ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVIII (1974)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ROMAN DUDA (Wrocław)

O hipotezie Poincarégo

1. Wstęp. Topologia jest dyscypliną niejednolitą i wyróżnić w niej można kilka nurtów, wśród nich topologię rozmaitości i blisko z nią związaną pochodzeniem i zainteresowaniami topologię algebraiczną. Obie zostały zapoczątkowane w latach 1895–1904 traktatem Poincarégo [30] i pięcioma uzupełnieniami do niego [31] –[35]. Idea Poincarégo polegała na badaniu rozmaitości środkami algebraicznymi i taki charakter miało sformułowane w piątym uzupełnieniu [35] przypuszczenie, któremu nadano później nazwę hipotezy Poincarégo. W ciągu kilkudziesięciu lat, jakie minęły od pojawienia się traktatu Poincarégo, topologia rozmaitości rozwinęła się w dużą dyscyplinę. Rozwiązano wiele trudnych i głębokich zagadnień, osiągnięto wspaniałe i częstokroć nieoczekiwane wyniki, rozwinięto nowe i bardzo silne metody, a hipoteza Poincarégo pozostaje nietknięta jak rafa, o którą rozbijają się najwięksi i wokół której narasta legenda.

Celem tego artykułu jest przedstawienie tej hipotezy i badań wokół niej rozwiniętych.

Zacznijmy od przypomnienia podstawowych określeń. *Rozmaitością wymiaru* n nazywa się przestrzeń metryczną ośrodkową M^n, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z n-wymiarową przestrzenią euklidesową R^n. Przykłady rozmaitości: przestrzeń euklidesowa R^n, sfera S^2, płaszczyzna rzutowa P^2, torus $T^2 = S^1 \times S^1$, sfera S^3 itp.

Rozmaitość zwarta nazywa się *zamkniętą*.

Rozmaitością wymiaru n z brzegiem nazywa się przestrzeń metryczną ośrodkową M^n, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z n-wymiarową kulą domkniętą D^n. Każda rozmaitość jest więc rozmaitością z brzegiem, ale nie na odwrót. Będziemy używali symbolu $\operatorname{int} M^n$ na oznaczenie zbioru tych punktów rozmaitości M^n, które mają otoczenie homeomorficzne z R^n oraz symbolu ∂M^n na oznaczenie brzegu $\partial M^n = M^n - \operatorname{int} M^n$. Oczywiście, brzeg może być pusty. Jeśli jednak $\partial M^n \neq \emptyset$, to ∂M^n jest wówczas rozmaitością wymiaru $n-1$. Przykłady rozmaitości z brzegiem: kula D^n (brzeg ∂D^n jest sferą S^{n-1}), pełny torus $S^1 \times D^2$ (brzeg jest torusem $S^1 \times S^1$) itp.

Sympleksem wymiaru n w R^m, gdzie $m \geqslant n$, nazywa się wypukłą otoczkę $n+1$

punktów w R^m, które nie leżą w jednej $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyźnie w R^m. Wypukła otoczka dowolnego podzbioru tego układu punktów też jest sympleksem; nazywa się ją *ścianą* wyjściowego sympleksu. Ściana wymiaru 0 nazywa się *wierzchołkiem*. Sympleksami wymiaru 1 są odcinki, wymiaru 2 — trójkąty i wymiaru 3 — czworościany. Ścianami sympleksu wymiaru 3 są: cały czworościan (ściana wymiaru 3), jego ściany geometryczne (ściany wymiaru 2), krawędzie (ściany wymiaru 1) i wierzchołki (ściany wymiaru 0).

Kompleksem geometrycznym wymiaru n nazywa się przestrzeń metryczną ośrodkową X, która jest lokalnie skończoną sumą sympleksów takich, że jeśli dwa z nich się przecinają, to ich część wspólna jest ścianą każdego z nich. Rodzinę tych sympleksów oraz wszystkich ich ścian nazywa się także *triangulacją przestrzeni X*. Jeśli X jest ponadto rozmaitością (z brzegiem), to mówimy o *rozmaitości (z brzegiem) z triangulacją*.

Podstawową zaletą kompleksów geometrycznych (triangulacji) jest skończony ich opis polegający na wyliczeniu wierzchołków sympleksów należących do kompleksu i wypisaniu tych zbiorów wierzchołków, na których rozpięte są sympleksy. Opis taki wyznacza kompleks z dokładnością do homeomorfizmu. Wadą jest to, że przestrzeń (rozmaitość) może mieć wiele triangulacji. Triangulacje grają jednak tylko rolę pomocniczą, podobnie jak układy współrzędnych w geometrii analitycznej; typowe postępowanie w topologii rozmaitości polega na znajdowaniu za ich pomocą niezmienników topologicznych, tzn. takich, które dla dowolnej innej triangulacji tej samej rozmaitości są takie same, a więc które zależą nie od przypadkowej triangulacji, dla jakiej zostały znalezione, lecz od rozmaitości, której triangulacje rozpatrujemy. Znanym przykładem takiego niezmiennika jest *charakterystyka Eulera–Poincarégo* rozmaitości M^n,

$$\chi(M^n) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n.$$

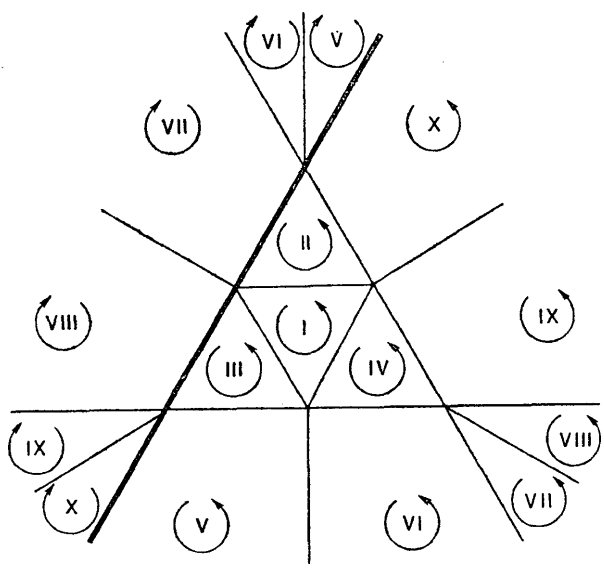
gdzie a_k jest ilością sympleksów wymiaru k dowolnej ustalonej triangulacji rozmaitości M^n.

2. Sformułowanie hipotezy i jej uogólnienia. Poincaré zapoczątkował pewną metodę otrzymywania niezmienników topologicznych rozmaitości, mających strukturę algebraiczną grupy. Mianowicie, mając daną rozmaitość M^n z brzegiem i jakąś triangulacją, konstruuje on pewien ciąg grup abelowych, o którym później J. W. Alexander dowiódł, że dla każdej innej triangulacji tej rozmaitości otrzyma się ciąg identyczny. Tak więc grupy Poincarégo nie zależą od triangulacji, za pomocą której zostały określone, lecz jedynie od samej rozmaitości M^n. Nazywa się je *grupami homologii rozmaitości* M^n i oznacza przez

$$H_0(M^n),\ H_1(M^n),\ \ldots,\ H_k(M^n),\ \ldots$$

Konstrukcja tych grup jest skomplikowana. Intuicyjnie, k-wymiarowa grupa homologii $H_k(M^n)$ informuje o ilości k-wymiarowych dziur oraz istnieniu i krotności k-wymiarowych skręceń. Mówimy, że rozmaitość M^n ma k-wymiarową dziurę, gdy — przy ustalonej jej triangulacji — istnieje k-wymiarowa podrozmaitość zamknięta,

złożona z sympleksów triangulacji, która nie jest brzegiem żadnej $(k+1)$-wymiarowej podrozmaitości rozmaitości M^n. W tym sensie sfera S^2 nie ma 1-wymiarowych dziur i ma 2-wymiarową dziurę (jej „wnętrze"), a torus $T^2 = S^1 \times S^1$ ma 1-wymiarowe dziury (równik i południk) i 2-wymiarową dziurę (swoje „wnętrze"). Podobnie mówimy, że rozmaitość M^n ma k-wymiarowe skręcenie, gdy istnieje k-wymiarowa podrozmaitość zamknięta B, złożona z sympleksów triangulacji, która sama nie jest brzegiem żadnej $(k+1)$-wymiarowej podrozmaitości, ale której pewna algebraiczna wielokrotność jest brzegiem algebraicznym (znaczy to mniej więcej tyle, że każdemu $(k+1)$-wymiarowemu sympleksowi triangulacji można nadać orientację w ten sposób, że orientacje indukowane na k-wymiarowych sympleksach zniosą się, jeśli taki sympleks nie należy do B i nie zniosą się, jeśli sympleks należy do B; w tym drugim przypadku różnica orientacji jednych i przeciwnych jest dla każdego sympleksu taka sama (na rys. 1 przedstawiającym pewną triangu-



Rys. 1

lację płaszczyzny rzutowej P^2 linia pogrubiona jest skręceniem krotności 2)). Sfera S^2 i torus T^2 nie mają skręceń, natomiast wstęga Möbiusa, płaszczyzna rzutowa P^2 (rys. 1) i butelka Kleina K mają 1-wymiarowe skręcenia krotności 2. Dalsze przykłady można znaleźć, m. in., w książce [37].

Każda grupa homologii jest skończenie generowalną grupą abelową, daje się więc przedstawić w postaci

$$H_k(M^n) = Z+\ldots+Z+Z_{t_1}+\ldots+Z_{t_m},$$

gdzie liczba składników wolnych, tzw. *k-wymiarowa liczba Bettiego*, odpowiada ilości dziur, a liczba m i współczynniki $t_1, \ldots, t_m$, tzw. *współczynniki torsji* — ilości i krotności skręceń.

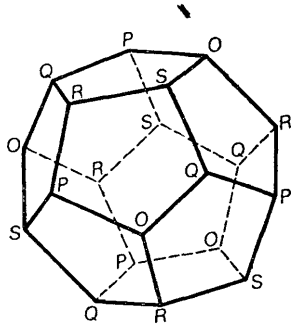
Przykłady:

$$H_k(S^n) = \begin{cases} Z & \text{gdy } k = 0, n, \\ 0 & \text{gdy } k \neq 0, n, \end{cases} \qquad H_k(T^2) = \begin{cases} Z & \text{gdy } k = 0, 2, \\ Z+Z & \text{gdy } k = 1, \\ 0 & \text{gdy } k > 2, \end{cases}$$

$$H_k(P^2) = \begin{cases} Z & \text{gdy } k = 0, \\ Z_2 & \text{gdy } k = 1, 2, \\ 0 & \text{gdy } k > 2, \end{cases} \qquad H_k(K) = \begin{cases} Z & \text{gdy } k = 0, \\ Z+Z_2 & \text{gdy } k = 1, \\ Z_2 & \text{gdy } k = 2, \\ 0 & \text{gdy } k > 2. \end{cases}$$

Grupy homologii natychmiast ujawniły swą wielką przydatność, jak bowiem pokazał Poincaré [30]–[32], charakteryzują one całkowicie rozmaitości zamknięte wymiaru 2, czyli tzw. *powierzchnie zamknięte*. Mianowicie: dwie powierzchnie zamknięte są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich grupy homologii są izomorficzne. Daje to nie tylko klasyfikację powierzchni, ale także algorytm pozwalający w skończenie wielu krokach wyznaczyć typ topologiczny rozmaitości. Dla powierzchni zwartych z brzegiem analogiczną charakteryzację stanowią grupy homologii plus liczba składowych brzegu.

Nasuwało się naturalne przypuszczenie, wysunięte przez Poincarégo w [32], że grupy homologii klasyfikują także rozmaitości wyższych wymiarów. W odniesieniu do sfery S^3 można to przypuszczenie tak sformułować [35]: Czy rozmaitość zamknięta wymiaru 3, która ma grupy homologii takie jak sfera S^3, jest homeomorficzna ze sferą S^3? Nazywając *sferą homologiczną* rozmaitość zamkniętą M^n mającą grupy homologii sfery S^n, można ostatnie pytanie sformułować krótko: Czy 3-wymiarowa sfera homologiczna jest homeomorficzna ze sferą S^3?



Rys. 2

Trochę niespodzianie okazało się, że sfera homologiczna może zwyczajną sferą nie być. Najprostszych przykładów dostarczają tzw. rozmaitości dodekaedralne, sferyczna i hiperboliczna. Obie powstają z bryły dwunastościanu foremnego przez sklejanie pewnych punktów jego powierzchni.

Rozmaitość dodekaedralna sferyczna powstaje przez naklejenie na siebie każdej pary przeciwległych pięciokątów po skręceniu jednego z nich w lewo (patrząc w kierunku środka bryły) o kąt $\pi/5$ (rys. 2). Jak się bez trudu dowodzi przez odwołanie

do charakterystyki Eulera–Poincarégo (por. [37], str. 216), powstaje rozmaitość zamknięta wymiaru 3. Można pokazać, że jej grupy homologii są identyczne z grupami homologii sfery S^3 (tamże, str. 216–218), a więc że jest to sfera homologiczna wymiaru 3.

Rozmaitość dodekaedralna hiperboliczna powstaje w analogiczny sposób przez naklejenie na siebie każdej pary przeciwległych pięciokątów, ale po skręceniu jednego z nich w lewo o kąt $3\pi/5$. W wyniku, jak poprzednio, powstaje 3-wymiarowa sfera homologiczna.

Obie te rozmaitości różnią się jednak między sobą i żadna z nich nie jest sferą, można bowiem wskazać własność topologiczną, którą ma sfera, ale której one nie mają: W sferze S^3 każdy obraz ciągły okręgu S^1 daje się ściągnąć do punktu (tzn. każde przekształcenie ciągłe $f: S^1 \to S^3$ ma rozszerzenie $F: D^2 \to S^3$), natomiast w obu rozmaitościach dodekaedralnych istnieją krzywe zwykłe zamknięte nieściągalne.

Poincaré poprawił więc pytanie i zapytał czy 3-wymiarowa sfera homologiczna, w której każdy obraz ciągły okręgu S^1 jest ściągalny do punktu, jest homeomorficzna ze sferą S^3. I to pytanie, mimo ogromnego postępu w topologii, jest otwarte do dziś. Jest to właśnie owa słynna hipoteza Poincarégo.

Nazywając *przestrzenią jednospójną* przestrzeń topologiczną, w której każdy obraz ciągły okręgu S^1 jest ściągalny do punktu — hipotezie Poincarégo można nadać taką krótką postać:

HIPOTEZA POINCARÉGO. *Jednospójna sfera homologiczna M^3 jest homeomorficzna ze sferą S^3.*

Hipoteza Poincarégo w naturalny sposób uogólnia się na dowolny wymiar, co prowadzi do tzw. uogólnionej hipotezy Poincarégo.

UOGÓLNIONA HIPOTEZA POINCARÉGO. *Jednospójna sfera homologiczna M^n jest homeomorficzna ze sferą S^n.*

Posługując się pojęciem typu homotopii można uogólnioną hipotezę Poincarégo sformułować jeszcze inaczej. Będziemy mianowicie mówili, że dwie przestrzenie X i Y mają ten sam *typ homotopii*, gdy istnieją przekształcenia $f: X \to Y$ i $g: Y \to X$ takie, że złożenie $f \circ g$ jest homotopijne z tożsamością na Y, a złożenie $g \circ f$ jest homotopijne z tożsamością na X (dwa przekształcenia $\varphi, \psi: W \to T$ nazywają się *homotopijne*, gdy istnieje ciągła rodzina przekształceń $h_t: W \to T$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, taka że $h_0 = \varphi$ i $h_1 = \psi$). Obrazowo, ale mniej ściśle, można powiedzieć, że przeciągnięcie X przez Y, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$, i przeciągnięcie Y przez X, $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$, nie powoduje istotnych strat w topologii, każde z tych przekształceń daje się bowiem przeprowadzić przez ciągłą deformację X lub, odpowiednio, Y na sobie na tożsamość. Intuicyjnie jest jasne, że struktury topologiczne X i Y muszą być sobie bliskie. Uogólniona hipoteza Poincarégo jest równoważna sformułowaniu, że jeśli X jest sferą S^n, Y rozmaitością zamkniętą M^n (tzn. jeśli rozmaitość zamknięta M^n ma typ homotopii sfery S^n, co wyrażamy krótko, nazywając taką rozmaitość M^n *sferą homotopijną*) oraz

X ma ten sam typ homotopii co Y, to struktury te są identyczne. Dowodzi się mianowicie, że rozmaitość zamknięta M^n jest sferą homotopijną wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona jednospójna i ma grupy homologii sfery.

UOGÓLNIONA HIPOTEZA POINCARÉGO W POSTACI HOMOTOPIJNEJ. *Sfera homotopijna M^n jest homeomorficzna ze sferą S^n.*

Sfera homotopijna jest z definicji rozmaitością topologiczną. Wobec braku dobrych ogólnych metod zwykle przyjmuje się jeszcze założenie, że ma ona strukturę rozmaitości kombinatorycznej lub rozmaitości gładkiej.

Przypomnijmy, że rozmaitość M^n nazywa się *kombinatoryczną*, gdy — mówiąc trochę nieściśle — ma ona triangulację lokalnie izomorficzną z jakąkolwiek triangulacją n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej R^n. Dla $n = 3$ każda triangulacja ma tę własność [24], dla $n > 3$ zagadnienie jest otwarte.

Rozmaitość M^n nazywa się *gładką*, gdy istnieje na niej atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ klasy C^∞, tzn. rodzina zbiorów otwartych U_α i homeomorfizmów φ_α przeprowadzających U_α na podzbiory otwarte przestrzeni R^n taka, że zbiory U_α pokrywają M^n, a homeomorfizmy $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to R^n$ są różniczkowalne klasy C^∞.

Dla wymiaru $n = 3$ założenie, że sfera homotopijna jest rozmaitością kombinatoryczną lub gładką — nie jest żadnym ograniczeniem. Istotnie, jak bowiem pokazał Moise [24] (p. także Bing [2]), każda rozmaitość topologiczna wymiaru 3 jest triangulowalna, a przeto ma strukturę rozmaitości kombinatorycznej. Z kolei zaś, zgodnie z twierdzeniem Cairnsa ([6], twierdzenie 14.2) na każdej rozmaitości triangulowalnej wymiaru $n \leqslant 4$ istnieje struktura gładka.

Dla wyższych wymiarów dodatkowe założenie o strukturze kombinatorycznej lub gładkiej sfery homotopijnej jest jednak istotnym wzmocnieniem założeń hipotezy, istnieją bowiem np. rozmaitości triangulowalne nie mające żadnej struktury gładkiej [12]. Mimo takiego wzmocnienia założeń nie można jednak oczekiwać, by można było podobnie zaostrzyć tezę. Np. z tego, że sfera homotopijna M^n jest gładka na pewno nie może wynikać, że jest ona gładko równoważna sferze S^n, tzn. że istnieje homeomorfizm $h : M^n \to S^n$ taki, że zarówno on sam, jak i jego odwrotność, są różniczkowalne klasy C^∞ (taki homeomorfizm nazywa się *dyfeomorfizmem*, a rozmaitości nim związane — *dyfeomorficznymi*). Istotnie, jak bowiem pokazał Milnor [21], istnieją rozmaitości homeomorficzne z S^7 (są to więc, *a fortiori*, sfery homotopijne), ale nie dyfeomorficzne z S^7. (Od przypadku gładkiego trochę się różni przypadek kombinatoryczny, tu można bowiem w tezie żądać trochę więcej niż tylko homeomorfizmu, por. [49].)

3. Dowód uogólnionej hipotezy dla wymiarów $n \geqslant 5$. Najpoważniejszym dotychczasowym osiągnięciem w badaniach nad uogólnioną hipotezą Poincarégo jest jej dowód dla wymiarów $n \geqslant 5$ przy założeniu, że rozmaitość jest kombinatoryczna lub gładka, uzyskany w latach 1960–1962 przez Smale'a [38], Stallingsa [39], Wallace'a [42] i Zeemana [48], [49].

Naszkicuję najpierw dowód dla przypadku gładkiego.

Przypomnijmy, że podzbiór V zbioru W nazywa się jego *retraktem deformacyjnym*, gdy istnieje ciągła rodzina przekształceń $f_t: W \to W$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, taka że f_0 jest tożsamością na W, a f_1 retrakcją W na V.

Kluczowym elementem dowodu jest następujące twierdzenie, mające zresztą dużą wartość niezależnie od hipotezy Poincarego.

TWIERDZENIE O h-KOBORDYZMIE. Niech W^n *będzie rozmaitością gładką, zwartą, z brzegiem* $\partial W^n = V \cup V'$ (*suma rozłączna, V i V' nie muszą być spójne*). *Jeśli*

(i) W^n, V *i* V' *są jednospójne,*

(ii) V *i* V' *są retraktami deformacyjnymi rozmaitości* W^n,

(iii) *wymiar* $\dim W^n = n \geqslant 6$,

to

$$W \underset{\text{dyfeo}}{=} V \times I.$$

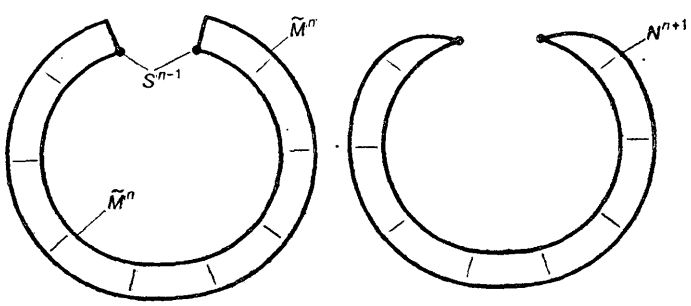
Założenia (i) i (ii) są istotne, założenia (iii) nie udało się poprawić. Dla $n = 3$ twierdzenie o h-kobordyzmie jest równoważne hipotezie Poincarégo. Inne komentarze: patrz [23].

Nazwa twierdzenia pochodzi stąd, że rozmaitości V i V' spełniające warunek (ii) nazywają się *h-kobordyczne*. Z twierdzenia o h-kobordyzmie wynika

WNIOSEK. *Rozmaitości V, V' jednospójne i h-kobordyczne wymiaru $\geqslant 5$ są dyfeomorficzne.*

Niech teraz M^n będzie gładką sferą homotopijną. Rozpatrzmy rozmaitość z brzegiem

$$\tilde{M}^n = M^n - \operatorname{int} D^n,$$



Rys. 3

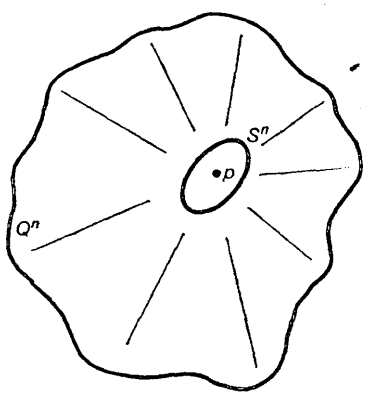
gdzie $D^n \subset M^n$ jest gładko włożoną n-wymiarową kulą. Brzegiem tej rozmaitości jest oczywiście sfera S^{n-1}. Łącząc dwa egzemplarze rozmaitości M^n wzdłuż brzegu S^{n-1} za pomocą przekształcenia identyczności otrzymujemy rozmaitość zamkniętą

$$2\tilde{M}^n = \tilde{M}^n \cup_{S^n} \tilde{M}^n.$$

Nietrudno zauważyć, że $2\tilde{M}^n$ jest brzegiem rozmaitości ściągalnej ([13], str. 507). Istotnie, biorąc bowiem produkt $\tilde{M}^n \times I$ i ściągając do punktu każdy odcinek $s \times I$,

gdzie $s \in S^{n-1}$ otrzymujemy rozmaitość N^{n+1} z brzegiem równym $2\tilde{M}^n$ (rys. 3). Rozmaitość N^{n+1} jest ściągalna, można bowiem wziąć jej retrakcję deformacyjną po odcinkach $p \times I$, $p \in \tilde{M}^n$, na $\tilde{M}^n$, a $\tilde{M}^n$ z kolei ściągnąć do punktu (co jest możliwe, bo $\tilde{M}^n$ powstaje ze sfery homotopijnej M^n przez usunięcie wnętrza jednej kuli).

Z kolei łatwo widzieć, że rozmaitość jest brzegiem rozmaitości ściągalnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona h-kobordyczna ze sferą. Istotnie, jeśli bowiem Q^n jest brzegiem rozmaitości ściągalnej T^{n+1} do punktu $p \in \operatorname{int} T^{n+1}$, to wycinając z T^{n+1}



Rys. 4

wnętrze odpowiedniej kuli wokół p otrzymujemy h-kobordyzm między Q^n a brzegiem S^n tej kuli (rys. 4). Implikacja odwrotna (w naszym przypadku nieistotna) wynika przez zaklejenie sfery kulą.

Z obu powyższych przesłanek wynika, że rozmaitość $2\tilde{M}^n$ jest h-kobordyczna ze sferą S^n. Jeśli $n \geqslant 5$, to na mocy wniosku z twierdzenia o h-kobordyzmie $2\tilde{M}^n$ jest dyfeomorficzna ze sferą S^n.

Dla zakończenia dowodu wystarczy teraz powołać się na uogólnione twierdzenie Schoenfliesa. Nazwijmy sferę Σ^{n-1} leżącą w S^n *łagodną*, gdy ma ona w S^n otoczenie postaci $S^{n-1} \times [-1, 1]$, gdzie $S^{n-1} \times 0$ odpowiada Σ^{n-1}. Wspomniane twierdzenie głosi, że $(n-1)$-wymiarowa sfera łagodna w S^n dzieli S^n na dwa obszary takie, że domknięcie każdego z nich jest kulą [5]. Stosując to twierdzenie do sfery $S^{n-1} \subset 2\tilde{M}^n$ (sfera zanurzona gładko jest łagodna) wnosimy, że $\tilde{M}^n$ jest kulą.

Ostatecznie więc M^n, jako suma dwóch kul $\tilde{M}^n$ i D^n sklejonych wspólnym brzegiem S^{n-1}, jest homeomorficzna ze sferą S^n.

Dla $n \geqslant 6$ dowód jest znacznie prostszy. Rozpatrujemy dwa rozłączne gładkie zanurzenia i: $D^n \subset M^n$ oraz j: $D^n \subset M^n$. Rozmaitość

$$M^n - i(\operatorname{int} D^n) - j(\operatorname{int} D^n)$$

jest h-kobordyzmem między dwoma egzemplarzami S^{n-1}, a zatem, na mocy twierdzenia o h-kobordyzmie, rozmaitość ta jest dyfeomorficzna z produktem $S^{n-1} \times I$. Doklejając z powrotem kule $i(D^n)$ i $j(D^n)$ otrzymujemy S^n.

W przypadku kombinatorycznym dowód musi być oczywiście inny. W dużym skrócie może on wyglądać tak (por. [3], str. 125). Zaczynamy od pokazania, stosując tzw. lemat o pochłanianiu („engulfing lemma"), że jeśli rozmaitość kombinatoryczna M^n jest sferą homotopijną, to każdy $(n-3)$-wymiarowy kompleks geometryczny leżący w M^n i zgodny z jej strukturą kombinatoryczną daje się zanurzyć we wnętrze („pochłonąć" przezeń) n-wymiarowej kuli w M^n. Ustalamy triangulację T na M^n i zanurzamy jej $(n-3)$-wymiarowy *szkielet* G^{n-3}, tj. kompleks złożony ze wszystkich sympleksów triangulacji o wymiarach $\leqslant n-3$, we wnętrze n-wymiarowej kuli C_1. Następnie bierzemy podpodział barycentryczny T' triangulacji T i przez H^2 oznaczamy kompleks złożony ze wszystkich sympleksów tego podziału rozłącznych z G^{n-3}; nietrudno sprawdzić, że H^2 nie zawiera sympleksów o wymiarach > 2. Jeśli $2 \leqslant n-3$ (co ma miejsce tylko dla $n \geqslant 5$), to istnieje n-wymiarowa kula C_2 zawierająca w swoim wnętrzu H^2. Powiększamy C_1 i C_2 póki nie pokryją całej rozmaitości M^n. Jak wynika z uogólnionego twierdzenia Schoenfliesa [5], rozmaitość zwarta wymiaru n, która jest sumą dwóch kul otwartych, jest homeomorficzna ze sferą S^n.

4. Próby dowodu hipotezy dla wymiaru 3. Do rozstrzygnięcia uogólnionej hipotezy Poincarégo pozostały więc dwa wymiary: wymiar 3, dla którego hipoteza ta była pierwotnie sformułowana oraz wymiar 4. Oba te wymiary, a czasem jeszcze także i wymiar 5, są nazywane przez niektórych topologów „krytycznymi", zagadnienia związane z nimi okazują się bowiem często znacznie trudniejsze niż dla wyższych wymiarów i oprócz hipotezy Poincarégo można wskazać także inne jeszcze hipotezy i twierdzenia, które są dotąd nie rozstrzygnięte, bądź też zostały dowiedzione później niż w przypadku obejmującym rozmaitości wyższych wymiarów.

Przedstawimy tu krótko niektóre próby rozstrzygnięcia tej hipotezy dla wymiaru 3.

Zasadnicza trudność w rozwijaniu takich prób leży w braku dobrych charakteryzacji sfery S^3 lub twierdzeń implikujących takie charakteryzacje (jak np. twierdzenie o h-kobordyzmie dla wymiarów $\geqslant 5$). Jednej z niewielu charakteryzacji dostarcza znane twierdzenie Reeba (por. [22], twierdzenie 4.1): jeśli na rozmaitości zamkniętej i gładkiej M^n istnieje funkcja Morse'a, która ma tylko dwa punkty krytyczne, to M^n jest homeomorficzna z S^n. Stosowanie tego twierdzenia drogą modyfikacji wyjściowej funkcji Morse'a do funkcji Morse'a z dwoma tylko punktami krytycznymi wymaga jednak techniki podobnej do używanej w dowodzie twierdzenia o h-kobordyzmie, a dla wymiarów krytycznych technika ta się zacina.

W wyniku licznie podejmowanych prób uzyskano parę dalszych charakteryzacji oraz różne redukcje hipotezy, z którymi można wiązać pewne nadzieje. Przytoczę ciekawsze.

Najstarszy ogłoszony drukiem „dowód" hipotezy Poincarégo pochodzi od znakomitego topologa angielskiego J. H. C. Whiteheada [43] z 1935 r. Tutaj jednak sam autor znalazł błąd [44].

Około 1955 r. hipotezą Poincarégo zajmował się Bing. Z pewnym opóźnieniem, spowodowanym pogłoskami o rozstrzygnięciu tej hipotezy w Princeton, ogłosił on pracę [1] zawierającą następującą charakteryzację:

TWIERDZENIE BINGA. *Rozmaitość spójna, zamknięta, wymiaru* 3 *jest homeomorficzna ze sferą* S^3 *wtedy i tylko wtedy, gdy każda krzywa zwykła zamknięta w tej rozmaitości leży w kuli zawartej w tej rozmaitości.*

Na mocy tego twierdzenia hipoteza Poincarégo redukuje się do dowodu, że jednospójność sfery homotopijnej pociąga wyżej sformułowany warunek. Warunek ten jest jednak bardzo delikatny, istnieją bowiem — jak zobaczymy niżej — rozmaitości jednospójne nie spełniające go.

Sensację przyniósł rok 1958, kiedy to została ogłoszona praca japońskiego matematyka Kosekiego [14] zawierająca „dowód" hipotezy. Druga połowa tej pracy, liczącej ponad 100 stronic druku, zawiera poprawny wynik, że rozmaitość zamknięta, spójna, wymiaru 3 jest homeomorficzna ze sferą S^3, jeśli dla jakiejkolwiek jej triangulacji potrafimy zanurzyć w 3-wymiarową przestrzeń euklidesową R^3 2-wymiarowy szkielet tej triangulacji, tj. podzbiór rozmaitości złożony ze wszystkich sympleksów triangulacji o wymiarach $\leqslant 2$. Jednakże pierwsza część pracy dowodząca, że dla sfery homotopijnej jest to możliwe, nie jest jasna.

Latem 1965 r. Stallings [40] miał na seminarium topologicznym w Wisconsin odczyt pod zaskakującym tytułem *Jak nie należy dowodzić hipotezy Poincarégo.* Opisał w nim nieudaną próbę dowodu tej hipotezy za pomocą pewnego twierdzenia o homotopii, które okazało się prawdziwe dla wszystkich wymiarów z jedynym wyjątkiem, kluczowego w tym przypadku, $n = 2$. W tymże odczycie autor przedstawił kilka zagadnień topologiczno-algebraicznych, których pozytywne rozstrzygnięcie pociągałoby istnienie dla sfery homotopijnej wymiaru 3 diagramu Heegarda (p. niżej) rodzaju 1.

Większość dotychczasowych prób dowodu hipotezy idzie jedną z dwóch dróg:

1) rozkładu sfery homotopijnej na kulę oraz resztę i pokazania, że domknięcie reszty jest też kulą,

2) pokazania, że istnieje rozkład sfery homotopijnej na dwa zwyczajne torusy sklejone wspólnym brzegiem.

Omówimy je kolejno.

1) Jeśli M^3 jest sferą homotopijną, a $D^3 \subset M^3$ jest porządnie w niej leżącą kulą (np. sympleksem triangulacji lub jako podrozmaitość gładka), to rozmaitość $M^3 - \mathrm{int} D^3$, zwana *kulą homotopijną*, jest — podobnie jak kula zwyczajna — zwarta, spójna i jednospójna, z brzegiem równym $S^2 = \partial D^3$. Jeśli taka kula homotopijna jest zwyczajną kulą, to sfera homotopijna M^3 jest zwyczajną sferą, ale jeśli taka kula homotopijna zwyczajną kulą nie jest, M^3 jest kontrprzykładem na hipotezę Poincarégo.

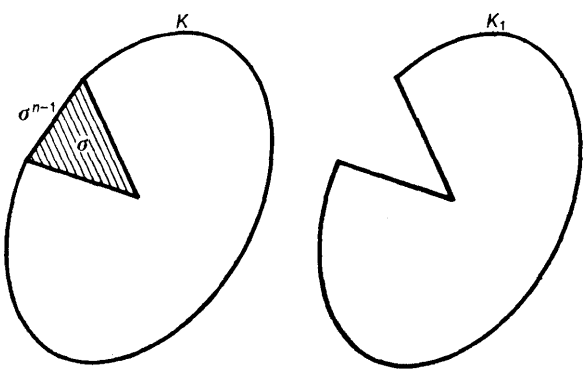
Tą drogą szedł przytoczony wyżej dowód Smale'a uogólnionej hipotezy Poincarégo, ale Smale miał do dyspozycji twierdzenie o h-kobordyzmie, z którego w istotny sposób skorzystał. Dla wymiaru 3 twierdzenie to jest jednak równoważne hipotezie Poincarégo.

Pewnych możliwości dostarcza rozważanie triangulacji kuli homotopijnej według wzoru: jeśli kula homotopijna ma „dobrą" triangulację, to jest kulą zwyczajną.

Np. kula homotopijna jest zwyczajną kulą, jeśli 3-wymiarowe sympleksy jakiejś jej triangulacji można ustawić w ciąg $s_1, s_2, \ldots, s_n$ taki, że każda suma częściowa $s_1 \cup \ldots \cup s_k$, gdzie $k \leqslant n$, jest kulą homotopijną (por. [3], str. 107). Choć może się to wydawać dziwne, istnieje wiele triangulacji zwyczajnej kuli, które nie mają tej własności ([3], str. 108) i nie bardzo wiadomo, jak od „złej" triangulacji przejść do „dobrej".

Na pomysł innej możliwości wpadli około 1964 r. Haken i Poénaru. Ich plan był podobny, chociaż Haken pracował za pomocą triangulacji, a Poénaru używał struktur gładkich. Każdy z nich usuwał ze sfery homotopijnej M^3 wnętrze zwyczajnej kuli, co dawało kulę homotopijną N^3. Z twierdzenia Hurewicza wynika, że skoro $\pi_1(N^3) = 0$ i $H_2(N^3) = 0$, to $\pi_2(N^3) = 0$, a zatem istnieje homotopia ściągająca brzeg S^2 rozmaitości N^3 do punktu w N^3. Każdy z nich próbował tę homotopię „wygładzić", by móc wywnioskować, że N^3 jest kulą. Żadnemu się nie udało (por. Bing [4], Haken [10]).

W bliskim związku ze ściągalnością pozostaje zgniatalność („collapsibility" w sensie J. H. C. Whiteheada [46]). Jeśli w kompleksie K występuje sympleks σ^n, którego pewna $(n-1)$-wymiarowa ściana σ^{n-1} jest wolna, tzn. nie jest ścianą żadnego innego sympleksu (rys. 5), to mówimy, że *kompleks K jest elementarnie zgniatalny*



Rys. 5

do podkompleksu K_1 powstającego z K przez usunięcie wnętrz sympleksu σ^n i jego ściany σ^{n-1}, co zapisujemy $K \searrow K_1$. Mówimy, że *kompleks K jest zgniatalny do kompleksu L*, co piszemy $K \searrow L$, gdy istnieje ciąg elementarnych zgnieceń

$$K \searrow K_1 \searrow \ldots \searrow K_n \searrow L.$$

Jeśli L jest punktem, kompleks K nazywa się *zgniatalnym do punktu*, lub krótko i po prostu *zgniatalnym*, co zapisuje się w postaci $K \searrow 0$. Wśród rozmaitości zgniatalne do punktu są tylko kule ([46], twierdzenie 23, wniosek 1).

Oczywiście, kompleks zgniatalny do punktu jest ściągalny do punktu, ale nie na odwrót. Np. *trąbka Borsuka* (zwana przez Anglosasów także *oślą czapką*), powstająca z pełnego trójkąta ABC przez identyfikację jego boków $AB = AC = BC$, jest ściągalna do punktu, ale nie można na niej wykonać żadnego zgniecenia.

Matematyk angielski E. C. Zeeman wysunął następującą hipotezę [50].

HIPOTEZA ZEEMANA. *Jeśli 2-wymiarowy kompleks K jest ściągalny, to kompleks $K\times I$ jest zgniatalny.*

Z hipotezy Zeemana wynika hipoteza Poincarégo [50]. Mianowicie, jeśli M^3 jest sferą homotopijną, to bierzemy jakąkolwiek jej triangulację i usuwamy wnętrze jednego sympleksu. Pozostaje kula homotopijna N^3. Zgniatamy ją do 2-wymiarowego kompleksu K (są wolne ściany), który jest ściągalny, bo N^3 jest ściągalna. Jeśli hipoteza Zeemana jest prawdziwa, to

$$N^3\times I\searrow K\times I\searrow 0,$$

a zatem $N^3\times I$ jest kulą. Przeto $\partial N^3\subset\partial(N^3\times I)=S^3$. Ale brzegiem N^3 jest brzeg usuniętego sympleksu, a zatem, topologicznie, $\partial N^3=S^2$, skąd na mocy twierdzenia Schoenfliesa wnosimy, że N^3 musi być kulą.

Próby obalenia hipotezy Zeemana (co zresztą nie obalałoby jeszcze hipotezy Poincarégo) trudnymi, specjalnie dobieranymi przykładami 2-wymiarowych kompleksów ściągalnych nie dały dotąd wyniku (por. [16]).

Inną redukcję hipotezy Poincarégo związaną z tą samą drogą uzyskał parę lat temu Gross [8]. Wyróżnia on mianowicie klasę PC („Poincaré Category") rozmaitości wymiaru 3, które mają tę własność, że każda kula homotopijna, która w nich leży, jest homeomorficzna z kulą zwyczajną. Okazuje się, że do klasy PC należą wszystkie znane rozmaitości, a m.in. sfera S^3, przestrzeń rzutowa P^3, produkty $M^2\times I$ i wiązki z włóknem M^2 nad S^1, gdzie w obu przypadkach M^2 jest dowolną powierzchnią zamkniętą, przestrzenie soczewkowe $L(p,q)$ itp. oraz że klasa ta ma dobre własności formalne, np. jest dziedziczna (tzn. podrozmaitość rozmaitości tej klasy należy do tej klasy), a w przypadku rozmaitości orientowalnych z niepustym brzegiem zachowuje się przy ich sklejaniu wzdłuż dysków leżących na brzegach.

Jak wiadomo, rozmaitość triangulowalna (a każda rozmaitość gładka jest triangulowalna) wymiaru n nazywa się *orientowalna*, gdy n-wymiarowym sympleksom jakiejkolwiek jej triangulacji można nadać takie orientacje (np. przez ustalenie kolejności wierzchołków z dokładnością do parzystej permutacji), że orientacje indukowane na $(n-1)$-wymiarowych ścianach przez dwa sympleksy sąsiednie są zawsze przeciwne.

TWIERDZENIE GROSSA. *Jeśli każda rozmaitość z brzegiem należąca do klasy PC ma tę własność, że po doklejeniu do niej pełnego torusa wzdłuż jego brzegu powstaje rozmaitość klasy PC, to hipoteza Poincarégo jest prawdziwa.*

Dowód wynika łatwo z pewnego twierdzenia Wallace'a ([41], twierdzenie 7), które głosi, że każda rozmaitość zwarta, orientowalna, spójna i bez brzegu daje się otrzymać ze sfery S^3 przez wycięcie w S^3 pewnej liczby rozłącznych pełnych torusów i wklejenie ich z powrotem. W szczególności, każda rozmaitość zwarta, orientowalna, spójna i mająca pusty brzeg byłaby w klasie PC. Klasa ta zawierałaby więc także sferę homotopijną, a to oczywiście znaczyłoby, że każda sfera homotopijna jest sferą.

2) Jeszcze w latach poprzedzających I wojnę światową Heegard zauważył, że każda rozmaitość zamknięta i spójna M^3 zawiera kulę z uchami T^3 taką, że rozmaitość $M^3 - \operatorname{int} T^3$ jest homeomorficzna z T^3. Rozmaitość M^3 można więc przedstawić w postaci dwóch takich samych kul z uchami, sklejonych wspólnym brzegiem $P = \partial T^3$. Zaznaczając na powierzchni P kanoniczny układ rozcięć R_1 kuli z uchami T^3 i kanoniczny układ rozcięć R_2 kuli z uchami $M^3 - \operatorname{int} T^3$ otrzymujemy czwórkę (M^3, T^3, R_1, R_2) zwaną *diagramem Heegarda* rozmaitości M^3 i stanowiącą pewne przedstawienie tej rozmaitości na powierzchni P. Przedstawienie to jest jednoznaczne, każdemu diagramowi Heegarda odpowiada bowiem, z dokładnością do homeomorfizmu, tylko jedna rozmaitość ([37], str. 220), nie jest jednak wzajemnie jednoznaczne, dana rozmaitość może mieć bowiem wiele diagramów Heegarda.

Nadużywając nieistotnie definicji, będziemy mówili, że para (M^3, T^3) jest *diagramem Heegarda rodzaju p dla* M^3, gdy M^3 jest rozmaitością zamkniętą, T^3 jest pełnym torusem rodzaju p (kulą z p uchami) i $M^3 - \operatorname{int} T^3$ jest homeomorficzny z T^3.

Rozmaitości, które mają diagram Heegarda rodzaju 1, zostały sklasyfikowane [36]: są to mianowicie sfera S^3, produkt $S^1 \times S^2$ oraz wszystkie przestrzenie soczewkowe $L(p, q)$. Wobec tego, że wśród nich tylko sfera S^3 jest jednospójna, dla dowodu hipotezy Poincarégo wystarczy pokazać, że sfera homotopijna M^3 daje się rozłożyć na dwa pełne torusy rodzaju 1, sklejone wspólnym brzegiem, tzn.

$$M^3 = T^3 \cup (M^3 - \operatorname{int} T^3),$$

gdzie

$$T^3 \underset{\text{top}}{=} M^3 - \operatorname{int} T^3 \underset{\text{top}}{=} S^1 \times D^2.$$

Próby dowodu hipotezy Poincarégo tą drogą polegają zwykle na odpowiednio zręcznym przerabianiu wyjściowego diagramu: Biorąc jakikolwiek diagram Heegarda sfery homotopijnej, powiedzmy diagram Heegarda rodzaju p, konstruuje się diagram Heegarda tej sfery rodzaju $p-1$. Po skończenie wielu krokach doszłoby się do diagramu Heegarda rodzaju 1.

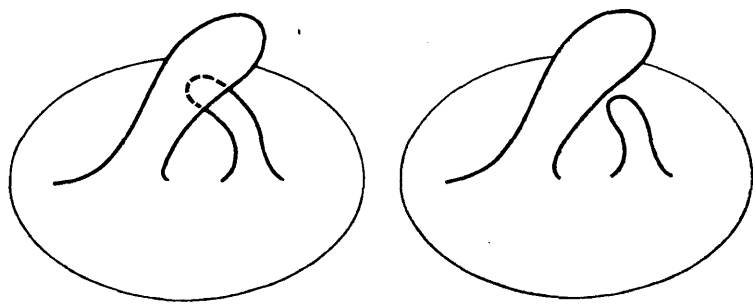
Znacznym ułatwieniem tego rodzaju konstrukcji są wyniki Papakyriokopoulosa z lat 1957–1962. Udowodnił on m.in. słynny lemat Dehna [25]: *Jeśli* M^3 *jest rozmaitością z triangulacją,* D^2 *jest 2-wymiarowym dyskiem z triangulacją i* $f : D^2 \to M^3$ *przekształceniem symplicjalnym, które na pewnym otoczeniu N brzegu* ∂D^2 (w D^2) *jest różnowartościowe, to* $f(\partial D^2)$ *ogranicza dysk wielościenny w* M^3. Mówiąc obrazowo: jeśli w M^3 mamy dysk z samoprzecięciami leżącymi daleko od brzegu, to nie ruszając brzegu można ten dysk „wygładzić" i samoprzecięcia zlikwidować (rys. 6).

Papakyriokopoulos pracował także nad hipotezą Poincarégo i udowodnił następujące twierdzenie [27].

TWIERDZENIE PAPAKYRIOKOPOULOSA. *Jeśli* 3*-wymiarowa rozmaitość zamknięta i orientowalna* M^3 *ma diagram Heegarda* (M^3, T^3) *rodzaju* $p \geqslant 2$, *to istnieje krzywa*

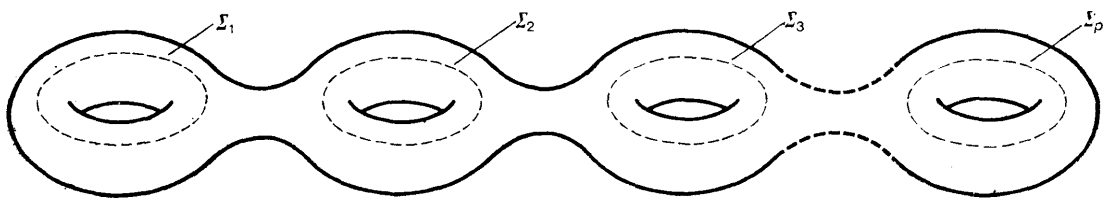
zamknięta $L \subset \partial T^3$, *która nie jest ściągalna w* ∂T^3, *ale jest ściągalna zarówno w* T^3, *jak i w* $M^3 - \operatorname{int} T^3$.

Nie powiodło się mu jednak pokazanie, że jeśli M^3 jest ponadto jednospójna, to L może być krzywą zwykłą zamkniętą, tj. bez samoprzecięć. Gdyby tak było, to stosując lemat Dehna redukowałoby się indukcyjnie rodzaj aż do $p = 1$, a to znaczyłoby, że M^3 jest S^3.



Rys. 6

Tą samą drogą zmierzającą do pokazania, że 3-wymiarowa sfera homotopijna ma diagram Heegarda rodzaju 1, próbuje w ostatnich latach rozstrzygnąć hipotezę Poincarégo–Poénaru [28], [29]. Przytoczę dwa jego wyniki (oznaczenia jak na rys. 7).



Rys. 7

TWIERDZENIE HOMOTOPIJNE. *Niech* (M^3, T^3) *będzie diagramem Heegarda rodzaju* p. *Rozmaitość* M^3 *jest sferą homotopijną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zanurzenia*

$$s_i : S^1 \to \partial T^3 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, p$$

takie, że

$$s_i(S^1) \sim \Sigma_i \quad \text{w } T^3 \quad \text{oraz} \quad s_i(S^1) \sim 0 \quad \text{w } M^3 - \operatorname{int} T^3.$$

Homeomorfizmy $f, g : X \to Y$ nazywają się *izotopijne*, gdy istnieje ciągła rodzina homeomorfizmów h_t: $X \to Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, taka że $h_0 = f$ i $h_1 = g$. Jeśli ponadto $h_{t'}(X) \cap h_{t''}(X) = \emptyset$ dla $t' \neq t''$, mamy *izotopię ścisłą*. Zanurzenie f: $S^1 \to Y$ nazywa się *ściśle izotopijne zeru*, gdy istnieje zanurzenie F: $D^2 \to Y$ takie, że $F|\partial D^2 = f$.

TWIERDZENIE IZOTOPIJNE. *Jeśli* M^3 *jest sferą homotopijną, to istnieje diagram Heegarda* (M^3, T^3) *i istnieją zanurzenia*

$$\sigma_i : S^1 \to \partial T^3 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, p$$

takie, że

(i) σ_i *i* Σ_i *są ściśle izotopijne w* T^3,

(ii) σ_i *jest ściśle izotopijne zeru w* $M^3 - \operatorname{int} T^3$.

Twierdzenie izotopijne jest szczególnym przypadkiem tzw. twierdzenia strukturalnego [29], którego dowód liczy obecnie (lato 1971) 424 stronice maszynopisu. Gdyby kwantyfikator szczegółowy „istnieje diagram" zastąpić ogólnym „dla każdego diagramu" — mielibyśmy hipotezę Poincarégo.

5. Próby znalezienia kontrprzykładu na hipotezę w wymiarze 3. Wysiłkom zmierzającym do znalezienia dowodu trudnej hipotezy towarzyszą zwykle próby skonstruowania kontrprzykładu. Punktem wyjścia takich prób w badaniach nad hipotezą Poincarégo były rozmaitości dodekaedralne, które dały początek klasie sfer homologicznych, tzn. rozmaitości zamkniętych wymiaru 3, których grupy homologii są identyczne z grupami homologii sfery S^3. Sfer takich, topologicznie różnych, jest nieskończenie wiele, a stosunkowo prosty sposób konstrukcji pewnej ich klasy podał niedawno Gross [9]. Sposób ten polega na tym, że w sferze S^3 bierzemy węzeł k (tj. obraz homeomorficzny okręgu S^1), lekko go pogrubiamy do torusa, a następnie usuwamy wnętrze tego torusa. Otrzymujemy rozmaitość, zwaną *dopełnieniem węzła* k, której brzegiem jest torus. Bierzemy teraz dwa egzemplarze tej rozmaitości i sklejamy je brzegami (torusami właśnie) w ten sposób, by równik jednego torusa przeszedł na południk drugiego, a południk na równik. Identyczność grup homologii tak otrzymanej rozmaitości z grupami homologii sfery S^3 wynika z ciągu Mayera–Vietorisa. To zaś, że taka sfera homologiczna nie jest sferą homotopijną, pochodzi stąd, że jeśli w sferze homotopijnej mamy torus łagodnie w niej leżący (z dwustronnym kołnierzem), to dzieli on tę sferę na dwie części, z których jedna — na mocy lematu Dehna i twierdzenia o pętli (Papakyriokopoulos [26]) — ma grupę fundamentalną okręgu.

Oznaczając przez M_n rozmaitość otrzymaną z węzła toroidalnego typu $(2, 2n+1)$ Gross pokazał [9], że jeśli $2p+1$ i $2q+1$ są liczbami pierwszymi oraz $(4p+3)! < 2q+1$, to M_p i M_q są topologicznie różne.

Próby znalezienia kontrprzykładu na hipotezę Poincarégo polegają na „rozejrzeniu się" w klasie sfer homologicznych z nadzieją znalezienia w niej sfery homotopijnej różnej od S^3. Na tej drodze kandydata na kontrprzykład można szukać jak następuje (Bing [3]). Bierzemy kulę C z zawęźloną dziurą (rys. 8) i na jej brzegu kreślimy południk L, tzn. taką krzywą zwykłą zamkniętą, która przechodzi przez dziurę raz i nie ogranicza w $R^3 - \operatorname{int} C$, a następnie do kuli C doklejamy pełny torus T w taki sposób, by południk L nakleił się na równik torusa T, tzn. na krzywą zwykłą zamkniętą leżącą na jego brzegu, która ogranicza w T, ale nie w $R^3 - \operatorname{int} T$. Jak można pokazać, grupa fundamentalna kuli C pokazanej na rys. 5 ma postać

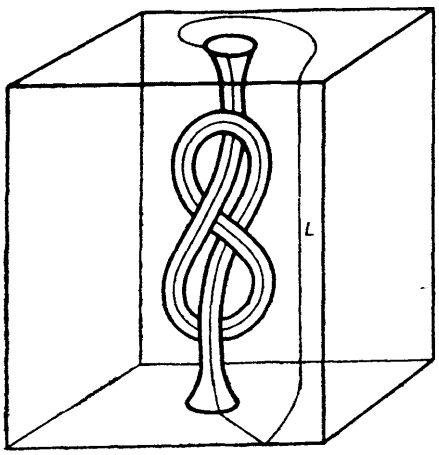
$$G = \{a, b, c, d\colon\ cac^{-1}b^{-1} = bdc^{-1}d^{-1} = aca^{-1}d^{-1} = 1\},$$

a po doklejeniu T przybiera postać

$$G' = \{a, b, c, d\colon\ cac^{-1}b^{-1} = bdc^{-1}d^{-1} = aca^{-1}d^{-1} = c^{-1}da^{-1}ba = 1\}.$$

To czy tak otrzymana sfera homologiczna jest sferą homotopijną, zależy od trywialności grupy G'.

Być może wycinając w D^3 podobne dziury i wklejając z powrotem pełne torusy otrzymamy grupę fundamentalną, której relacje, dzięki jakiejś sztuczce, okażą



Rys. 8

się relacjami grupy trywialnej, chociaż sama rozmaitość nie będzie sferą S^3. Są tu jednak dwie poważne trudności. Po pierwsze, algebra jest „wściekła" i chyba tylko przez przypadek można pokazać, że grupa jest trywialna. A po drugie, nawet jeśli algebra „puści", trzeba jeszcze pokazać, że rozmaitość jest topologicznie różna od S^3. Badania jednak trwają i w tej chwili np. wiadomo, że pewne węzły, m.in. powszechnie znana koniczynka, nie prowadzą do kontrprzykładów (por. Bing [3], str. 103). Jak się ma sprawa z węzłem pokazanym na rys. 7, nie wiadomo.

Inną drogę szukania kontrprzykładu zaproponował Fox [7].

6. Znaczenie hipotezy Poincarégo dla topologii. Przez sam sposób postawienia zagadnienia, a w szczególności przez wysunięcie naprzód środków algebraicznych, hipoteza dała początek intensywnym badaniom w zakresie topologii rozmaitości i topologii algebraicznej, dwu szybko się rozwijającym i blisko z sobą związanym kierunkom topologii.

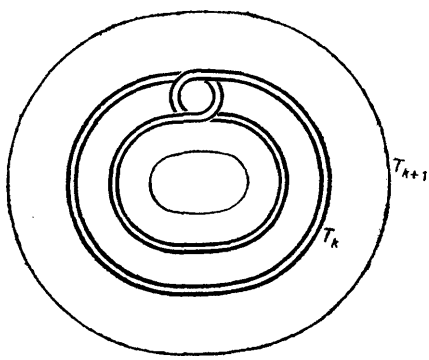
Żeby dać tylko jeden przykład bezpośredniego wpływu hipotezy na sposób stawiania zagadnień, zauważmy, że jeśli sformułować ją w postaci: istnieje tylko jedna rozmaitość wymiaru 3, która ma typ homotopii sfery S^3, mianowicie sama sfera S^3, to łatwo widzieć, że podstawiając w niej za S^3 różne rozmaitości M^n otrzymujemy całą rodzinę pytań dotyczących charakteryzacji rozmaitości przez ich typy homotopii. Trudne te zagadniena były przedmiotem intensywnych badań i dziś już np. wiadomo, że typy homotopii na ogół nie klasyfikują rozmaitości (np. przestrzenie soczewkowe $L(7,1)$ i $L(7,2)$ mają ten sam typ homotopii, ale nie są homeomorficzne [47]). Pozostaje jednak ciągle przypuszczenie, poparte pomyślnym rozstrzygnięciem uogólnionej hipotezy dla wyższych wymiarów, że jeśli ten typ

jest w jakimś sensie prosty, to istnieje tylko jedna rozmaitość przezeń reprezentowana.

Prosty typ mają niewątpliwie sfera S^3, najprostsza rozmaitość w klasie 3-wymiarowych rozmaitości zamkniętych i kula D^3, najprostsza rozmaitość w klasie 3-wymiarowych rozmaitości zwartych z brzegiem. Odrzucając w tym drugim przypadku zwartość otrzymujemy kulę otwartą (tj. bez brzegu), najprostszą 3-wymiarową rozmaitość otwartą, tj. rozmaitość bez brzegu, nie zwartą. Przez analogię z hipotezą Poincarégo można wysunąć przypuszczenie: każda rozmaitość otwarta, która ma typ homotopii kuli otwartej (tj. każda rozmaitość nie zwarta, bez brzegu, spójna i jednospójna, homologicznie trywialna) jest homeomorficzna z kulą otwartą.

Jak delikatna jest hipoteza Poincarégo świadczy najlepiej to, że nieznaczne tylko wychylenie się poza nią, zawarte w wysuniętym przed chwilą przypuszczeniu, okazuje się fałszywe. Znane są już dziś liczne rozmaitości otwarte mające typ homotopii kuli otwartej, ale z nią nie homeomorficzne [20]. Tu przytoczę elegancką konstrukcję pierwszej z nich, podaną jeszcze w 1935 r. przez J. H. C. Whiteheada [45].

Rozmaitość Whiteheada W jest sumą ciągu rosnącego pełnych torusów T_1, T_2, ... w R^3, z których każdy jest zawęźlony w następnym tak, jak to pokazuje rys. 9.



Rys. 9

Rozmaitość W jest jednospójna, każda bowiem krzywa zwykła zamknięta $C \subset W$ leży w którymś torusie $T_k \subset W$ dla dostatecznie dużego k (bo W jest sumą ciągu rosnącego przestrzeni zwartych), ale T_k jest ściągalny w $T_{k+1} \subset W$, a zatem także C jest ściągalne w $T_{k+1} \subset W$. Podobnie pokazuje się, że także wyższe grupy homotopii są trywialne, skąd wynika homologiczna trywialność W.

Rozmaitość W nie jest homeomorficzna z R^3, zawiera ona krzywą zwykłą zamkniętą, która nie leży w żadnej 3-wymiarowej kuli $K \subset W$. Taka jest np. środkowa krzywa torusa T_1. (Rozmaitość W ma także różne inne interesujące własności, por. [11].)

Tak silny wpływ hipotezy Poincarégo na topologię jest oczywiście możliwy tylko dzięki temu, że jest ona mocno związana z podstawowymi jej zagadnieniami. Jednym z nich jest tzw. *zagadnienie klasyfikacyjne*, polegające na tym, by dla ustalonej klasy

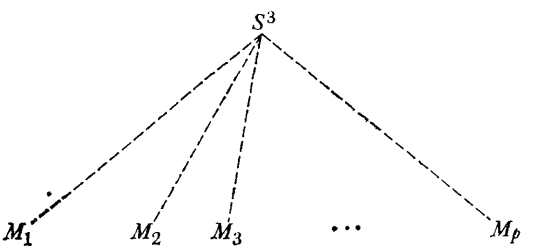
rozmaitości (np. zamkniętych, orientowalnych) i ustalonego wymiaru n znaleźć w tej klasie taki ciąg M_1^n, M_2^n, ..., by każda n-wymiarowa rozmaitość tej klasy była homeomorficzna z jedną i tylko jedną z rozmaitości tego ciągu (znaleźć znaczy podać konstrukcję). Związane z tym jest *zagadnienie homeomorfizmu*: podać algorytm rozstrzygający, czy dwie dane rozmaitości wymiaru n są, czy nie są homeomorficzne. W klasie rozmaitości zwartych oba zagadnienia są rozwiązane dla $n = 2$ [37], otwarte dla $n = 3$, a — jak udowodnił Markov [18], [19] — zagadnienie homeomorfizmu jest nierozwiązalne dla $n \geqslant 4$. Z tego punktu widzenia przypadek $n = 3$ jest szczególnie interesujący.

Do zagadnienia klasyfikacji rozmaitości wymiaru 3 można podchodzić różnymi sposobami, tu przedstawię tylko pewne związki między zagadnieniem klasyfikacji rozmaitości orientowalnych zamkniętych wymiaru 3 a hipotezą Poincarégo.

Rozpatrzmy dwa pełne torusy tego samego rodzaju $p > 0$ (kula z p uchami). Identyfikując ich brzegi w różny sposób otrzymujemy przeliczalną rodzinę topologicznie nierównoważnych rozmaitości zamkniętych wymiaru 3. W rodzinie tej wyróżniają się dwie skrajne identyfikacje: ta, w której wyniku powstaje sfera zwyczajna S^3 i ta, która daje sferę z p uchami M_p. Rozmaitość M_p można opisać jak następuje: bierzemy sferę S^3, w niej $2p$ rozłącznych 3-wymiarowych kul, a następnie usuwamy wnętrza tych kul i identyfikujemy brzeg i-tej kuli z brzegiem $(i+p)$-ej kuli, $i = 1, 2, \ldots, p$, w taki sposób, by rozmaitość, która powstaje, była orientowalna.

Grupa fundamentalna $\pi_1(M_p)$ jest grupą wolną o p generatorach. Pytanie o implikację odwrotną: Czy jeśli grupa fundamentalna rozmaitości zamkniętej orientowalnej jest grupą wolną o p generatorach, to rozmaitość jest sferą z p uchami? — ma odpowiedź pozytywną, ale tylko przy założeniu hipotezy Poincarégo [25].

Rozpatrzymy teraz diagram



gdzie kropki łączące M_p z S^3 przedstawiają rozmaitości powstałe ze sklejenia dwóch torusów rodzaju p w sposób różny od identyfikacji dających S^3 i M_p. Rozmaitości skrajne S^3, M_1, M_2, ... są scharakteryzowane (z dokładnością do homeomorfizmu) przez ich grupy fundamentalne, jeśli hipoteza Poincarégo jest prawdziwa [25], rozmaitości leżące między S^3 a M_1 zostały sklasyfikowane przez Reidemeistera [36] przy założeniu innej hipotezy, tzw. *Hauptvermutung* (dowiedzionej dla rozmaitości wymiaru 3 przez Moisego [24]), reszta jest niewiadoma. Zagadnienie klasyfikacji polegałoby więc na zbadaniu, jakie to są te rozmaitości, które leżą między S^3 a M_p dla $p > 1$ i jak można je scharakteryzować (z dokładnością do homeomorfizmu).

Z zagadnieniem klasyfikacji wiąże się pytanie o rodzaj rozmaitości. Wiadomo, że rozmaitość zamknięta orientowalna może się pojawić na różnych liniach $S^3 - M_p$ diagramu. Najmniejsza z takich liczb p nazywa się *rodzajem rozmaitości*, tzn. rozmaitość ma rodzaj p, gdy można ją otrzymać przez sklejenie brzegami dwóch pełnych torusów rodzaju p, i nie można jej otrzymać przez sklejenie brzegami dwóch pełnych torusów rodzaju $p' < p$.

Pytanie o rodzaj rozmaitości zwartej orientowalnej ma duże znaczenie dla zagadnienia klasyfikacji tych rozmaitości, ale jak dotąd jest otwarte. Jedynie w specjalnym przypadku, gdy grupa fundamentalna jest grupą wolną o p generatorach, możemy dać na nie odpowiedź i to tylko przy założeniu hipotezy Poincarégo: rozmaitość taka jest sferą o p uchach, a zatem jej rodzaj wynosi p. Dla $p = 0$ mamy hipotezę Poincarégo.

Mimo nie rozstrzygnięcia dotąd hipotezy Poincarégo, wiemy dziś już jednak sporo o rozmaitościach wymiaru 3, ale niemal wszystko co wiemy zawdzięczamy w znacznym stopniu znajomości sfery S^2. Brak podobnej wiedzy o sferze S^3 jest przeszkodą nie tylko do jeszcze lepszego poznania rozmaitości 3-wymiarowych, w szczególności ich klasyfikacji, ale także do poznania rozmaitości wyższych wymiarów. Np., jeśli hipoteza Poincarégo jest prawdziwa, to każda triangulowalna rozmaitość wymiaru 4 jest rozmaitością kombinatoryczną ([3], str. 125).

7. Zakończenie. Wieloletni wysiłek badaczy doprowadził do sytuacji, w której powiązania hipotezy Poincarégo zostały już nieźle poznane. Wiemy, że jeśli hipoteza jest prawdziwa, to daje nie tylko poręczną charakteryzację sfery S^3 i innych rozmaitości, m.in. przestrzeni rzutowej P^3 [17], sfery z uchami M_p [25], kuli z brzegiem D^3 itp., ale także — wobec kluczowego znaczenia sfer w topologii — przełamuje ważną barierę w poznaniu rozmaitości, a w szczególności w ich klasyfikacji. A jeśli nie jest prawdziwa, to użyte środki algebraiczne okażą się nieadekwatne i mamy nowe, raczej nieoczekiwane zjawisko, ale niezwykle ciekawe: sferę homotopijną, która nie jest sferą zwyczajną. Sfera taka stałaby się niewątpliwie natychmiast przedmiotem intensywnych badań, ale już samo jej istnienie świadczyłoby dobitnie, że wśród rozmaitości niskich wymiarów istnieją nieprzeczuwane zjawiska geometryczne, których dotychczasowymi środkami algebraicznymi nie jesteśmy w stanie uchwycić.

Powszechne zainteresowanie towarzyszące badaniom nad tą hipotezą ma, jak się wydaje, kilka źródeł. Przede wszystkim hipoteza okazała się bardzo trudna i mimo wieloletnich wysiłków pozostaje otwarta, a posmaku legendy dodają jej największe nazwiska w topologii (Poincaré, Moise, Bing, Papakyriokopoulos i inni), którym się nie udało. Prócz tego rozumie się jednak także jej znaczenie dla weryfikacji użytych metod algebraicznych, a także — co może jest tu najważniejsze — dla dalszego postępu topologii rozmaitości niskich wymiarów, głównej dostarczycielki idei, przykładów i kontrprzykładów dla topologii rozmaitości w ogóle.

Intensywne badania trwają. Trwają próby pozytywnego rozstrzygnięcia hipotezy (głównie Francja: V. Poénaru), nadal poszukuje się kontrprzykładów (głównie

Stany Zjednoczone: R. H. Bing), ale ponadto zaczynają się już tu i ówdzie pojawiać głosy sceptyków uważających, że hipoteza może się okazać niezależna lub nierozstrzygalna.

Sytuacja jest bardzo interesująca, a jej rozwój zasługuje na najwyższą uwagę.

Prace cytowane

[1] R. H. Bing, *Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be* S^3, Ann. of Math. 68 (1958), str. 17–37.

[2] — *An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated*, ibidem 69 (1959), str. 37–65.

[3] — *Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré Conjecture*, Lectures on Modern Mathematics, Vol. II, str. 93–128.

[4] — *Mapping a sphere onto a homotopy 3-sphere*, Topology Seminar Wisconsin 1965, str. 89–99.

[5] M. Brown, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1970), str. 74–76.

[6] S. S. Cairns, *The triangulation problem and its role in analysis*, ibidem 52 (1946), str. 545–571.

[7] R. H. Fox, *Construction of simply connected 3-manifolds*, Topology of 3-manifolds and related topics, str. 213–216.

[8] Jonathan L. Gross, *Manifolds in which the Poincaré Conjecture is true*, Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), str. 177–189.

[9] — *An infinite class of irreducible homotopy 3-spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), str. 173–176.

[10] Wolfgang Haken, *On homotopy 3-spheres*, Illinois J. Math. 10 (1966), str. 159–180.

[11] — *Some results on surfaces in 3-manifolds*, MAA Studies in Mathematics, vol. V, str. 39–98.

[12] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. 34 (1960), str. 257–270.

[13] — and J. Milnor, *Groups of homotopy spheres*, Ann. of Math. 77 (1963), str. 504–537.

[14] K. Koseki, *Poincarésche Vermutung in Topologie*, Math. J. Okayama Univ. 8 (1958), str. 1–106.

[15] — *Bemerkung zu meiner Arbeit „Poincarésche Vermutung"*, ibidem 9 (1959/60), str. 165–172.

[16] W. B. R. Lickorish, *An improbable collapse*, Topology 12 (1973), str. 5–8.

[17] G. R. Livesay, *Fixed-point free involutions of the 3-sphere*, Ann. of Math. 72 (1960), str. 603–611.

[18] А. Марков, *О неразрешимости некоторых проблем топологии*, Докл. Акад. Наук. СССР 123 (1958), str. 978–980.

[19] — *Insolvability of the problem of homeomorphy*, Proc. Intern. Cong. Math. 1958, Cambridge 1960, str. 300–306.

[20] D. R. McMillan, Jr., *Some contractible open 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), str. 373–382.

[21] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. 64 (1956), str. 399–405.

[22] — *Morse theory*, Princeton 1963.

[23] — *Lectures on the h-cobordim theorem*, Princeton 1965.

[24] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds, V. The triangulation problem and Hauptvermutung*, Ann. of Math. 56 (1952), str. 96–114.

[25] C. D. Papakyriokopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, ibidem 66 (1957), str. 1–26.

[26] — *On solid tori*, Proc. London Math. Soc. 7 (1957), str. 281–299.

[27] — *Reduction of the Poincaré Conjecture to other conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), str. 360–366.
[28] Valentin Poénaru, *Quelques remarques sur les diagrammes de Heegard*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 24 (1970), str. 37–52.
[29] — *Sur la structure des sphères d'homotopie lisses en dimension* 3, Publications Mathématiques d'Orsay, Juin 1971 (preprint).
[30] H. Poincaré, *Analysis Situs*, Journ. Ecole polytechn. 1 (1895), str. 1–121. (Istnieje przekład rosyjski prac Poincarégo: А. Пуанкаре, *Избранные Труды*, Москва 1972.)
[31] — 1^r *Complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo 13 (1899), str. 285–343.
[32] — 2^d *Complément*, Proc. London Math. Soc. 32 (1900), str. 277–308.
[33] — 3^e *Complément*, Bull, Soc. Math. France 30 (1902), str. 49–70.
[34] — 4^e *Complément*, J. Math. Pures Appl. 8 (1902), str. 169–214.
[35] — 5^e *Complément*, Rend. Circ. Math. Palermo 18 (1094), str. 45–110.
[36] K. Reidemeister, *Homotopieringe von Linsenräume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1935), str. 102–109.
[37] H. Seifert und W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig 1934.
[38] S. Smale, *Generalized Poincaré Conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. 74 (1961), str. 391–406.
[39] Jahn Stallings, *Polyhedral homotopy spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), str. 485–488.
[40] — *How not to prove the Poincaré Conjecture*, Topology Seminar Wisconsin 1965, str. 83–88.
[41] A. H. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. 12 (1960), str. 503–528.
[42] — *Modifications and cobounding manifolds* II, J. Math. Mech. 10 (1961), str. 773–809.
[43] J. H. C. Whitehead, *Certain theorems about three-dimensional manifolds*, I, Quart. J. Math. Oxford 5 (1934), str. 308–320.
[44] — *Three-dimensional manifolds* (*corrigendum*), ibidem 6 (1935), str. 80.
[45] — *A certain open manifold whose group is unity*, ibidem 6 (1935), str. 268–279.
[46] — *Simplicial spaces, nuclei, and m-groups*, Proc. London Math. Soc. 45 (1939), str. 243–327.
[47] — *On incidence matrices, nuclei and homotopy types*, Ann. of Math. 42 (1941), str. 1197–1239.
[48] E. C. Zeeman, *The generalized Poincaré conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), str. 270.
[49] — *The Poincaré Conjecture for* $n \geqslant 5$, Topology of 3-manifolds and related topics, str. 198–204.
[50] — *On the dunce hat*, Topology 2 (1964), str. 341–358.