ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVIII (1974)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

C. BESSAGA (Warszawa)

O kostce Hilberta

Z nazwiskiem Hilberta wiążą się dwie przestrzenie nieskończenie wymiarowe: przestrzeń Hilberta i kostka Hilberta (patrz praca Hilberta [22] z 1906 r.). Przestrzeń Hilberta zrobiła ogromną karierę w matematyce i w fizyce. W samej literaturze polskiej są dwie poważne monografie o przestrzeni Hilberta: Maurina [27] i Mlaka [28]. O kostce Hilberta ogół matematyków, nie-topologów wie bardzo mało. Tymczasem wyniki uzyskane w ostatnim siedmioleciu — przede wszystkim przez wybitnego topologa amerykańskiego R. D. Andersona i przez matematyków z nim współpracujących — akcentują duże znaczenie kostki Hilberta i metod badania własności różnych przestrzeni, związanych z zanurzaniem tych przestrzeni w kostce Hilberta.

Przez *standardową kostkę Hilberta* Q będziemy rozumieli przeliczalny iloczyn kartezjański odcinków domkniętych $[-1; 1]$ z topologią produktową, która może być zadana, na przykład, za pomocą metryki

$$1) \qquad d(x, y) = \sup_n 2^{-n}|x_n - y_n|,$$

gdzie $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ są punktami Q. Każdą przestrzeń topologiczną homeomorficzną z Q będziemy nazywali *kostką Hilberta.*

Wymieńmy dwa twierdzenia o kostce Hilberta znane z elementarnego kursu topologii uniwersyteckiej.

TWIERDZENIE URYSOHNA. *Dla każdej przestrzeni metrycznej ośrodkowej* [*zwartej* X *istnieje zanurzenie* [*domknięte*] $f\colon X \to Q$.

Przez *zanurzenie* [*domknięte*] rozumiemy tu dowolny homeomorfizm przestrzeni X na podzbiór [domknięty] kostki Q.

TWIERDZENIE SCHAUDERA [1]. *Kostka Hilberta ma własność punktu stałego, tzn. dla każdego ciągłego odwzorowania* $f\colon Q \to Q$ *istnieje* $x \in Q$ *takie, że* $f(x) = x$.

---

[1] Schauder udowodnił, że własność punktu stałego mają zbiory wypukłe zwarte w dowolnej przestrzeni Frécheta. Oczywiście z naszego sformułowania twierdzenia Schaudera i z podanego niżej twierdzenia Kellera wynika natychmiast ten ogólniejszy fakt.

Dowód pierwszego twierdzenia jest bardzo prosty. Niech $\{x_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ będzie zbiorem gęstym w X, zaś d — metryką dla X ograniczoną liczbą 1. Łatwo sprawdzić, że wzór $f(x) = \big(d(x, x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ daje żądane zanurzenie.

Drugie twierdzenie jest prostą konsekwencją klasycznego twierdzenia Brouwera o własności punktu stałego kostek skończenie wymiarowych. Dla $i = 1, 2, \ldots$ oznaczmy $Q_i = \{(x_n) \in Q\colon x_n = 0 \text{ dla } n > i\}$, $p_i\colon Q \to Q_i$ — naturalne rzutowanie: $p_i(x) = (x_1, \ldots, x_i, 0, 0, \ldots)$. Dla danego odwzorowania $f\colon Q \to Q$ określamy $f_i\colon Q_i \to Q_i$ wzorem $f_i(x) = p_i f(x)$. Niech x^i będzie punktem stałości dla f_i. Ze zwartości Q wynika istnienie punktu $x \in Q$, który jest punktem skupienia zbioru $\{x^i\colon i = 1, 2, \ldots\}$. Na mocy (1), $d\big(x^i, f(x^i)\big) \leqslant 2/i$, skąd wnosimy, że $f(x) = x$.

Mniej znane jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE KELLERA. *Niech K będzie nieskończenie wymiarowym podzbiorem wypukłym, zwartym przestrzeni liniowo topologicznej X; załóżmy ponadto, że istnieje zbiór przeliczalny $\{f_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ funkcjonałów liniowych ciągłych na X, który rozdziela punkty K. Wówczas K jest homeomorficzne z Q. W szczególności, każdy nieskończenie wymiarowy, wypukły, zwarty podzbiór dowolnej przestrzeni Banacha jest homeomorficzny z kostką Hilberta.*

W istocie, O. H. Keller w swej pracy [24] z 1931 r. sformułował i udowodnił tylko szczególny przypadek tego twierdzenia, gdy $X = l_2$ — przestrzeń Hilberta ciągów sumowalnych z kwadratem. Dopiero w 1955 r. V. Klee [26] zauważył, że podana tutaj wersja twierdzenia łatwo sprowadza się do tego szczególnego przypadku. Załóżmy bowiem dodatkowo, że $\sup_{x \in K} |f_n(x)| < 1/n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ (co można zawsze uzyskać zastępując dane na początku funkcjonały ich iloczynami przez odpowiednie stałe dodatnie). Wówczas odwzorowanie $x \to \big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ realizuje homeomorfizm zbioru K położonego w przestrzeni Banacha na podzbiór wypukły zwarty przestrzeni l_2.

Z grubsza biorąc, pierwsze ze sformułowanych wyżej twierdzeń wiąże się z zastosowaniami kostki Hilberta w topologii, drugie i trzecie — z zastosowaniami w analizie.

Twierdzenie Urysohna (teza w nawiasie) orzeka o istnieniu zanurzeń domkniętych *kompaktów*, tzn. przestrzeni metrycznych zwartych, w kostkę Hilberta. Obecnie będziemy omawiać zagadnienia związane z jednoznacznością (z dokładnością do homeomorfizmów kostki Hilberta na siebie) takich zanurzeń. Najbardziej interesujące wyniki w tym zakresie uzyskano dopiero w ostatnich latach, ale wciąż jeszcze szereg istotnych problemów pozostaje otwartych.

1. Jednoznaczność zanurzeń kompaktów w Q; zbiory typu Z. Niech A będzie przestrzenią metryczną zwartą. Będziemy mówili, że zanurzenia $f, g\colon A \to Q$ są *topologicznie równoważne* (krótko: *równoważne*), jeśli istnieje homeomorfizm h kostki Hilberta Q na siebie taki, że $g = hf$.

Rozpatrzmy najpierw dwa przykłady ilustrujące sytuacje skrajne.

PRZYKŁAD 1. $A = Q$. Dla $x = (x_1, x_2, \ldots) \in Q$ połóżmy $f_0(x) = x$, $f_1(x) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $f_2(x) = (0, 0, x_1, x_2, \ldots)$, ... Wówczas f_n: $A \to Q$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ są zanurzeniami, i dla $n \neq m$ odwzorowania f_n i f_m nie są równoważne.

Dowód wynika stąd, że $Q \setminus f_0(A) = \emptyset$ oraz, dla $n \geqslant 1$, zbiór $Q \setminus f_n(A)$ ma typ homotopii sfery $n-1$ wymiarowej. (Przypominamy, że standardowa kostka Hilberta Q jest iloczynem kartezjańskim odcinków $[-1; 1]$.)

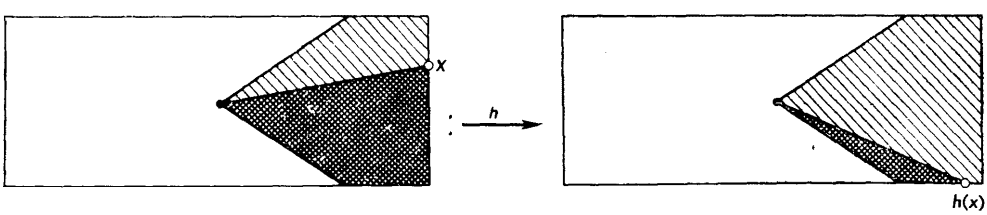
PRZYKŁAD 2. $A = \{y\}$ — zbiór jednopunktowy. Wówczas każde dwa zanurzenia f, g: $A \to Q$ są topologicznie równoważne.

Powyższy fakt jest oczywiście równoważny *topologicznej jednorodności* kostki Hilberta: dla $a, b \in Q$ istnieje homeomorfizm h kostki Hilberta Q na siebie taki, że $f(a) = b$. Ten fakt został udowodniony jeszcze przez Kellera [24] w 1931 r. Niżej naszkicujemy bardziej współczesny dowód topologicznej jednorodności kostki Q, oparty na idei M. K. Forta [18]. Dowód ten ilustruje podejście funkcjonalne — rozważania na poziomie przestrzeni odwzorowań badanych obiektów, które okazało się owocne również w innych zagadnieniach topologii geometrycznej.

Niech s oznacza *pseudo-wnętrze* standardowej kostki Hilberta, tzn. przeliczalny iloczyn kartezjański odcinków otwartych $(-1; 1)$. Jest jasne, że dla $a, b \in s$ istnieje homeomorfizm h kostki Q, który przeprowadza a w b (iloczyn kartezjański odpowiednich homeomorfizmów działających w $[-1; 1]$). Zatem, dla wykazania jednorodności Q, należy dowieść, że dla każdego punktu $a \in Q$ istnieje homeomorfizm h, taki że $h(a) \in s$. Oznaczmy przez $\mathrm{Auth}\, Q$ przestrzeń wszystkich homeomorfizmów Q na siebie, opatrzoną metryką

$$\varrho(g, h) = \sup_{x \in Q} d\big(g(x), h(x)\big) + \sup_{x \in Q} d\big(g^{-1}(x), h^{-1}(x)\big),$$

gdzie d jest metryką (1). Metryka ϱ jest zupełna. Wyznacza ona na $\mathrm{Auth}\, Q$ topologię, która pokrywa się z topologią indukowaną przez zwarto-otwartą topologię przestrzeni



odwzorowań Q w Q. Co więcej, $\mathrm{Auth}\, Q$ jest w tej topologii grupą topologiczną, tzn. działanie g, $h \to g^{-1}h$ jest ciągłe. Połóżmy $W_n = \{x \in Q: |x_n| = 1\}$. Oczywiście $Q \setminus s = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Dla ustalonego $a \in Q$, oznaczmy $M_n = \{h \in \mathrm{Auth}\, Q: h(a) \notin W_n\}$. Ponieważ W_n są domknięte w Q, więc zbiory M_n są otwarte w $\mathrm{Auth}\, Q$. Naszym zadaniem jest dowieść, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$. W tym celu, na mocy klasycznego twierdzenia Baire'a, wystarczy pokazać, że każdy M_n jest gęsty w $\mathrm{Auth}\, Q$. Niech $x = f(a)$,

gdzie $f \in \operatorname{Auth} Q$, niech $\varepsilon > 0$ i niech e oznacza homeomorfizm tożsamościowy kostki Q. Dowód sprowadza się do znalezienia homeomorfizmu $h \in \operatorname{Auth} Q$ takiego, że $\varrho(h, e) < \varepsilon$ i $h(x) \in Q \setminus M_n$. Można założyć, że $x \in M_n$ (w przeciwnym razie wzięlibyśmy $h = e$). Wybierzmy $m > n$ tak, aby $2^{-m} < \varepsilon/4$. Określamy teraz żądany homeomorfizm h w ten sposób, że działa on tylko na współrzędnej n-tej i m-tej, tak jak pokazano na rys. 1, pozostawiając pozostałe współrzędne niezmienione. Rzut kostki Q na płaszczyznę osi n, m przedstawiono na rysunku jako prostokąt dla wyobrażenia faktu, że w metryce (1) długości krawędzi kostki są różne, przy czym krawędzie równoległe do m-tej osi mają długość $2 \cdot 2^{-m}$, a więc mniejszą niż $\varepsilon/2$.

Również w oparciu o twierdzenie Baire'a lecz w sposób nieco bardziej wyrafinowany można pokazać, że jeśli A jest przestrzenią zwartą przeliczalną, to każde dwa zanurzenia A w Q są równoważne (szczególny przypadek twierdzenia Forta [18] dotyczącego przeliczalnych iloczynów kartezjańskich rozmaitości z brzegiem). J. Pollard [29] pokazała, że zachodzi również implikacja odwrotna:

TWIERDZENIE POLLARD. *Przestrzeń metryczna zwarta A ma tę własność, że każde dwa jej zanurzenia w Q są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy A jest przeliczalne.*

Dowód tego twierdzenia opiera się na rezultacie Raymonda Wonga [42] o istnieniu nierównoważnych zanurzeń zbioru Cantora w kostce Hilberta.

Jest interesujące, że istnieje pewna podklasa klasy zanurzeń kompaktów w Q, w obrębie której zanurzenie każdego kompaktu jest jednoznaczne. Są to tzw. Z-zanurzenia.

DEFINICJA. Niech $\operatorname{Map} Q$ oznacza przestrzeń odwzorowań ciągłych kostki Q na siebie z metryką $\bar{d}(f, g) = \sup_{x \in Q} d(f(x), g(x))$. Mówimy, że zbiór $L \subset Q$ jest *typu Z* (lub jest *Z-zbiorem*), jeśli

$$\{f \in \operatorname{Map} Q : f(Q) \subset Q \setminus L\}$$

jest otwartym gęstym podzbiorem przestrzeni $\operatorname{Map} Q$. Zanurzenie $f: A \to Q$ jest *Z-zanurzeniem*, jeśli $f(A)$ jest typu Z.

Pojęcie Z-zbioru zostało wprowadzone przez Andersona [2]. Podana tutaj definicja pochodzi od H. Toruńczyka [31] i jest modyfikacją (równoważną) oryginalnej definicji Andersona.

Z podanej definicji widać od razu, że Z-zbiory są domknięte w Q; klasa Z-zbiorów jest niezmiennicza względem homeomorfizmów Q na siebie. Jasne jest także, że każdy podzbiór domknięty pseudownętrza s kostki, jak również każdy podzbiór domknięty $Q \setminus s$ jest typu Z; w szczególności zbiory jednopunktowe są Z-zbiorami. Ponieważ istnieją podzbiory $Q \setminus s$ homeomorficzne z Q (np. ściana kostki Q), więc na mocy twierdzenia Urysohna dla każdego kompaktu A istnieje Z-zanurzenie w Q. Każde dwa Z-zanurzenia A w Q są równoważne. Fakt ten jest równoważny następującemu twierdzeniu Andersona z pracy [2] z 1967 r.

TWIERDZENIE ANDERSONA O PRZEDŁUŻANIU HOMEOMORFIZMÓW. *Jeśli A i B są podzbiorami Q typu Z, to każdy homeomorfizm f zbioru A na B ma przedłużenie F, które jest homeomorfizmem Q na siebie.*

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z następujących dwóch głębokich lematów, pochodzących również od Andersona:

LEMAT A. *Jeśli A i B są homeomorficznymi podzbiorami pseudownętrza s, f jest homeomorfizmem A na B, to istnieje homeomorfizm F kostki Q taki, że $f(x) = F(x)$ dla $x \in A$ oraz $F(s) = s$.*

LEMAT B. *Dla każdego Z-zbioru $A \subset Q$ istnieje homeomorfizm g kostki Q na siebie taki, że $g(A) \subset s$.*

Najbardziej pracochłonny jest dowód Lematu B. Elegancki „funkcjonalny" wariant tego dowodu pochodzi od H. Toruńczyka [33].

Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą. Na mocy twierdzenia Andersona o przedłużaniu homeomorfizmów, jeśli $f, g\colon X \to Q$ są Z-zanurzeniami, to $Q \setminus f(X)$ jest homeomorficzne z $Q \setminus g(X)$, tzn. typ homeomorficzny dopełnienia obrazu kompaktu X przy Z-zanurzeniu nie zależy od wyboru tego zanurzenia, a więc stanowi niezmiennik topologiczny kompaktu. Jak pokazał niedawno T. Chapman, niezmiennik ten pokrywa się z tzw. kształtem Borsuka [13], będącym modyfikacją typu homotopii.

Dla niektórych zastosowań ważne jest następujące wzmocnienie twierdzenia o przedłużaniu homeomorfizmów (Bessaga–Pełczyński [10], W. Barit [6]).

TWIERDZENIE O ESTYMOWANYM PRZEDŁUŻANIU HOMEOMORFIZMÓW. *Niech A będzie ustalonym Z-zbiorem w Q. Oznaczmy przez Z^0 przestrzeń wszystkich Z-zanurzeń A w Q z topologią wyznaczoną przez metrykę* (2). *Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ i $F \in \operatorname{Auth} Q$ istnieje $\delta > 0$ takie, że każde Z-zanurzenie $g\colon A \to Q$ spełniające warunek $\bar{d}(g, F_{|A}) < \delta$ ma przedłużenie $G \in \operatorname{Auth} Q$ takie, że $\varrho(G, F) < \varepsilon$ (ϱ jest metryką* (1)).

Ciekawy abstrakcyjny schemat uzyskiwania estymowanych przedłużeń homeomorfizmów w przypadku istnienia zwykłych przedłużeń zaproponował Toruńczyk [32]. Jego metoda daje zarazem najprostszy dowód twierdzenia sformułowanego wyżej.

Nasuwa się pytanie czy istnieje ciągłe odwzorowanie $\varphi\colon Z^0(A) \to \operatorname{Auth} A$ takie, że dla każdego $f \in Z^0(A)$ homeomorfizm $\varphi(f)$ jest przedłużeniem f. Jak zauważył Fadell [17] w oparciu o własność punktu stałego dla Q, odpowiedź jest negatywna już w przypadku, gdy A jest zbiorem jednopunktowym.

Warto jeszcze wymienić następujący rezultat J. Westa [37]:

Jeśli A jest ustalonym Z-zbiorem w Q, to istnieje izomorfizm φ grupy topologicznej $\operatorname{Auth} A$, *homeomorfizmów A na siebie, na podgrupę grupy* $\operatorname{Auth} Q$ *taki, że $\varphi(f)$ jest przedłużeniem f dla każdego $f \in \operatorname{Auth} A$.*

2. Zbiory typu Z_σ i ich zastosowania. *Z biorem typu Z_σ* (krótko: *Z_σ-zbiorem*) będziemy nazywali podzbiór kostki Hilberta, który jest sumą przeliczalnego ciągu Z-zbiorów. Z definicji Z-zbiorów, zupełności przestrzeni $\operatorname{Map} Q$ oraz z twierdzenia Baire'a wynika, że podzbiór $A \subset Q$ jest typu Z_σ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest F_σ w Q i $\{h \in \operatorname{Map} Q\colon h(Q) \subset Q \setminus A\}$ jest gęsty w $\operatorname{Map} Q$.

Bardzo ważną własnością klasy zbiorów typu Z_σ jest istnienie w tej klasie zbio-

rów maksymalnych. Mówimy, że A jest maksymalnym zbiorem typu Z_σ, jeśli A jest typu Z_σ i dla każdego Z_σ-zbioru B zawierającego A istnieje homeomorfizm $h \in \operatorname{Auth} Q$ taki, że $h(B) = A$. Maksymalne zbiory typu Z_σ będziemy (także za Andersonem) nazywali *brzegami pozornymi* ([2]) kostki Hilberta.

PRZYKŁAD 3. *Pseudo-brzeg* $Q \setminus s$ oraz *wnętrze radialne*

$$\operatorname{rint} Q = \{x \in Q\colon \sup_n |x_n| < 1\}$$

są brzegami pozornymi kostki Q. (Oczywiście nadzbiory typu Z_σ pseudo-brzegu i wnętrza radialnego są również brzegami pozornymi.)

Powyższy przykład pochodzi od Andersona [2]–[4]; sprawdzenie maksymalności jest nietrywialne.

Ponieważ klasy Z-zbiorów, Z_σ-zbiorów i brzegów pozornych w Q są niezmiennicze względem homeomorfizmów Q na siebie, więc pojęcia te mają sens dla dowolnej kostki Hilberta, nie tylko dla standardowej. W dalszym ciągu, jeśli X, Y są przestrzeniami topologicznymi, $A \subset X$, $B \subset Y$, będziemy pisali $X \simeq Y$ jeśli X jest homeomorficzne z Y i $(X, A) \simeq (Y, B)$, jeśli istnieje homeomorfizm h przestrzeni X na Y taki, że $h(A) = B$. Zachodzi następujące ważne, chociaż banalne, twierdzenie.

TWIERDZENIE O RÓWNOWAŻNOŚCI BRZEGÓW POZORNYCH. *Jeśli* K_1 *i* K_2 *są kostkami Hilberta, a* A_1, A_2 *odpowiednio ich brzegami pozornymi, to*

$$(K_1, A_1) \simeq (K_2, A_2).$$

Twierdzenie to wystarczy dowodzić w przypadku: $K_1 = K_2 = Q$. Wówczas z maksymalności zbiorów A_1 i A_2 i z addytywności klasy zbiorów Z_σ, wynika istnienie homemorfizmów $h_i \in \operatorname{Auth} Q$ takich, że $h_i(A_i) = A_1 A_2$, $i = 1, 2$. Stąd $h = h_2 h_1$ przeprowadza A_1 na A_2.

Z twierdzenia sformułowanego przed chwilą i z Przykładu 3 wynika związek: $(Q, Q \setminus s) \simeq (Q, \operatorname{rint} Q)$, który można by nazwać własnością nicowania kostki Hilberta. W dalszym ciągu wynika stąd, że Q daje się przedstawić jako suma dwóch zbiorów rozłącznych, z których każdy ma strukturę nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowo metrycznej. Mianowicie pseudownętrze s jest homeomorficzne z przeliczalnym iloczynem kartezjańskim $R^{\aleph_0}$ prostych rzeczywistych R, zaś $Q \setminus s$ — homeomorficzne z rint Q, które jest homeomorficzne z podprzestrzenią ciągów ograniczonych w $R^{\aleph_0}$ (topologia produktowa). Istnieje jeszcze drugi nierównoważny rozkład tego typu. Nie wiadomo, czy rozkładów takich jest więcej.

Pojęcie wnętrza radialnego rozszerza się na dowolne zbiory wypukłe. Jeśli K jest zbiorem wypukłym (w jakiejkolwiek przestrzeni liniowej), to kładziemy

$$\operatorname{rint} K = \{x \in K : \forall\, y \in K\, \exists\ c > 0 \text{ takie, że } x + c(y - x) \in K\}.$$

Dla dalszych rozważań wyróżnimy pewną klasę zbiorów wypukłych zwartych.

([2]) Nazwa „brzeg pozorny" jest tłumaczeniem „apparent boundary" z pracy Andersona [3]. Inne nazwy: „cap set" [4], „Z-skeletoid" lub „Z-skeletonized set" ([7], [10], [33]), „Z-absorbing set" [34], „Z-pseudo-boundary" [19].

DEFINICJA. Zbiór wypukły K (położony w dowolnej przestrzeni liniowo-topologicznej) będziemy nazywali *przestrzenią Kellera*, jeśli K jest afinicznie homeomorficzny ze zwartym wypukłym nieskończenie wymiarowym podzbiorem przestrzeni Hilberta l_2 ciągów liczbowych sumowalnych z kwadratem. (Afiniczny homeomorfizm = homeomorfizm zachowujący kombinacje liniowe wypukłe.)

W szczególności zbiory spełniające założenia twierdzenia Kellera są przestrzeniami Kellera. Z twierdzenia tego wynika, że przestrzeń Kellera, z topologicznego punktu widzenia — to kostka Hilberta. Jednak będziemy interesowali się nie tylko strukturą topologiczną przestrzeni Kellera, lecz również geometryczną (afiniczną).

Twierdzenie [10] uogólnia Przykład 3, a zarazem twierdzenie Kellera:

UOGÓLNIONE TWIERDZENIE KELLERA. *Jeśli K jest przestrzenią Kellera taką, że* rint $K \neq \emptyset$ *to* rint K *jest brzegiem pozornym K i*

$$(K, \text{ rint } K) \simeq (Q \text{ rint } Q), \simeq (Q, Q \setminus s).$$

Druga teza jest oczywiście konsekwencją tezy pierwszej, Przykładu 3 i twierdzenia o równoważności brzegów pozornych.

Omówimy teraz pewne zastosowanie dwóch ostatnich twierdzeń.

A. Wyprowadzenie twierdzeń Andersona o homeomorfizmie l_2 z s i Kleego o homeomorfizmie przestrzeni Hilberta ze swoją domkniętą kulą jednostkową i sferą jednostkową.

Przypominamy, że l_2 jest przestrzenią ciągów $x = (x_n)$ liczb rzeczywistych takich, że $||x|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < \infty$. Będziemy rozpatrywali następujące podzbiory przestrzeni l_2:

$$B = \{x \in l_2 : ||x|| \leqslant 1\}, \quad B_+ = \{x \in B : x_1 \geqslant 0\},$$

$$S = \{x \in l_2 : ||x|| = 1\}, \quad S_+ = \{x \in S : x_1 \geqslant 0\}, \quad S_+^0 = \{x \in S : x_1 \geqslant 0\},$$

$$D = \{x \in B : x_1 = 0\}; \quad D_n = \{x \in D : ||x|| \leqslant 1 - 1/n\} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Dla każdego ograniczonego podzbioru A przestrzeni l_2 symbolem $\tilde{A}$ będziemy oznaczali ten sam zbiór A opatrzony topologią wyznaczoną przez metrykę

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x_n - y_n|$$

(która się pokrywa z tzw. słabą topologią). Zbiory $\tilde{B}$ i $\tilde{B}_+$ są przestrzeniami Kellera, gdyż są afinicznie homeomorficzne z elipsoidą $\left\{x \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 \leqslant 1\right\}$ i jej górną półelipsoidą, rozpatrywanymi w topologii normowej l_2. Dobrze wiadomo (sprawdzenie elementarne), że na sferze S przestrzeni Hilberta słaba topologia pokrywa się z topologią normową. Zatem

$$\tilde{S} \simeq S, \quad \tilde{S}_+ \simeq S_+, \quad \tilde{S}_+^0 \simeq S_+^0. \tag{3}$$

Mamy $B \setminus S = \operatorname{rint} B$, $B_+ \setminus S_+ = \operatorname{rint} B_+ \cup \bigcup_{n+1}^{\infty} D_n$, $B_+ \setminus S_+^0 = \operatorname{rint} B_+ \cup D$. Korzystając z uogólnionego twierdzenia Kellera i z faktu, że $\tilde{D}$ i $\tilde{D}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ są Z-zbiorami w $\tilde{B}_+$ wnioskujemy, że $\tilde{B} \setminus \tilde{S}$ jest brzegiem pozornym $\tilde{B}$, a $\tilde{B}_+ \setminus \tilde{S}_+$ i $\tilde{B}_+ \setminus \tilde{S}_+^0$ są brzegami pozornymi $\tilde{B}_+$, skąd

$$S \simeq S_+ \simeq S_+^0 \simeq S. \tag{5}$$

Łatwo widzieć, że $S_+ \simeq B$ oraz że S_+^0 jest homeomorficzne z kulą otwartą przestrzeni l_2 i z całą przestrzenią l_2. Otrzymujemy więc

$$s \simeq l_2 \quad \text{(Anderson [1])}, \tag{6}$$

$$S \simeq S_+ \simeq S_+^0 \simeq s \quad \text{(Klee [25])}. \tag{7}$$

B. Szkic dowodu [9] twierdzenia Kadeca [23] o równoważności topologiczne wszystkich ośrodkowych nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha.

Niech X będzie ośrodkową nieskończenie-wymiarową przestrzenią Banacha. Na mocy twierdzenia Kadeca o przenormowaniu ([9], IV), istnieją: norma $\|\cdot\|$ na X równoważna normie wyjściowej oraz ciąg (f_n) funkcjonałów liniowych ciągłych (jednakowo) na X, takie że na sferze jednostkowej $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ topologia normowa pokrywa się z topologią indukowaną przez metrykę

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|, \tag{8}$$

tzn. $\tilde{S}_X \simeq S_X$, gdzie S_X jest sferą jednostkową w metryce (8). Oznaczmy przez $\tilde{B}$ uzupełnienie przestrzeni metrycznej $\tilde{S}_X$ w metryce (8). Można dowieść, że $\tilde{B}$ jest przestrzenią Kellera, a $\tilde{B} \setminus S_X$ jej brzegiem pozornym. Zatem, na mocy twierdzenia o równoważności brzegów pozornych i wzoru (5), mamy $S_X \simeq \tilde{S}_X \simeq s \simeq S$, gdzie S jest sferą jednostkową przestrzeni l_2. Rozszerzając radialnie ten homeomorfizm wnosimy, że $X \simeq l_2$.

C. Topologiczna usuwalność zbiorów sigma-zwartych w l_2.

Będziemy mówili, że podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest usuwalny, jeśli $X \simeq X \setminus A$. Załóżmy, że A_n dla $n = 1, 2, \ldots$ są podzbiorami zwartymi l_2. Pokażemy, że

$$l_2 \simeq l_2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{9}$$

W samej rzeczy, traktujmy l_2 jako pseudo-wnętrze s kostki Q, wówczas wszystkie zbiory A_n jako zwarte podzbiory pseudo-wnętrza są Z-zbiorami w Q. Z maksymalności pseudo-brzegu (Przykład 3) wynika homeomorfizm par $(Q, Q \setminus s) \simeq (Q, Q \setminus s \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$, skąd $s \simeq s \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, co jest równoważne wzorowi (9).

D. Homeomorfizm przestrzeni funkcji mierzalnych z przestrzenią l_2.

Niech X będzie przestrzenią metryczną. Funkcję $f : [0;1] \to X$ nazywamy *mie-*

rzalną, jeśli przeciwobraz przy tej funkcji dowolnego zbioru borelowskiego w X jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a w $[0; 1]$. Symbolem M_X oznaczymy przestrzeń wszystkich (klas równoważności) funkcji mierzalnych $f: [0; 1] \to X$ z topologią zbieżności według miary. Topologia ta może być, na przykład, wyznaczona za pomocą metryki:

$$d(f, g) = \int_0^1 |\varrho(f(x), g(x))|\, dx, \tag{10}$$

gdzie ϱ jest dowolną ograniczoną metryką zgodną z topologią X.

W pracy [11] udowodnione jest twierdzenie:

Jeśli X jest przestrzenią metryczną, zupełną, ośrodkową, mającą więcej niż jeden punkt, to $M_X \simeq l_2$.

Pierwszym etapem dowodu jest pokazanie, że przestrzeń X jest homeomorficzna z pewnym domkniętym, liniowo niezależnym podzbiorem sfery S przestrzeni l_2. W związku z tym w dalszych rozważaniach X jest utożsamiana z podzbiorem sfery S. Pozwala to utożsamiać M_X z podzbiorem przestrzeni Hilberta $L_2[l_2]$, funkcji mierzalnych $f: [0; 1] \to l_2$ i całkowalnych z kwadratem normy, złożonym z funkcji o wartościach w X. Przy tym utożsamieniu M_X jest podzbiorem sfery jednostkowej przestrzeni $L_2[l_2]$, a zatem normowa topologia M_X (=topologii wyznaczonej przez metrykę (10)) pokrywa się ze słabą topologią. Następnie rozważa się przestrzeń Kellera

$$D = \text{słabe domknięcie } M_X \text{ w } L_2[l_2].$$

Na koniec dowodzi się, że $D \setminus M_X$ jest brzegiem pozornym D (wykorzystując m. in. liniową niezależność X w l_2). Ta ostatnia część dowodu jest nietrywialna.

Ciekawy jest następujący wniosek z twierdzenia o przestrzeniach M_X:

Każda ośrodkowa grupa metryczna zupełna G jest podgrupą domkniętą pewnej grupy homeomorficznej z przestrzenią Hilberta l_2.

Dla dowodu zauważmy, że M_G ma naturalną strukturę grupową (działania na wartościach funkcji) i że G może być utożsamione z podgrupą M_G złożoną z (klas równoważności) funkcji stałych.

Niech K będzie przestrzenią Kellera, $x \in K$. *Aurelolą* punktu x względem K będziemy nazywali zbiór

$$\operatorname{aur}_x K = \bigcup_{y \in K} [x; y),$$

gdzie $[x; y) = \{tx + (1-t)y: 0 \leqslant t < 1\}$ — odcinek jednostronnie domknięty. Punkt x nazwiemy *centralnym*, jeżeli $\operatorname{aur}_x K$ jest brzegiem pozornym K. (Istnieją przestrzenie Kellera, których każdy punkt jest centralny: np. kostka standardowa Q.) Zachodzą następujące fakty [11]:

(α) Każda przestrzeń Kellera K ma punkt centralny, który nie jest punktem ekstremalnym dla K.

(β) Jeśli K jest przestrzenią Kellera, zaś A — zbiorem typu Z_σ w K takim, że $K \setminus A$ składa się z samych punktów ekstremalnych zbioru K, to A jest brzegiem pozornym K.

Przypominamy, że $y \in K$ nazywa się punktem ekstremalnym zbioru K, jeśli y nie jest środkiem żadnego odcinka o końcach w K.

Własności (α) i (β) mogą być stosowane do wyznaczania brzegów pozornych K. Dotyczy to zwłaszcza przypadku, gdy $\operatorname{rint} K$ jest puste i dlatego uogólnione twierdzenie Kellera ze str. 11 nie ma zastosowania.

Naszkicowana tu metoda oparta na istnieniu zbiorów maksymalnych w klasie Z daje się stosować i dla innych klas zbiorów, zarówno w przypadku kostki Hilberta, jak też niektórych innych przestrzeni metrycznych zupełnych. Jednolity, abstrakcyjny schemat znajdowania zbiorów maksymalnych w takich klasach daje technika $\mathscr{K}$-szkieletów [10], [33] (por. też [42]) i zbiorów $\mathscr{K}$-pochłaniających [34] i [19]. Technika ta dostarcza zarazem stosunkowo prostych dowodów obu tez Przykładu 3, uogólnionego twierdzenia Kellera i własności (α) i (β).

3. Topologiczna podzielność. Q-rozmaitości. Obecnie omówimy niektóre zagadnienia dotyczące kostki Hilberta związane z własnością topologicznej podzielności. Do tej problematyki zalicza się też teoria Q-rozmaitości, niedawno rozwinięta w USA, głównie przez T. A. Chapmana. Tematyka ta znalazła już szereg interesujących zastosowań w różnych działach topologii: w teorii ANR'ów, przy badaniu niezmienników topologicznych wielościanów i PL-rozmaitości, itd.

Obecnie wykład nasz będzie bardziej skondensowany i mniej elementarny niż w poprzednich paragrafach; będziemy zakładać, że Czytelnik jest obznajomiony z takimi pojęciami, jak: *retrakt absolutny* (AR), *retrakt absolutny otoczeniowy* (ANR), *wielościan*, *kompleks symplicjalny*, *typ homotopii*, *prosty typ homotopii*, itp.

Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Będziemy mówili, że X jest *dzielnikiem topologicznym* przestrzeni Y i pisali $X|Y$, jeśli istnieje przestrzeń Z taka, że zachodzi homeomorfizm: $Y \simeq X \times Z$.

Każdą metryzowalną przestrzeń topologiczną M, która ma pokrycie otwarte zbiorami homeomorficznymi z otwartymi podzbiorami kostki Hilberta, będziemy nazywali *Q-rozmaitością*. (Pokrycie takie będziemy nazywali *atlasem*, a jego elementy — *mapami*.) Powiemy, że Q-rozmaitość M jest *R^+-stabilna*, jeśli $M \times [0; 1)$ jest homeomorficzne z M.

Z powyższej definicji wynika, że każdy punkt x Q-rozmaitości M ma otoczenie otwarte homeomorficzne z przestrzenią $Q \times R^n$ ($n < \infty$), która jest retraktem absolutnym dla przestrzeni metrycznych. Stąd, na mocy twierdzenia Hannera (por. [12], p. 99, (10.4)), mamy

3.1. *Każda Q-rozmaitość jest ANR'em.*

R. D. Anderson i R. M. Schori udowodnili następujące niebanalne twierdzenie:

3.2. *Kostka Hilberta Q jest dzielnikiem topologicznym każdej Q-rozmaitości.*

Interesujące jest pytanie: Jakie przestrzenie topologiczne X są dzielnikami kostki Hilberta? Oczywiście, ponieważ Q jest retraktem absolutnym, więc każdy dzielnik kostki Hilberta musi być zwartym AR'em. Szereg faktów zdaje się potwierdzać następującą hipotezę:

(H) *Jeśli X jest zwartym AR'em, to $X\times Q \simeq Q$* ([3]).

Następujące trzy proste konsekwencje twierdzeń 3.1, 3.2 oraz hipotezy (H) są prawdziwe:

3.3. *Każda homotopijnie trywialna zwarta Q-rozmaitość jest homeomorficzna z Q* (Chapman [15]).

3.4. *Jeśli K jest przeliczalnym, lokalnie skończonym kompleksem symplicjalnym, to $K\times Q$ jest Q-rozmaitością* (West [38]).

3.5. *Jeśli M jest zwartą Q-rozmaitością, to $M\times[0;1)$ jest homeomorficzne z otwartym podzbiorem Q; sama Q-rozmaitość M ma zawsze atlas złożony z dwóch map.*

(To ostatnie twierdzenie, bez założenia zwartości M, zostało udowodnione przez T. A. Chapmana [14].)

Jak pokazał H. Toruńczyk [35], [36], prawdziwy jest też następujący odpowiednik hipotezy (H) dla przestrzeni Hilberta:

3.6. *Jeśli X jest retraktem absolutnym dla przestrzeni metrycznych zupełnych, to $X\times H \simeq H$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta o odpowiednim charakterze gęstości.*

T. A. Chapman ([15] i [16]) udowodnił twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3.4, a mianowicie:

3.7. *Każdą Q-rozmaitość M można przedstawić w postaci:*

$$(*) \qquad M \simeq K\times Q,$$

gdzie K jest przeliczalnym, lokalnie skończonym kompleksem symplicjalnym.

Jeśli M jest Q-rozmaitością zwartą, to kompleks symplicjalny K figurujący w przedstawieniu (*) jest skończony (tzn. K jest zwartym wielościanem).

Kombinując to ostatnie twierdzenie z wynikami Westa [36], Chapman [15] uzyskał klasyfikację topologiczną zwartych Q-rozmaitości:

3.8. *Na to, ażeby dwie zwarte Q-rozmaitości M_1 i M_2 były homeomorficzne, potrzeba i wystarcza, aby wielościany zwarte K_1 i K_2 występujące w przedstawieniu (*) tych rozmaitości miały ten sam prosty typ homotopii.*

(Oryginalne sformułowanie Chapmana jest mocniejsze i ma charakter funktorialny: „Jeśli $f: K_1\to K_2$ jest odwzorowaniem ciągłym wielościanów, to f jest prostą homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $f\times id: K_1\times Q\to K_2\times Q$ jest homotopijne z homeomorfizmem".)

Następnie w pracy [16] Chapman podaje pełną klasyfikację topologiczną dowolnych Q-rozmaitości, w terminach tzw. nieskończonego prostego typu homotopii, uogólniającego prosty typ homotopii wielościanów:

([3]) J. E. West zauważył, że własności $X\times Q \simeq Q$ oraz $X|Q$ są równoważne. Jeśli bowiem $X\times Y \simeq Q$, to $X^\infty\times Y^\infty \simeq Q^\infty \simeq Q$, skąd $X\times(X^\infty\times Y^\infty) \simeq Q$ czyli $X\times Q \simeq Q$.

3.9. *Na to by Q-rozmaitości M_1 i M_2 były homeomorficzne, potrzeba i wystarcza, aby kompleksy symplicjalne K_1 i K_2 figurujące w przedstawieniu (*) tych rozmaitości miały ten sam nieskończony prosty typ homotopii.*

W szczególnym przypadku R^+-stabilnych Q-rozmaitości mamy również

3.10. *R^+-stabilne Q-rozmaitości M_1 i M_2 są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam typ homotopii.*

To twierdzenie pochodzi też od Chapmana (praca [14]); jest ono pełnym odpowiednikiem wcześniejszego twierdzenia Hendersona–Schoriego [21] (por. Henderson [20]) o klasyfikacji topologicznej przez typ homotopii rozmaitości nieskończenie wymiarowych modelowanych na przestrzeniach liniowo metrycznych.

* * *

Inna ciekawa problematyka — to rozpoznawanie kostek Hilberta wśród konkretnych, "istniejących w przyrodzie" przestrzeni topologicznych. Tu również przydaje się pojęcie podzielności topologicznej. Dla przykładu udowodnimy następujące proste twierdzenie:

3.11. *Jeśli X jest przestrzenią topologiczną taką, że $Q|X$ i $X|Q$, to $X \simeq Q$.*

Dowód. Z założenia twierdzenia wynika istnienie przestrzeni W i Z takich, że $X \simeq W \times Q$, $Q \simeq X \times Z$. Ponieważ, oczywiście $Q \simeq Q \times Q \simeq Q^\infty$, więc $Q \simeq X \times W \simeq (X \times W)^\infty \simeq X^\infty \times W^\infty \simeq X \times (X^\infty \times W^\infty) \simeq X \times Q \simeq W \times Q \times Q \simeq W \times Q \simeq X$.

Znacznie głębsze są następujące dwa twierdzenia:

3.12. *Jeśli $X_i|Q$ dla $i = 1, 2, \ldots$ i przestrzenie X_i mają więcej niż jeden punkt, to $\prod_{i=1}^{\infty} X_i \simeq Q$.* (West [38].)

3.13. *Przestrzeń 2^I podzbiorów domkniętych odcinka* [0; 1] *(z topologią indukowaną przez metrykę Hausdorffa) jest homeomorficzna z Q.* (Schori–West [30].)

Dowód rezultatu 3.13 korzysta też, między innymi, z pewnych faktów dotyczących podzielności topologicznej.

Dodatek

Szkic dowodu twierdzenia Kellera. Niech M będzie podzbiorem wypukłym zwartym przestrzeni l_2. Mówimy, że M jest *eliptycznie wypukły*, jeśli każdy funkcjonał liniowy ciągły na l_2, który nie jest stały na M, osiąga na M maksimum w dokładnie jednym punkcie. Twierdzenie Kellera rozbija się na dwa lematy: C i D.

LEMAT C. *Każdy podzbiór zwarty wypukły $K \subset l_2$ jest homeomorficzny ze zbiorem eliptycznie wypukłym.*

Dowód. Niech $\{y_n: n = 1, 2, \ldots\}$ będzie podzbiorem gęstym w K i niech $y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} y_n$. Homeomorfizm przeprowadzający K na zbiór eliptycznie wypukły może być określony wzorem $f(x) = \dfrac{\|x - y_0\|}{1 + \|x - y_0\|}$ dla $x \in K$.

LEMAT D. *Każde dwa nieskończenie wymiarowe, zwarte i eliptycznie wypukłe podzbiory l_2 są ze sobą homeomorficzne.*

Szkic dowodu. Niech M będzie nieskończenie wymiarowym zwartym i eliptycznie wypukłym podzbiorem l_2. Niech (v_n) będzie układem ortonormalnym w l_2 złożonym z wektorów, które są równoległe do odcinków zawartych w M i maksymalnym o tej własności. Dla każdego $x \in M$ określamy ciąg zbiorów: $M_0(x) = M$, $M_n(x) = \{y \in M : \langle y, v_i\rangle = \langle x, v_i\rangle$ dla $i \leqslant n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ (symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni l_2). Następnie określamy *n-tą współrzędną Kellera* punktu x wzorem

$$k_n(x) = \frac{\langle x, v_n\rangle}{\max\{\langle z-y, v_n\rangle : y, z \in K_{n-1}(x)\}}$$

dla tych wartości n, dla których mianownik jest różny od zera.

Pokazuje się, że współrzędnymi Kellera punktu x mogą być albo ciągi nieskończone liczb przedziału otwartego (0; 1), albo ciągi skończone z [0; 1], dla których tylko ostatni wyraz jest końcem przedziału, oraz że każdy ciąg o powyższej własności jest ciągiem współrzędnych Kellera dokładnie jednego punktu zbioru M. Pokazuje się dalej, że odwzorowanie pomiędzy dwoma nieskończenie wymiarowymi, zwartymi i eliptycznie wypukłymi podzbiorami l_2, stawiające w odpowiedniości punkty o jednakowych współrzędnych, jest żądanym homeomorfizmem. (Dowody tych faktów są elementarne, ale dość żmudne).

Bibliografia

[1] R. D. Anderson, *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), str. 515–519.

[2] — *On topological infinite deficiency*, Michigan Math. J. 14 (1967), str. 365–383.

[3] — *Strongly negligible sets in Frechet manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), str. 64–67.

[4] — *On sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. (w druku).

[5] — and R. M. Schori, *Factors of infinite-dimensional manifolds*, ibidem 42 (1969), str. 315–330.

[6] W. Barit, *Small extension of small homeomorphisms*, Amer. Math. Soc. Notices 6 (1969), str. 295.

[7] C. Bessaga, *Topics from infinite dimensional topology; K-skeletons and Anderson's Z-sets*, Mathematics Institute Aarhus University, Lecture Notes Series 8 (1969).

[8] — *Negligible stes in linear topological spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. et phys. 16 (1968), str. 17–19.

[9] — and A. Pełczynski, *A topological proof that every separable Banach space is homeomorphic to a countable product of lines*, ibidem 7 (1969), str. 487–493.

[10] — — *The estimated extension theorem, homogeneous collections and skeletons, and their applications to the topological classification of linear metric spaces and convex sets*, Fund. Math. 69 (1970), str. 53–90.

[11] — — *On spaces of measurable functions*, Studia Math. 44 (1972), str. 597–615.

[12] K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1967.

[13] — *Concerning homotopy properties of compacta*, Fund. Math. 62 (1968), str. 223–254.

[14] T. A. Chapman, *On the structure of Hilbert cube manifolds*, Compositio Math. 24 (1972), str. 329–353.

[15] — *Topological invariance of Whitehead torsion*, Amer. J. Math. (w druku).
[16] — *Classification of Hilbert cube manifolds and infinite simple homotopy type*, Topology (w druku).
[17] E. Fadell, *A note on the non-existence of strongly homogeneous AR's*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. et phys. 12 (1964), str. 531–535.
[18] M. K. Fort, *Homogenity of infinite products of manifolds with boundary*, Pacific J. Math. 12 (1962), str. 879–884.
[19] R. Geoghegan and R. R. Summerhill, *Pseudo-boundaries and pseudo-interiors in Euclidean spaces and topological manifolds* (w druku).
[20] D. W. Henderson, *Stable classification of infinite-dimensional manifolds by homotopy type*, Inventiones Math. 12 (1971), str. 45–56; *Corrections and extensions of two papers about infinite-dimensional manifolds*, General Topology and Appl. 1 (1971), str. 321–327.
[21] — and R. M. Schori, *Topological classification of infinite-dimensional manifolds by homotopy type*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), str. 121–124.
[22] D. Hilbert, Göttingen Nachrichten 1906, str. 200 i 439.
[23] M. I. Kadec (И. М. Кадец) *Доказательство гомеоморфизма всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха*, Функциональный Анализ и Прилож. 1 (1967), str. 53–62.
[24] O. H. Keller, *Die Homoiomorphie der kompakten Mengen in Hilbertschen Raum*, Math. Ann. 105 (1931), str. 748–758.
[25] V. L. Klee, *Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), str. 10–40.
[26] — *Some topological properties of convex sets*, ibidem 78 (1955), str. 30–45.
[27] K. Maurin, *Metody przestrzeni Hilberta*, Warszawa 1959.
[28] W. Mlak, *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, Warszawa 1972.
[29] J. Pollard L'enasburg, *Absolute Z-sets*, Fund. Math. 85 (1974), str. 29–39.
[30] R. M. Schori and J. E. West, 2^I *is homeomorphic to the Hilbert cube*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), str. 402–406.
[31] H. Toruńczyk, *Remarks on Anderson's paper "On topological infinite deficiency"*, Fund. Math. 66 (1970), str. 393–401.
[32] — *On estimated extensions of homeomorphisms in metric spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. et phys. 18 (1970), str. 13–16.
[33] — *Skeletonized sets in complete metric spaces and homeomorphisms of the Hilbert cube*, ibidem 18 (1970), str. 119–126.
[34] — *Skeletons and absorbing sets in complete metric spaces* (w przygotowaniu).
[35] — *Compact absolute retracts as factors of the Hilbert space*, Fund. Math. 83 (1973), str. 75–84.
[36] — *Absolute retracts as factors of normed linear spaces*, ibidem (w druku).
[37] J. E. West, *Extending certain transformation group action in separable infinite-dimensional Frechet spaces and the Hilbert cube*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), str. 1015–1019.
[38] — *Infinite products which are Hilbert cubes*, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), str. 1–25.
[39] — *Mappings cylinders of Hilbert cube factors*, General Topology and Appl. 1 (1971), str. 111–125.
[40] — *The subcontinua of a dendron form a Hilbert cube factor*, Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972), str. 603–608.
[41] R. Y. T. Wong, *On homeomorphisms of certain infinite-dimensional product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967), str. 148–154.
[42] — *A wild Cantor set in the Hilbert cube*, Pacific J. Math. 24 (1968), str. 189–193.