwa. Per Martin-Löf rozszerzył te badania na ciągi nieskończone. W ten sposób idea von Misesa znalazła swe matematyczne wcielenie. Pomysły te wiążą się ideowo z wcześniej zainicjowanymi przez Hugona Steinhausa konstrukcjami tablic liczb imitujących liczby przypadkowe: tablic liczb tasowanych czy też liczb złotych.

Mówiłem już o roli serii prac *Sur les fonctions indépendantes* ogłaszanej w Studia Mathematica. W czwartej z nich dokonane jest przejście z odcinka (0, 1) z miarą Lebesgue'a na prostą lub półprostą z miarą relatywną:

$$|E|_R = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |E \cap \{t: 0 \leqslant t \leqslant T\}|.$$

Wtedy to narodziła się myśl o zastąpieniu pojęcia prawdopodobieństwa lub jak kto woli interpretowaniu tego pojęcia jako miary relatywnej. W pracy *Rachunek prawdopodobieństwa jako narzędzie badań w przyrodoznawstwie i produkcji* Hugo Steinhaus pisze: „*To spostrzeżenie prowadzi do nowej interpretacji rachunku prawdopodobieństwa; przez zadanie zmiennej pomocniczej roli czasu można zastosować twierdzenie rachunku prawdopodobieństwa do niektórych modeli mechanicznych, odbierając im zupełnie charakter losowy. Łatwo pokazać na przykładzie pudełka sześciennego, w którym rój punktów materialnych odbija się od ścian według klasycznego prawa równych kątów. Otrzymuje się wyniki dotyczące ekwipartycji cząstek i ruchu środka masy, które nie różnią się wcale od tych, które daje rachunek prawdopodobieństwa, a jednak są zupełnie inaczej uzasadnione: klasyczne rozwiązanie zadania opiera się na postulatach, które ani matematycznie, ani mechanicznie nie dadzą się dowieść, natomiast tutaj operuje się tylko analizą matematyczną i własnościami ruchu bez sił zewnętrznych, a zamiast prawdopodobieństwa zjawisk otrzymuje się ich frekwencję czasową*". Nazwałbym to ergodycznym poglądem na prawdopodobieństwo, czyli jego zastępowaniem przez średnie czasowe. Oznaczając przez $f(I)$ przyrost funkcji f w przedziale I, przez $I+t$ przesunięcie przedziału I o t, nazwiemy funkcję f *efektywnym procesem w sensie Steinhausa* o przyrostach niezależnych, gdy

$$\Big|\bigcap_{j=1}^{n} \{t: f(I_j+t) < x_j\}\Big|_R = \prod_{j=1}^{n} |t: f(I_j+t) < x_j\}|_R.$$

dla każdego układu przedziałów rozłącznych $I_1, I_2, \ldots, I_n$ oraz dla każdego układu liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dystrybuantą procesu nazywa się funkcja

$$D_I(x) = |\{t: f(I+t) < x\}|_R.$$

Z twierdzenia ergodycznego Birkhoffa wynika, że prawie każda realizacja jednorodnego procesu stochastycznego o przyrostach niezależnych jest efektywnym procesem w sensie Steinhausa. I tu powstaje problemat analogiczny do efektywnego wskazania liczb absolutnie normalnych: podać efektywny przykład efektywnego procesu w sensie Steinhausa. Dla efektywnego procesu Poissona, to jest procesu o dystrybuancie

$$D_I(x) = \sum_{j<x} e^{-|I|} \frac{|I|^j}{j!}$$

Hugo Steinhaus i ja w pracy [23] podaliśmy efektywny przykład oparty na własnościach arytmetycznych. Okazuje się, że funkcja niemalejąca o skokach jednostkowych w punktach

$$s_n = -\log \prod_{j=1}^{n} (1-a_j) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gdzie

$$a_j = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j^k}{3^{3^k}} \right\rangle \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

oraz $\langle x \rangle = x - [x]$, ma względem miary relatywnej te same własności co proces Poissona względem prawdopodobieństwa.

Dla dowolnych rozkładów D_I uzyskałem efektywne przykłady w pracy *Effective processes in the sense of H. Steinhaus* ogłoszonej w Studia Math. w 1958 r. Tę problematykę zainicjowaną przez Hugona Steinhausa, dającą spojrzenie na koncepcję prawdopodobieństwa, należy uważać za początki teorii modelowania, teorii stymulowanej przez rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej i zastosowania metody Monte Carlo. Stanowi ona również wymowny przykład steinhausowskiej umiejętności i pasji wiązania idei matematycznej z realnym światem. W hołdzie dla tej idei pozwolę sobie zakończyć swój artykuł słowami Hugona Steinhausa: „*Ludzie chodzą po poradę do lekarzy, nie chodzą do matematyków. Czy chodziliby do lekarzy, gdyby były tylko wykłady medycyny a nie było szpitali, klinik i aptek, gdyby byli profesorowie medycyny lub nauczyciele higieny, ale nie było nikogo, co umie zbadać chorego i zapisać mu lekarstwo? Dopóki nie będzie matematyków-praktyków, to jest ludzi przyuczonych i przyzwyczajonych do udzielania porad matematycznych, i dopóki w każdej fabryce, w każdym biurze, urzędzie, banku czy też dyrekcji kolei nie będzie wiadomo, gdzie leczą choroby matematyczne, dopóty cała dydaktyka niższa i wyższa nie da rezultatu*".

Prace cytowane

[1] S. Bernstein, *Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей*, Сообщения Харковского математического общества 15 (1917), str. 209-274.

[2] G. Bohlmann, *Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung*, Atti del IV Congresse internazionale dei Mathematici, Roma, 6-11 Aprile 1908, vol. III, Secione 11 b, 1909.

[3] E. Borel, *Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rendiconti Circ. Mat. Palermo, 27 (1909), str. 247-271.

[4] A. M. Gleason, *Measures on closed subspaces of a Hilbert space*, Journal of Mathematics and Mechanics 6 (1957), str. 885-894

[5] R. S. Ingarden and K. Urbanik, *Information without probability*, Colloquium Mathematicum 9 (1961), str. 131-150.

[6] M. Kac, *Sur les fonctions indépendantes* (I), *Propriétés générales*, Studia Math. 6 (1936), str. 46-58.

[7] M. Kac and H. Steinhaus, *Sur les fonctions indépendantes* (II), *La loi exponentielle; la divergence de séries*, Studia Math. 6 (1936), str. 59-66.

[8] — *Sur les fonctions indépendantes.* (III), *Le mouvement brownien, la loi de Maxwell*, Studia Math. 6 (1936), str. p. 89-97.

[9] — *Sur les fonctions indépendantes.* (IV), *Intervalle infini*, Studia Math. 7 (1938), str. 1-15.

[10] J. Kampé de Feriet, *Mesure de l'information fournie par un événement, Les probabilités sur les structures algébraiques*, 1970, str. 191-221.

[11] A. Kołmogorow, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1933.

[12] A. Łomnicki, *Nouveaux fondements du calcul des probabilités*, Fundamenta Mathematicae 4 (1923), str. 34-71.

[13] P. C. Mahalanobis, *The foundations of statistics*, Sankyā, The Indian Journal od Statistics 18 (1957), str. 183-194.

[14] R. von Mises, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Zeitschrift 5 (1919), str. 52-99

[15] *Проблемы Гильберта*, Москва 1969.

[16] A. Rényi, *Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Bericht über die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik. VEB, 1954, str. 7-15

[17] C. E. Shannon, *The mathematical theory of communication*, The Bell System Techn. J. 27 (1948), str. 379-623

[18] H. Steinhaus, *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la measure*, Fund. Math. 4 (1923), str. 286-310.

[19] — *Sur les fonctions indépendantes* VI, *Equipartition*, Studia Math. 9 (1940), str. 121-132.

[20] — *Sur les fonctions indépendantes* VII, *Un essaim de points à l'intérieur d'un cube*, Studia Math. 10 (1948), str. 1-20

[21] — *Sur les fonctions indépendantes*, VIII, *Loi des grandes nombres, suites indépendantes, suites aléatoires*, Studia Math. 11 (1950), str. 133-144.

[22] — *Sur les fonctions indépendants* X, *Equipartition de molécules dans un récipient cubique*, Studia Math. 13 (1953), str. 1-17.

[23] — and K. Urbanik, *Poissonsche Folgen*, Mathematische Zeitschrift 72 (1959), str. 127-145.

[24] K. Urbanik, *On the concept of information*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série des sci. math. astr. et phys. 20 (1972), str. 887-890.