ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVII (1973)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

J. ŁUKASZEWICZ (Wrocław)

Rola Hugona Steinhausa w rozwoju zastosowań matematyki

Przed miesiącem, w Lublinie, delegaci wszystkich oddziałów zebrani na Walnym Zgromadzeniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego powzięli jednomyślną uchwałę, mocą której ustanowionej ostatnio dorocznej nagrodzie Towarzystwa za prace z zastosowań matematyki nadane zostało imię Hugona Steinhausa. Uchwała ta była wyrazem powszechnego uznania zasług, jakie położył Steinhaus w rozwoju zastosowań matematyki. W programie naszej sesji mnie przypadło w udziale udokumentowanie tych zasług.

Nie łatwe to jest zadanie, bo spośród przeszło 200 pozycji spisu publikacji naukowych Steinhausa połowa dotyczy zastosowań matematyki. Mogę wprawdzie przyjąć, że pewne pozycje zostały już, lub jeszcze będą omówione przez innych prelegentów, ale bogactwo tematyczne innych przekracza jeszcze znacznie dopuszczalne rozmiary jednego referatu. Z konieczności obiorę więc metodę szkicu, rysując z grubsza zarys głównych pomysłów, stosowanej techniki i stylu pracy Steinhausa.

Zacznę od spraw już wspomnianych w referacie profesora Rylla-Nardzewskiego, a mianowicie od sytuacji konfliktowych. Jeszcze w 1936 r., a więc przed ogłoszeniem prac o podziale pragmatycznym [3], w Czasopiśmie Geograficznym ukazała się notka Hugona Steinhausa *O tak zwanej linii równowagi etnicznej* [12]. Już w pierwszym zdaniu tej notki pojawia się nazwisko Jana Czekanowskiego: „*Czekanowski proponuje dla terenów o ludności mieszanej jako linię graniczną taką krzywą, by mniejszości oddzielone od pnia ojczystego po obu stronach linii były sobie absolutnie równe.*" Dalej następuje wywód pokazujący wieloznaczność linii granicznej w sensie Czekanowskiego, a że obaj profesorowie mieszkali we Lwowie, więc rozumowania prowadzone są na bardzo aktualnym wtedy przykładzie Polaków i Rusinów. Steinhaus proponuje, aby wśród wielu linii granicznych szukać takiej, dla której mniejszości po obu stronach byłyby nie tylko sobie równe, ale także możliwie małe. Praca kończy się propozycją iteracyjnego algorytmu postępowania, który prowadzi do wyznaczenia takiej optymalnej *linii równowagi etnicznej*. Sądzę, że Steinhaus myślał właśnie o tych sprawach, gdy w swych materiałach autobiograficznych pisał cytowane już na tej sesji zdanie „*Podział pragmatyczny nadaje się do rozstrzygania niektórych sporów terytorialnych międzynarodowych*".

Koncepcja podziału pragmatycznego przewija się często w rozmaitych zagadnieniach praktycznych, którym poświęcał swą uwagę Hugo Steinhaus. Jednym z przykładów takich zagadnień jest problem wyceny kopalniaków. W niezbyt jeszcze odległych czasach górnictwo było jednym z poważnych odbiorców drewna, stosowanego powszechnie do stemplowania chodników i wyrobisk górniczych. Metoda wyceny dostarczanych kopalniaków była przedmiotem sporu między leśnikami i górnikami. Dostawca kopalniaków chce je sprzedawać według uzgodnionej ceny c_1 za jednostkę objętości dostarczonej masy drewna. Jeśli przyjąć, że kopalniak (jako fragment pnia drzewnego) ma kształt stożka ściętego o średnicach D i d ($D \geqslant d$) oraz długości l, to jego wartość według dostawcy należałoby obliczać za pomocą wzoru

$$W_1 = c_1 \frac{\pi l}{12}(D^2+Dd+d^2).$$

Odbiorca chce inaczej wyceniać ten sam towar. Twierdzi on, że wytrzymałość kopalniaka zależy tylko od jego średnicy w cieńszym końcu i proponuje obliczenie wartości W_2 według wzoru

$$W_2 = c_2 \frac{\pi l}{4} d^2,$$

godząc się na odpowiednio wyższą cenę c_2 za jednostkę objętości walca wpisanego w stożek ścięty.

Zakładając, że ceny c_1 i c_2 zostały ustalone na podstawie znanej statystyki wcześniejszych dostaw tak, aby suma wartości W_1 była równa sumie wartości W_2, Steinhaus proponuje dokonywanie rozliczeń w przyszłości na podstawie wyceny

$$W = \tfrac{1}{2}(W_1+W_2).$$

Przy takiej metodzie rozliczeń globalna zapłata (w warunkach niezmienionej struktury kształtu dostarczanych kopalniaków) pozostanie ta sama. Zwróćmy jednak uwagę na fakt, że dla kopalniaków o kształcie zbliżonym do walca (d/D bliskie jedności) będzie

$$W_1 < W < W_2,$$

podczas gdy dla silnie zwężających się kopalniaków (d/D małe) będzie spełniona przeciwna nierówność

$$W_2 < W < W_1.$$

Tak więc za dobre kopalniaki dostawca dostanie więcej niż chciał, a odbiorca zapłaci mniej niż gotów był zapłacić, natomiast dostawa złych kopalniaków będzie teraz dla obu stron niekorzystna. Przy zastosowaniu propozycji Steinhausa obie strony byłyby zainteresowane w selekcji najodpowiedniejszego materiału na kopalniaki, co miałoby dodatkowy wpływ na zmiejszenie marnotrawstwa cennego surowca (zmniejszenie globalnej objętości dostarczonej masy drewna).

A oto inny przykład sytuacji konfliktowej i propozycji jej rozstrzygnięcia z korzyścią dla obu stron. Mam tu na myśli zagadnienie taryfy elektrycznej — pomysł, który Steinhaus uważał za jedno ze swych największych osiągnięć. Praca została zapoczątkowana jeszcze przed wojną we Lwowie [7] i rozwijana dalej w latach powojennych we Wrocławiu [13].

Za zużytą energię elektryczną płacimy proporcjonalnie do całki z pobieranej mocy w przedziale czasowym stanowiącym okres rozliczeniowy. Tę całkę (wyrażoną w kilowatogodzinach) wskazują liczniki elektryczne zainstalowane w naszych mieszkaniach. Podobne zasady rozliczeń obowiązywały i chyba nadal obowiązują większych odbiorców, jakimi są przede wszystkim zakłady przemysłowe. Są także inne taryfy. W przypadku używania energii elektrycznej do ogrzewania mieszkań instaluje się liczniki, które w określonych porach doby stosują niższą stawkę. Stwarza to korzystne warunki do użytkowania energii elektrycznej w godzinach pozaszczytowych, wtedy gdy system energetyczny może z łatwością sprostać większym zapotrzebowaniom, i zachęca do oszczędzania prądu w okresach szczytu. Wiadomo, że zapotrzebowanie na moc elektryczną jest funkcją, która w ciągu doby ma dwa wyraźne szczyty: jeden w godzinach rannych, a drugi w godzinach wieczornych. Sprostanie wysokiemu zapotrzebowaniu w godzinach szczytu jest bardzo trudne i kosztowne, zwłaszcza w systemach takich jak nasz, niemal wyłącznie opartych na elektrowniach parowych. Elektrownie takie mają tak długi okres rozruchu, że praktycznie nie opłaca się ich włączać tylko w godzinach szczytu. W konsekwencji tego, przez większość czasu system ma potencjalną wydajność przewyższającą znacznie aktualne zapotrzebowanie, co oczywiście pociąga za sobą dodatkowe koszty i straty.

W tej sytuacji Steinhaus wysuwa kilka wariantów nowej metody rozliczeń między dostawcą a odbiorcami energii elektrycznej. Jedna z jego propozycji dotyczy tak zwanej *taryfy kwadratowej*. Polega ona na obliczaniu należności proporcjonalnej do pierwiastka kwadratowego z całki z kwadratu pobranej mocy. Odbiorca, który stale pobiera tę samą moc, a więc odbiorca idealny z punktu widzenia systemu energetycznego, nie dostrzeże tej zmiany. Dla wszystkich innych odbiorców pierwiastek z całki z kwadratu mocy będzie większy od tradycyjnie obliczanej całki z pobieranej mocy. W konsekwencji tego, współczynnik przeliczeniowy można będzie ustalić na poziomie niższym. Taka taryfa będzie więc premiowała odbiorców pobierających moc stałą, a obciąży zwiększonymi opłatami tych, którzy poprzez duże wahania pobieranej mocy zmuszają system energetyczny do utrzymywania rezerw mocy. Wprowadzenie taryfy kwadratowej powinno więc wpłynąć na wygładzenie indywidualnych krzywych poboru mocy, a więc także na obniżenie szczytów i wyrównanie globalnego zapotrzebowania, co zmniejszy straty społeczne i złagodzi podstawową trudność w gospodarce energią elektryczną. Zgłaszając propozycje co do zmiany taryfy Steinhaus interesował się także możliwościami technicznej realizacji takiego zamierzenia i wspólnie z inżynierami opracowywał projekt konstrukcji odpowiednich liczników elektrycznych.

Szczególnie dużo uwagi poświęcał Steinhaus sytuacjom konfliktowym występującym przy odbiorze towarów masowych. Przypuśćmy, że odbiorca otrzymuje partię towaru o liczności N. Towar jest sztukowy, a każda sztuka może być dobra lub zła (klasyfikacja alternatywna). Istnieje sposób badania pozwalający bezbłędnie stwierdzić jakość każdej badanej sztuki. Partia przedstawiona do odbioru ma pewną wadliwość w, równą stosunkowi liczby M sztuk złych do liczby N wszystkich sztuk w partii. Moglibyśmy tę wadliwość obliczyć badając całą partię przedstawioną do odbioru. Można by wtedy wyeliminować z partii wszystkie sztuki wadliwe i nie byłoby żadnego problemu. Ale badanie często jest kosztowne, a czasem nie może być wykonane inaczej, jak tylko przy jednoczesnym zniszczeniu badanej sztuki (dopiero po zniszczeniu możemy stwierdzić, czy badana sztuka była dobra, czy zła). W takich przypadkach nie można badać całej partii i decyzję o odbiorze należy powziąć na podstawie wyników badania tylko pewnej próbki. Hugo Steinhaus współpracował przez kilka lat z Państwowym Komitetem Normalizacyjnym przy ustalaniu norm statystycznej kontroli jakości [6]. Interesował się tymi zagadnieniami do końca życia i to zarówno z punktu widzenia praktyki postępowania, jak też teorii uzasadniającej takie lub inne postępowanie, a sięgającej bardzo głęboko do podstaw wnioskowania statystycznego.

W opisanej tu sytuacji odbioru partii towaru stosuje się najczęściej tak zwany *prosty plan odbioru*. Polega on na tym, że z partii liczącej N sztuk pobiera się do badania losową próbkę o liczności n sztuk i w wyniku zbadania próbki przyjmuje się partię, gdy liczba sztuk wadliwych w próbce nie przekracza ustalonej liczby krytycznej m, lub odrzuca partię, gdy w próbce znaleziono więcej niż m sztuk wadliwych. Taki plan odbioru (oznaczamy go symbolem $m//n$) jest w pełni określony przez podanie liczności próbki n i liczby krytycznej m. Wyjaśniliśmy tu jednak tylko sam przepis postępowania przy odbiorze, nie podając, jak można wyznaczyć liczby n, m, ani też jakie są konsekwencje praktyczne ustalonego planu prostego $m//n$.

W naiwny sposób można by postulować, aby plan odbioru gwarantował to, że partie przyjęte będą dobre, a partie odrzucone — złe. Naiwność takiego postulatu polega na braku sprecyzowania sensu użytych tu terminów partia *dobra* i *zła*, a także na nieuwzględnieniu faktu, że statystyczna metoda odbioru na ogół nie może dawać bezwarunkowych i pewnych gwarancji. Przypuśćmy jednak, że potrafimy ustalić taką dostatecznie niską wadliwość w_1, która nie będzie już niepokoić odbiorcy towaru i zgodzi się on uznać partię towaru za *dobrą*, jeżeli jej wadliwość nie przekracza w_1. Podobnie niech $w_2 > w_1$ jest wadliwością taką, że partia o wadliwości w_2 lub większej jest niewątpliwie *zła*. Rezygnując z absolutnie pewnych gwarancji i zastępując je zapewnieniami o dostatecznie bliskim jedności prawdopodobieństwie odpowiednich zdarzeń można by teraz sformułować pierwotny postulat w postaci następujących warunków:

(a) *z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż* $1-\alpha$ *przyjęta partia towaru powinna mieć wadliwość* $w \leqslant w_1$;

(b) *z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż* $1-\beta$ *odrzucona partia towaru powinna mieć wadliwość* $w \geqslant w_2$,

gdzie α i β są uzgodnionymi małymi liczbami (np. $\alpha = \beta = 0{,}05$).

W taki sposób zadanie wyznaczenia planu odbioru chce formułować praktyk. Matematyk znający rachunek prawdopodobieństwa zauważy jednak, że na to, aby można było mówić o warunkowych prawdopodobieństwach

$$(1)\qquad \begin{aligned} &P\{w \leqslant w_1 \mid \textit{partia przyjęta zgodnie z planem } m//n\};\\ &P\{w \geqslant w_2 \mid \textit{partia odrzucona zgodnie z planem } m//n\}, \end{aligned}$$

należy założyć, że partia towaru przedstawiona do odbioru jest losowo wybrana z pewnej populacji partii, a do obliczenia prawdopodobieństw (1) potrzebna jest znajomość rozkładu wadliwości w w tej hipotetycznej populacji, czyli znajomość tak zwanego rozkładu *a priori* (przed zbadaniem próbki) wadliwości w partii. Jeżeli rozkład *a priori* jest określony za pomocą dystrybuanty $F(w)$, to stosując *wzór całkowy Bayesa* warunki (a) i (b) możemy napisać w postaci nierówności

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{\int_0^{w_1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k}\, dF(x)}{\int_0^{1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k}\, dF(x)} \geqslant 1-\alpha,\\ &\frac{\int_{w_2}^{1} \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k}\, dF(x)}{\int_0^{1} \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} w^k (1-w)^{n-k}\, dF(x)} \geqslant 1-\beta. \end{aligned}$$

Wyznaczenie odpowiedniego planu prostego $m//n$ sprowadza się wtedy do wyboru parametrów m, n w zbiorze rozwiązań nierówności (2).

Jeśli nie znamy rozkładu *a priori*, to niekiedy zaleca się przyjąć *hipotezę Bayesa* o jednostajnym rozkładzie *a priori* wadliwości w całym przedziale [0, 1] możliwych wartości, czyli

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad w \leqslant 0,\\ w & \text{dla} \quad 0 \leqslant w \leqslant 1,\\ 1 & \text{dla} \quad w \geqslant 1. \end{cases}$$

Teoretycy dostrzegają tu jednak łatwo arbitralność przyjętej hipotezy, a praktycy mogą zakwestionować założenie, że jakość dostarczanego towaru jest tak nieustabilizowana i można się *a priori* spodziewać jednostajnego rozkładu wadliwości w partii.

W takiej sytuacji szkoła statystyczna Pearsona i Spławy-Neymana proponuje zasadniczą zmianę postulatów wyjściowych, które teraz miałyby następującą postać:

(a′) *partia o wadliwości* w_1 *powinna być przyjęta z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż* $1-\alpha$;

(b′) *partia o wadliwości* w_2 *powinna być odrzucona z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż* $1-\beta$.

Te postulaty pozwalają już wyznaczać spełniające je plany odbioru bez potrzeby dodatkowych założeń. Ale można mieć wątpliwości czy są one zgodne z istotnym zainteresowaniem praktyków. Jeśli bowiem dostawca stale dostarcza zły towar (o wadliwości $w = w_2$), to wprawdzie z dużym prawdopodobieństwem $1-\beta$ partie będą odrzucane, ale nieliczne partie przyjęte też zawsze będą złe.

Zagadnienie odbioru statystycznego jest typowym przykładem statystycznego zagadnienia estymacji parametru wadliwości w populacji. Przyjęcie postulatów (a), (b) prowadzi do *wzoru Bayesa* i przy nieznajomości rozkładu *a priori* wymaga dodatkowego założenia. Postulaty (a′) i (b′) omijają tę trudność (kosztem przyjęcia innego sformułowania) i prowadzą do *przedziałów ufności*. Kontrowersję tych dwu różnych teorii W. Feller komentuje w następujących zdaniach: „*Inżynier ma przy kontroli jakości do czynienia z jedną maszyną, a nie z nieskończoną populacją maszyn, z której tę jedną wybrano na chybił-trafił. Poradzono mu używać reguły Bayesa z tej racji, że jest ona logicznie do przyjęcia i odpowiada naszemu sposobowi myślenia. Plato używał podobnego argumentu dla udowodnienia istnienia Atlantydy, a filozofowie do wykazania niedorzeczności mechaniki Newtona... Współczesna teoria testów statystycznych i estymacji jest mniej intuitywna, ale bardziej realistyczna. Można ją nie tylko bronić, ale i stosować.*" Przytaczam te słowa w tłumaczeniu Steinhausa z oryginału angielskiego [1], tak jak zostały zacytowane w odsyłaczu do pierwszego zdania pracy [21]. Po zamknięciu cudzysłowu Steinhaus kończy odsyłacz już własnymi słowami: „*Ten pogląd znakomitego znawcy rachunku prawdopodobieństwa jest sprzeczny z tezą niniejszej pracy, która orzeka paralelizm starej i nowej teorii*".

Steinhaus podejmuje więc dyskusję o tych zasadniczych sprawach dotyczących wnioskowania statystycznego, a punktem wyjścia była dla niego obserwacja wyników liczbowych uzyskiwanych przy jednym i drugim podejściu do zagadnień kontroli jakości. Pierwsze spostrzeżenia dotyczące zgodności rezultatów liczbowych w obu teoriach ogłosił J. Oderfeld [5]. Hugo Steinhaus w kilku pracach własnych ([20], [21] i [23]) oraz jednej ogłoszonej wspólnie z S. Zubrzyckim [28] szczegółowo analizuje tę sytuację. Zasadniczą ideą Steinhausa jest postulat rozpatrywania straty społecznej związanej z badaniem statystycznym. W zależności od tego, jak zdefiniujemy stratę i jaką przyjmiemy zasadę: *minimizacja oczekiwanej straty* lub *postulat minimaksu*, możemy dojść do jednej lub drugiej teorii, przy czym różnice w wynikach liczbowych są w wielu sytuacjach zupełnie nieistotne.

Inna zupełnie sytuacja konfliktowa występuje w cywilnych sprawach sądowych o ustalenie spornego ojcostwa. W takich sprawach zazwyczaj matka, w imieniu swego nieletniego dziecka, wnosi do sądu pozew o orzeczenie ojcostwa wskazanego mężczyzny, który temu ojcostwu zaprzecza. Najczęściej taki pozew występuje łącznie z roszczeniami świadczeń finansowych na pokrycie kosztów wychowania

dziecka, ale sąd te dwie sprawy oddziela i najpierw musi być orzeczone ojcostwo pozwanego. Tego rodzaju sprawy stanowią około jednej piątej wszystkich spraw cywilnych rozpatrywanych w naszych sądach, zjawisko jest więc masowe i dotyczy zagadnień o istotnym znaczeniu społecznym.

Przewód sądowy przebiega tu w ten sposób, że najpierw strona pozywająca musi udowodnić *domniemanie ojcostwa*. Jest to zadanie stosunkowo łatwe, bo wystarczy w tym celu wykazać możliwość współżycia matki z pozwanym w okresie od 300 do 180 dnia przed narodzeniem dziecka. Jeśli domniemany ojciec nadal podtrzymuje swą tezę, to musi teraz udowodnić niemożliwość ojcostwa. Dowodu takiego może dostarczyć *ekspertyza serologiczna*, czyli badanie grup krwi matki, dziecka i domniemanego ojca. Prawa dziedziczenia grup krwi pozwalają określić wszystkie takie układy wyników badania, w których mężczyzna nie może być ojcem danego dziecka z danej matki. Np. przy badaniu głównych grup krwi AB0 ojcostwo będzie *wyłączone*, jeśli ekspertyza serologiczna da wyniki: matka 0, dziecko A, domniemany ojciec B. W takiej sytuacji serolog orzeka, że wskazany mężczyzna nie może być ojcem, a sędzia na ogół oddala powództwo. Gdyby jednak przy tych samych wynikach badania matki i dziecka u domniemanego ojca stwierdzono grupę A lub AB, ojcostwo nie zostałoby wyłączone, co sędzia rozumie na ogół jako dodatkowe potwierdzenie domniemania.

Zastosowanie grup krwi w badaniach sądowych o ustalenie ojcostwa szeroko propagował Ludwik Hirszfeld [2]. Umiał on obliczyć prawdopodobieństwo wyłączenia niesłusznie pozwanego mężczyzny, zarówno warunkowe (przy znanym wyniku badania matki i dziecka), jak i bezwarunkowe (zanim wykonano jakiekolwiek badania). Przy zastosowaniu kilku układów grupowych (ABO, MN i inne) można było uzyskać prawdopodobieństwo bezwarunkowe rzędu 0,5. Oznacza to, że w około 50% niesłusznych pozwów można się spodziewać wyłączenia ojcostwa na podstawie przeprowadzonej ekspertyzy serologicznej. W rzeczywistym materiale ekspertyz wyłączenia ojcostwa trafiają się znacznie rzadziej, co jest oczywiście wynikiem faktu, że prawdziwi ojcowie nie mają żadnych szans na wyłączenie. Z porównania liczby obserwowanych wyłączeń i liczby oczekiwanych wyłączeń przy założeniu niezgodności domniemania z prawdą materialną, można było obliczyć frakcję tych przypadków, w których domniemanie było słuszne. Tę frakcję Hirszfeld nazywał *współczynnikiem prawdomówności kobiet* i obserwował jego zależność od miejsca i czasu. Hirszfeld proponował również, aby w każdym przypadku ekspertyzy, która nie daje wyłączenia ojcostwa, obliczyć i podawać sądowi warunkowe prawdopodobieństwo wyłączenia niesłusznie pozwanego mężczyzny przy danych grupach krwi matki i dziecka. W przypadkach, gdy takie prawdopodobieństwo jest zerem (np. gdy matka i dziecko mają grupę A i każdy mężczyzna może być ojcem), brak wyłączenia nie powinien być interpretowany jako potwierdzenie domniemania. Niewątpliwym potwierdzeniem jest natomiast brak wyłączenia w sytuacji, gdy prawdopodobieństwo wyłączenia niesłusznie pozwanego mężczyzny jest bliskie jedności.

Po referacie Hirszfelda na posiedzeniu Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego Steinhaus zauważył [22], że „współczynnik prawdomówności kobiet" jest prawdo-

podobieństwem ojcostwa *a priori* (w populacji spraw, w których dochodzi do ekspertyzy serologicznej), co przy dodatkowym uwzględnieniu warunkowych prawdopodobieństw wyłączenia niesłusznie pozwanego mężczyzny oraz praw dziedziczenia i częstości grup krwi w populacji pozwala zastosować wzór Bayesa do obliczenia prawdopodobieństwa ojcostwa *a posteriori*, to znaczy po zbadaniu grup krwi matki, dziecka i domniemanego ojca. Taki był początek tej niezwykle ciekawej współpracy, łączącej trzy odległe dyscypliny naukowe: prawo, biologię i matematykę.

Teoretycy prawa zgłaszali często wątpliwości czy sędzia może opierać swe orzeczenie na znajomości prawdopodobieństwa spornego faktu. Odpowiedź Steinhausa na takie zarzuty była niezwykle prosta. Obliczone po ekspertyzie prawdopodobieństwo ojcostwa nie zmusza wcale sędziego do takiego, lub innego orzeczenia. Podaje ono tylko ilościowo wartość pewnych faktów, z którymi sędzia nie będzie się liczył, jeżeli zna inne, oczywiste, które mówią co innego, ale z którymi powinien się liczyć, jeżeli sprawa jest dla niego niejasna. Należy także pamiętać, że sprawa cywilna o ustalenie spornego ojcostwa musi się zakończyć albo orzeczeniem ojcostwa, albo oddaleniem pozwu, co jest równoznaczne z orzeczeniem, że pozwany mężczyzna nie jest ojcem. Jeżeli sędziemu nie wystarcza wysokie prawdopodobieństwo ojcostwa (np. 0,90) do orzeczenia tego faktu (co w następstwie obarczy pozwanego kosztami wychowania dziecka), to będzie musiał się zadowolić małym prawdopodobieństwem dopełniczego zdarzenia i oddalając pozew przerzucić te koszta na matkę dziecka lub trzecią osobę.

W momencie opracowywania tych zagadnień obliczono (na podstawie prawie 4000 ekspertyz), że prawdopodobieństwo ojcostwa *a priori* było równe 0,7. Po ekspertyzie serologicznej w około 12% spraw uzyskiwano wyłączenie ojcostwa. W pozostałych przypadkach prawdopodobieństwo ojcostwa *a priori* (obliczone na podstawie badanych wówczas grup krwi) mogło przyjmować wartości od 0,29 do 0,9995. Zwróćmy uwagę na fakt, że pomimo braku wyłączenia prawdopodobieństwo ojcostwa może zmaleć od wartości 0,7 (przed ekspertyzą) do wartości 0,29. Już ten fakt, sprzeczny z naiwną interpretacją nieudałego wyłączenia, powinien przekonać prawnika o celowości obliczania prawdopodobieństwa ojcostwa. Ale zwróćmy jeszcze uwagę na inną stronę zagadnienia. Nie mając wglądu w inne realia sprawy matematyk doradziłby sędziemu, aby orzekał ojcostwo wtedy, gdy prawdopodobieństwo będzie większe od 1/2 i oddalał pozew w przypadku przeciwnym. Wśród wszystkich metod automatycznego ferowania orzeczeń takie postępowanie gwarantuje minimalną frakcję orzeczeń niezgodnych z prawdą materialną. Z empirycznego rozkładu wartości prawdopodobieństwa ojcostwa można obliczyć [4], że byłoby wtedy 18% błędnych orzeczeń. Steinhaus potrafił również zaproponować metodę oceny frakcji błędnych orzeczeń w sprawach, w których wykonywana była ekspertyza serologiczna, ale sędziowie ferowali orzeczenia bez znajomości prawdopodobieństwa ojcostwa. Był to chyba jedyny w historii prawa przypadek statystycznego sprawdzenia zgodności orzeczeń sądowych z prawdą materialną. Oczywiście sprawdzenie to nie dotyczyło indywidualnych orzeczeń i każdy sędzia może utrzymywać, że jego orzeczenia są nieomylne, ale zebrane materiały 874 orzeczeń

wykazały, że frakcja orzeczeń niezgodnych z prawdą materialną zawierała się w przedziale od 12% do 22% [4].

Te stwierdzenia, a także wnioski z wielu dyskusji prowadzonych z sędziami i teoretykami prawa, pozwoliły Steinhausowi sformułować uwagi *de lege ferenda*, a jego praca na ten temat [24] jest przez niektórych prawników uważana za najciekawszą publikację z prawa cywilnego spośród ogłoszonych w Polsce po II wojnie światowej.

Podobną opinię usłyszałem niedawno od znajomych geografów. Okazuje się, że Hugo Steinhaus jest najczęściej cytowanym polskim autorem w zagranicznej literaturze geograficznej. Tę renomę wyrobiły mu różne prace dotyczące wskaźników geograficznych ([11], [14], [15], [16]), przede wszystkim jednak ciekawe pomysły w zakresie metod pomiaru długości krzywych płaskich i generalizacji pojęcia długości. Wykorzystując idee Croftona ze znanego zadania na obliczanie rozkładu prawdopodobieństwa liczby przecięć losowo rzucanego odcinka (igła) na siatkę równoległych prostych (podłoga) Steinhaus proponuje ([9], [19]), aby mierzyć długość krzywej licząc punkty jej przecięcia z liniami losowo nakładanej siatki. Przezroczysta kartka papieru z narysowaną siatką o specjalnie dobranych odległościach między prostymi, czyli tak zwany *longimetr* [10], daje od razu wynik liczbowy w wybranej jednostce długości, bez potrzeby mnożenia zaobserwowanej liczby punktów przecięcia przez odpowiedni współczynnik przeliczeniowy.

Potrzeba generalizacji pojęcia długości wynika z faktu, że długość krzywej nie jest funkcjonałem ciągłym. Tak np. długość brzegu morskiego w istotny sposób zależy od dokładności mapy, na której dokonujemy pomiaru, i może wzrastać nieograniczenie w miarę uwzględniania mikrostruktury lądu. Dla uniknięcia tego paradoksu Steinhaus definiuje *zgeneralizowaną długość rzędu n* (n naturalne), którą oblicza się w ten sposób, że przy zliczaniu punktów przecięcia z siatką longimetru uwzględnia się co najwyżej n przecięć krzywej z każdą linią siatki.

Warto tu jeszcze przypomnieć pomysły Hugona Steinhausa związane z siatką sześciokątów. Optymalne własności takiego podziału płaszczyzny, występującego w przyrodzie np. w strukturze plastra pszczelego, Steinhaus proponuje wyzyskać przy projektowaniu kompletu rozmiarów ubrań [26], a także przy planowaniu sieci próbnych wierceń geologicznych. To pierwsze zagadnienie wiąże się z udziałem profesora w szeroko zakrojonych pracach nad przeprowadzeniem reprezentatywnych pomiarów antropometrycznych ludności Polski i wykorzystaniu ich przy projektowaniu produkcji przemysłu lekkiego. Gdy został przewodniczącym powołanej w tym celu Komisji Antropometrycznej Polskiej Akademii Nauk z właściwym sobie dowcipem powiedział: „*Pan mi powierzył fason Polaków*". Siatkę sześciokątną Hugo Steinhaus wykorzystuje jeszcze raz proponując oryginalną konstrukcję mostu wiszącego, zawieszonego na sztywnej ramie za pomocą sześciokątnej siatki cięgieł [25]. Taka konstrukcja zapewnia równomierne rozłożenie napięć przy dowolnym obciążeniu mostu.

Zasługi Hugona Steinhausa w rozwoju zastosowań matematyki nie ograniczają się tylko do prac, które sam tworzył. Drugą bardzo ważną stroną jego działalności było inspirowanie prac innych ludzi, co dało początek używanej niekiedy nazwie

szkoła Steinhausa. Między innymi ja także miałem zaszczyt i tę wielką przyjemność, że mogłem współpracować z profesorem Steinhausem, a dziś kontynuuję niektóre z zaczętych przez niego dzieł. Jedną z okazji wciągnięcia grupy osób do zagadnień związanych z zastosowaniami matematyki było seminarium, które profesor Steinhaus założył w 1948 r., bezpośrednio po zjeździe warszawskim Polskiego Towarzystwa Matematycznego, na którym wygłosił swój programowy referat *Drogi matematyki stosowanej* [18]. Pierwsze posiedzenie wrocławskiego seminarium z zastosowań matematyki odbyło się w czwartek 7 października 1948 r. w sali 132 głównego gmachu Politechniki Wrocławskiej. Oprócz Profesora Steinhausa uczestniczyły w tym posiedzeniu jeszcze 32 osoby, z których wielu jest obecnych na moim dzisiejszym referacie. Na tym posiedzeniu Hugo Steinhaus opowiedział nam o kilku zagadnieniach, między innymi o zagadnieniu odbioru kopalniaków. Kilku uczestników posiedzenia dostało wtedy prace do referowania na następnych posiedzeniach lub proste zagadnienia do samodzielnego rozwiązania. Pamiętam dobrze, że podjąłem się wtedy obliczenia metodą najmniejszych kwadratów najlepszych wykładników w jednomianowym wzorze na objętość pnia drzewnego. Ten prosty rachunek, który dziś wykonujemy automatycznie na maszynie cyfrowej za pomocą standardowych programów, trzeba było wtedy wykonać ręcznie, a pierwsze spotkanie z realnym materiałem doświadczalnym było wielką przygodą dla studenta III roku matematyki. Zapoczątkowane przed 24 laty seminarium z zastosowań matematyki odbywa się nadal, choć już kilkakrotnie zmieniali się jego kierownicy. W najbliższy czwartek poprowadzę kolejne 739 posiedzenie, starając się kontynuować styl pracy Hugona Steinhausa, polegający na żywym kontakcie z konkretnymi zagadnieniami praktycznymi [29].

Drugą inicjatywą, która przyczyniła się wydatnie do rozwoju zastosowań, było założenie nowego pisma *Zastosowania Matematyki*. Pierwszy zeszyt ukazał się w roku 1953, a pierwszą pracą w nim zawartą była rozprawa Hugona Steinhausa o podstawach statystycznej kontroli jakości [21]. Niezwykle interesująca jest również notka od redakcji, zawierająca program naukowy pisma do pewnego stopnia stanowiąca także usprawiedliwienie, że powstaje takie pismo. Przed dwudziestu laty trzeba się jeszcze było tłumaczyć, że wydaje się pismo poświęcone zastosowaniom. *Zastosowania Matematyki* także kontynuują swą działalność, ale drukowany obecnie tom XIII różni się zasadniczo od pierwszych zeszytów. Zamiast języka polskiego znaleźć tam można wyłącznie języki kongresowe, a wśród autorów pojawiają się coraz częściej nazwiska egzotyczne z całego świata. Okazało się także, że jedno pismo z zastosowań już nie wystarcza i Polskie Towarzystwo Matematyczne rozpoczyna III serię swych roczników, która będzie właśnie poświęcona zastosowaniom matematyki i zaadresowana przede wszystkim do licznych już dziś matematyków pracujących w przemyśle i gospodarce narodowej.

Chciałem się jeszcze tu zastanowić, jak do tego doszło, że Hugo Steinhaus, wybitny matematyk, mający wspaniałe wyniki w teorii, doszedł także do zagadnień praktycznych, tak pozornie prostych, a jednocześnie głębokich i tak powiązanych z bogactwem otaczającej nas rzeczywistości. Jak ocenić to zjawisko i jak je wytłu-

maczyć? Na początku referatu wymieniłem liczbę publikacji Hugona Steinhausa i wspomniałem już, że w przybliżeniu połowa dotyczy zastosowań matematyki. Ale rozkład ich w chronologicznie uporządkowanej twórczości naukowej Hugona Steinhausa nie jest jednostajny. Pierwsza praca z zastosowań matematyki ma kolejny numer 49. Długa więc była droga poprzez badania teoretyczne do pojawiających się najpierw z rzadka, potem coraz częściej, publikacji z zastosowań matematyki. Na wytłumaczenie tego faktu można z pewnością podać kontakty Hugona Steinhausa z czasów studiów w Getyndze: Hilbert i Runge, matematyka i astronomia. Później praca w gazociągu, jeden z pierwszych chyba przykładów zatrudnienia matematyka w przemyśle. Niewątpliwa dociekliwość, bystrość obserwacji, zdolność obcowania z rzeczywistością przejawiają się na wszystkich kartach pięknych wspomnień Hugona Steinhausa z lat młodzieńczych [27]. Przypomnijmy może tylko jeden szczegół. Obserwacja odbicia płatka śniegu w szybie wystawowej sklepu z kapeluszami doprowadziła w konsekwencji do pomysłu *introwizora* [17] — przyrządu do lokalizacji ciała obcego.

Z pewnością ogromny wpływ miały tu kontakty z innymi ludźmi, przede wszystkim z wybitnymi specjalistami różnych nauk: Jan Czekanowski, Ludwik Hirszfeld, Jan Oderfeld, Hugon Kowarzyk i wielu, wielu innych. Steinhaus miał niewątpliwy dar rozumienia innych ludzi i jasnego formułowania trudnych spraw. Już w 1927 r. w czasopiśmie Kosmos ukazał się jego referat „*Czem jest matematyka i na czem polega jej postęp*" [8]. Był to pierwszy wykład z serii poświęconej zagadnieniom matematyki, a redakcja pisma poprzedziła tekst Steinhausa następującym przypisem: „*Niniejszy artykuł prof. Steinhausa otwiera serię popularnych odczytów matematycznych, wygłoszonych w zimie 1926-27 roku przez profesorów Uniwersytetu i Politechniki we Lwowie. Wobec coraz ściślejszego związku jaki utrwala się między matematyką a przyrodoznawstwem, wydaje się nam rzeczą ważną zaznajomić przyrodników z aktualnymi problematami matematyki.*" Mamy więc tutaj być może pierwsze publiczne spotkanie Hugona Steinhausa i przyrodników, którzy już dostrzegają potrzebę takiego kontaktu. A występując przed przyrodnikami Steinhaus zaczyna swój referat od następujących zdań: „*Niemodny już dziś Wilde powiedział, że każdy nazywa swoją specjalnością to, na czym się najmniej rozumie. Sens tego paradoksu jest chyba taki, że jak ryba zapewne nie zdaje sobie sprawy z tego czym jest woda i jakie są jej własności, tak samo prawnik rzadko się zastanawia nad istotą prawa, biolog nie troszczy się o definicję biologii, a matematyk nie często myśli i mówi o tem, czem jest matematyka. Takie pytanie występuje dopiero przy kontakcie z niematematykami, tak jak ryba prawdopodobnie wynurzając się nad wodę spostrzega ją i widzi jej zasięg, jej granice i jej specyficzne własności.*"

Niewątpliwie Hugo Steinhaus był tym, który wynurzał się z matematycznych głębi i umiał dostrzec zarówno matematykę, jak i pozamatematyczne lądy. Sięgnijmy jeszcze dalej do tekstu tego pięknego odczytu i zobaczmy, jak Steinhaus pokazuje i tłumaczy matematykę: „*Matematyka podobna jest do wieży, której fundamenty położono przed wiekami, a do której dobudowuje się coraz wyższe piętra. Aby zobaczyć postęp budowy, trzeba iść na piętro najwyższe, a schody są strome i składają*

się z licznych stopni. Rzeczą popularyzatora jest zabrać słuchacza do windy, z której nie zobaczy ani pośrednich pięter, ani pracą wieków ozdobionych komnat, ale przekona się, że gmach jest wysoki i że wciąż rośnie."

Na zakończenie fragment jeszcze jednej wypowiedzi Hugona Steinhausa. Być może było to jedno z ostatnich publicznych wystąpień Profesora. 14 grudnia 1968 r., na spotkaniu ze studentami, członkami Koła Naukowego, w Instytucie Matematycznym PAN przy ul. Kopernika Hugo Steinhaus powiedział takie gorzkie słowa: „*Nie jestem matematykiem. Byłem nim. Dziś nie interesują mnie rzeczy, które zajmowały mnie kiedyś w Getyndze. Trzy odkrycia realne zostały solidarnie przez świat zignorowane: 1) introwizor, 2) dochodzenie ojcostwa, 3) przęsło heksagonalne. Można dołączyć do nich: 4) taryfę prądu elektrycznego; mało kto zna model, który pokazuje: 5) zgodność teorii kinetycznej gazów Boltzmana z klasyczną, to znaczy deterministyczną à la Newton. W Polsce nie korzysta się z matematyki — można to sprawdzić na mnie.*"

Ten ton goryczy pojawia się już także w innych, wcześniejszych wystąpieniach Hugona Steinhausa. Chcę tu jednak polemizować z taką oceną dorobku naukowego mego mistrza. To prawda, że nie stosuje się introwizora ani taryfy kwadratowej i ciągle są opory przeciwko wprowadzeniu prawdopodobieństwa ojcostwa do praktyki sądowej. Jest jednak niewątpliwą prawdą, że zastosowania matematyki, właśnie dzięki pracom i inicjatywom profesora Steinhausa rozwinęły się w Polsce do miary, którą trudno było przewidywać w okresie, w którym rozpoczynało pracę seminarium wrocławskie i pojawiały się pierwsze zeszyty Zastosowań Matematyki. Jednym z przejawów tego rozwoju jest zakończona przed dwoma dniami konferencja z zastosowań matematyki. Przez kilka dni 140 osób obradowało w Jadwisinie pod Warszawą nad różnymi zagadnieniami, często bardzo konkretnymi i dotyczącymi istotnych zagadnień praktycznych. Poziom wygłaszanych tam referatów i dyskusji był wysoki, a cała atmosfera spotkania świadczyła w sposób zupełnie przekonywający, że program Hugona Steinhausa wytyczający drogi rozwoju zastosowań matematyki jest w Polsce skutecznie realizowany.

Prace cytowane

[1] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, J. Wiley, New York 1950.
[2] L. Hirszfeld, *Dochodzenie ojcostwa w świetle nauki o grupach krwi*, Lekarski Instytut Naukowo-Wydawniczy, Wrocław 1948.
[3] B. Knaster i H. Steinhaus, *Sur la division pragmatique*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19 (1946), str. 228–231.
[4] J. Łukaszewicz, *O dochodzeniu ojcostwa*, Zastosowania Matematyki 2 (1956), str. 349–378.
[5] J. Oderfeld, *On the dual aspect of sampling plans*, Colloquium Mathematicum 2 (1951), str. 89–97.
[6] J. Oderfeld, H. Steinhaus i K. Wiśniewski, *Statystyczna kontrola jakości (odbiór towarów według oceny alternatywnej)*, Polskie Normy PN/N-03001, PKN, Warszawa 1951.
[7] I. Rosenzweig i H. Steinhaus, *Der Quadratleiskungtarif*, Schweizerischer Elektrotechnischer Verein, 1939.

[8] H. Steinhaus, *Czem jest matematyka i na czem polega jej postęp?*, Kosmos 52 (1927), str. 346–361.

[9] — *Sur la portée pratique et théorique de quelques théorèmes sur la mesure des ensembles de droites*, Sprawozdania z Pierwszego Kongresu Matematyków Krajów Słowiańskich (Comptes-Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves), Warszawa 1930, str. 348–354.

[10] — *Longimetr*, Czasopismo geograficzne 3 (1931), str. 1–4.

[11] — *O charakterystyce skupienia osiedli*, Czasopismo geograficzne 8 (1936), str. 288–297.

[12] — *O tak zwanej linii równowagi etnicznej*, Czasopismo geograficzne 8 (1936), str. 297–298.

[13] — *O zagadnieniu taryfy elektrycznej*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, seria B, Nr. 1, Wrocław 1947.

[14] — *O wskaźniku zgęszczenia i rozproszenia*, Przegląd geograficzny 21 (1947), str. 1–3.

[15] — *O wskaźniku ukształcenia pionowego*, Przegląd geograficzny 21 (1947), str. 3.

[16] — *O wskaźniku stromości przeciętnej*, Przegląd geograficzny 21 (1947), str. 1–2.

[17] — *Method of an apparatus for localizing and visualizing foreign bodies*, United States Patent Office, 2441538, granted May 11, 1948.

[18] — *Drogi matematyki stosowanej*, Matematyka 3 (5) (1949), str. 9–19.

[19] — *O długości krzywych empirycznych i jej pomiarze, zwłaszcza w geografii*, Sprawozdania Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego 4 (1949), dodatek 5, str. 1–6.

[20] — *Quality control by sampling* (*A plea for Bayes' rule*), Colloquium Mathematicum 2 (1950), str. 98-108.

[21] — *Podstawy kontroli statystycznej*, Zastosowania Matematyki 1 (1953), str. 4–27.

[22] — *O dochodzeniu ojcostwa*, Zastosowania Matematyki 1 (1954), str. 67–82.

[23] — *Prawdopodobieństwo, wiarogodność i możliwość*, Zastosowania Matematyki 1 (1954), str. 149–172.

[24] — *Dochodzenie ojcostwa i alimentów* (*Uwagi de lege ferenda*), Ruch prawniczy i ekonomiczny 20 (1958), str. 1–16.

[25] — *A bridge with a hexagonal framework*, Zastosowania Matematyki 6 (1962), str. 333–340.

[26] — *Przejście od informacji zawartych w zdjęciu antropologicznym do planowania wymiarów ubrań* (rozdział II w części 2 zbiorowej książki: *Polskie zdjęcie antropometryczne 1955–1959*, Komisja Antropometryczna PAN), Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1962, str. 119–122.

[27] — *Wspomnienia*, Znak (1970) Nr 1 (187), str. 42–106 i Nr 2–3 (188-189), str. 306–338.

[28] — i S. Zubrzycki, *O porównywaniu dwu procesów produkcyjnych i zasadzie dualizmu*, Zastosowania Matematyki 3 (1958), str. 229–257.

[29] S. Zubrzycki, *O niektórych pracach seminarium z zastosowań matematyki*, Zastosowania Matematyki 8 (1966), str. 267–281.