ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVIII (1974)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

LEON HENKIN (Berkeley)

Matematyczne podstawy matematyki(1)

1. Wstęp. Większość prac matematycznych traktuje matematykę bardzo wąsko — parę definicji, twierdzeń, dowodów. Jeśli autor ma pewną dozę śmiałości, a także współczucie dla czytelnika, może też dołączyć omówienie intuicji, które ukształtowały formalną część jego pracy. Ten artykuł będzie miał jednak inny charakter.

Zastanawiając się nad tym, co wybrać na to *Sympozjum Chauveneta*(2) pozwoliłem sobie przebiec myślą te wszystkie dziedziny podstaw matematyki, w których pracowałem, bądź też o które tylko się otarłem, jak logika matematyczna, dowody twierdzeń o pełności, zastosowania logiki do algebry, zagadnienia rozstrzygalności, logika nieskończona ... jakoś nic nie wydało mi się odpowiednie. Zacząłem się zastanawiać dlaczego. Wydaje mi się teraz, że odpowiedź jest związana z czymś, co można by nazwać socjologiczną strukturą naszego współczesnego amerykańskiego środowiska matematycznego.

Jest bowiem faktem, że matematycy pracujący w zakresie podstaw są uważani przez pozostałych matematyków za cokolwiek innych. Ci, którzy pracują w głównym nurcie jednej z takich dyscyplin jak algebra, geometria czy analiza, znają zazwyczaj najbardziej podstawowe pojęcie pozostałych dyscyplin, a nawet w pewnym stopniu mieli do czynienia z jakimiś elementarnymi problemami dotyczącymi tych pojęć. Podstawy natomiast, podobnie jak inne nowe dyscypliny matematyczne, takie jak statystyka lub teoria maszyn matematycznych, oraz pewne stare, jak mechanika ciał niebieskich, są uważane za dziedziny, co do których wię-

(1) Rozwijany tutaj punkt widzenia na podstawy matematyki został po raz pierwszy sformułowany przeze mnie na Wykładach IBM, które miały miejsce w grudniu 1967 r. w Swarthmore. Ten punkt widzenia był następnie rozwijany w ciągu dłuższego czasu, kiedy to praca moja była subwencjonowana przez National Science Foundation. Niniejsza publikacja jest ostateczną wersją pracy napisanej na Chauvenet Symposium, które odbyło się w październiku 1969 r. w U.S. Naval Academy.

(2) Pewna ograniczona ilość egzemplarzy materiałów *Chauvenet Symposium* wydana jako jeden tom może być uzyskana po pisemnym skontaktowaniu się z Profesorem J. C. Abbottem, Departament of Mathematics, U. S. Naval Academy, Annapolis, Md., 21402.

kszość matematyków może bezpiecznie zachowywać pełną niewiedzę, jeśli tylko wiadomo mniej więcej, o co w nich chodzi. Każda z tych marginesowych dyscyplin wiąże matematykę z jakąś niematematyczną dyscypliną; o ile jednak w przypadku statystyki, teorii maszyn czy mechaniki ta druga dziedzina jest powszechnie uznana jako właściwe pole zastosowań matematyki, o tyle w przypadku podstaw tą inną dyscypliną jest filozofia, co czyni całą sprawę nieco podejrzaną.

Jestem przekonany, że taki stan rzeczy powoduje, że „podstawowcowi" trudno jest napisać artykuł na temat bardziej szczegółowy przeznaczony dla szerszych kręgów matematyków, chyba że zdecyduje się na omawianie w nim rzeczy najbardziej elementarnych. Zdecydowałem się więc z tego powodu do napisania o podstawach matematyki „w ogóle".

Znaczenie zwrotu „podstawy matematyki" zmienia się w zależności od kontekstu. Czasami oznacza on po prostu pewien najbardziej początkowy fragment matematyki, z którego buduje się jej wszystkie inne partie. Kiedy indziej zwrot ten odnosi się od komentowania matematyki z zewnątrz, coś w rodzaju wyjaśniania znaczenia pracy matematyków, często wyrażanego w terminach metafizyki. Jeśli przyjmiemy pragmatyczny punkt widzenia, a mianowicie że podstawy matematyki to właśnie to, co jest uprawiane przez ludzi, którzy deklarują się jako pracujący w tej dziedzinie, to dwie rzeczy stają się widoczne. Po pierwsze, że zasięg tej dziedziny, ilość i wzajemne zróżnicowanie poszczególnych jej części wzrosły w ciągu ostatnich dziesięcioleci niepomiernie. I po drugie, że punkt ciężkości tej bogatej problematyki przesuwał się stale, i to ze wzrastającą prędkością z filozofii w kierunku matematyki.

Proces ten nie jest bez wątpienia czymś wyjątkowym. Wszystkie nauki eksperymentalne były w swoim czasie poszczególnymi gałęziami „filozofii naturalnej" i odłączały się od niej stopniowo, tworząc samodzielne dyscypliny naukowe. Wykształcenie się niezależnych nauk, takich jak fizyka, chemia czy biologia nie oznaczało wcale, że filozofowie zupełnie przestali się tymi naukami interesować. Wręcz przeciwnie, pozostali oni zainteresowanymi widzami, a często nawet i uczestnikami ich samodzielnego rozwoju. I tak też jest z podstawami matematyki. Nawet jeśli matematyk w coraz to większym stopniu opanowuje tę dyscyplinę, przekształcając ją w twór mający postać matematycznych definicji, twierdzeń i dowodów, zawsze pozostaje coś poza granicami matematyki, co okazuje się płodną i nie zaniedbywaną dziedziną dociekań filozoficznych.

To pojawienie się matematyków jako ważnego i docenionego składnika w badaniach podstaw matematyki jest zwykle datowane na koniec ubiegłego stulecia. Grunt na to był już przygotowany przez rozwój nowych działów matematyki, poczynając od geometrii nieeuklidesowej z pierwszej połowy XIX w., prac Boole'a z logiki ogłoszonych około 1850 r., stworzenia przez Cantora teorii mnogości poczynając od 1870 r., a także przez prace takich ludzi, jak Dedekind, Schroeder, Frege, Weierstrass, Peano i Zermelo. Pozostawili oni jednak innym matematykom, pracującym nieco później, zadanie rozgraniczenia i wyprecyzowania rozmaitych punktów widzenia na podstawy matematyki, opartych na wymienionych wyżej,

a także i nowych osiągnięciach techniki, które wywarły głęboki i długotrwały wpływ na dalszy rozwój podstaw. Najbardziej znanymi matematykami tej grupy byli Kronecker, Poincaré, Brouwer, Hilbert i Russell.

Będąc już powszechnie znanymi dzięki pracom w różnych dziedzinach matematykami, rozpoczeli dyskusję na temat istoty i znaczenia matematyki. Dyskusję tę prowadzili za pomocą całych serii publikacji, a także prywatnych listów, które wkrótce stały się jednak powszechnie znane. Tak zasadnicza rozbieżność zdań, niemalże nieznana w starych działach matematyki, stała się oczywiście obiektem szerokiego zainteresowania. W jej wyniku powstały trzy „szkoły", które znane są pod nazwami Intuicjonizmu, Formalizmu i Logicyzmu.

Intuicjonizm, który Brouwer rozwinął z pewnych idei Poincarégo i Kroneckera, zdecydowanie wyrzekł się klasycznego sposobu stosowania matematycznego języka i logiki, i zażądał surowych ograniczeń na dopuszczalne sposoby prowadzenia matematycznych konstrukcji.

Formalizm, którym to terminem nazywano program Hilberta, zogniskował swoją uwagę na symbolach języka matematyki i usiłował objaśnić ich zastosowanie za pomocą reguł o charakterze syntaktycznym. Ich bezwarunkowe uzasadnienie miało być uzyskane za pośrednictwem dowodu niesprzeczności o tak podstawowym charakterze, by jego prawdziwość nie mogła być kwestionowana.

Logicyzm, który Russell oparł na ideach Fregego, skoncentrował się na zadaniu unifikacji matematyki, dokonując systematycznych redukcji kolejnych jej fragmentów do najbardziej podstawowych i ogólnych: logiki i pojęcia zbioru.

Przez następnych sześć lub siedem dziesiątków lat od czasu sformułowania wymienionych wyżej stanowisk, ilość matematyków podejmujących prace nad podstawami stale się zwiększała. Większość osiągniętych początkowo wyników mieściła się całkowicie w ramach zestawu tych trzech systemów. Z biegiem jednak czasu, tak jak to zawsze się zdarza w wyniku dłuższego rozwoju, cała dyscyplina została gruntownie przeobrażona przez zmiany zarówno powolne, jak też i gwałtowne, wynikające z całkowicie nieoczekiwanych odkryć. Pojawiła się nowa problematyka dla badań nad podstawami i znaleziono ponadto nowe związki z innymi działami matematyki.

Pomimo tego pączkowania działalności matematycznej, jej komentatorzy w swych usiłowaniach klasyfikowania i analizowania osiąganych wyników próbowali ciągle mieścić je w starym schemacie logicyzmu — formalizmu — intuicjonizmu. Jest teraz jasne, że te wysiłki stawały się coraz to bardziej nieprzydatne i prowadziły do coraz bardziej wypaczonego obrazu uzyskiwanych wyników. Zasadniczą zapewne przyczyną tego stanu rzeczy był fakt, że koncepcje zawarte w tych rozmaitych punktach widzenia miały zasadniczo charakter filozoficzny, i jako takie nie mogły być łatwo dostosowywane do opisywania narastającego procesu przechodzenia od filozofii do matematyki.

Wydaje się, że jest już stosowna pora, aby wyłożyć nowy system, schemat klasyfikacji, który wprowadziłby zwartość i ład w całość prac nad podstawami matematyki. Podstawowe idee takiego nowego systemu klasyfikacyjnego powinny

zasadniczo mieć charakter bardziej matematyczny niż filozoficzny, aby można było uwzględnić rosnący matematyczny charakter klasyfikowanych prac. Główna idea, którą w szczególności będziemy tu rozwijać, to oparcie analizy prac z podstaw matematyki na następującym schemacie klasyfikacyjnym: aspekty teoriomnogościowe, aspekty algebraiczne i w końcu aspekty konstruktywistyczne.

Można oczywiście uznać, że taki schemat nie jest właściwie niczym więcej, jak tylko przemianowaniem rozważanych uprzednio podstawowych kategorii. Z pewnością pojęcia teorii mnogości tworzą podstawową część logicyzmu, algebraiczne aspekty podstaw można ściśle związać z podejściem formalistycznym, a w końcu konstruktywne elementy matematyki wywodzą się z tego samego ducha dociekliwości, który skłonił Brouwera do wzniesienia sztandaru intuicjonizmu. Choć jednak warto, rzecz jasna, zauważyć istnienie tych związków, wydaje mi się, że nasza przed chwilą zaproponowana klasyfikacja różni się od tradycyjnej w zasadniczy sposób.

Jedną z największych różnic pomiędzy nimi jest związana z zagadnieniem możliwości godzenia poszczególnych aspektów. Logicyzm, formalizm i intuicjonizm były zasadniczo konkurującymi ze sobą punktami widzenia na podstawy matematyki. Istotnie, ton wymienianych pomiędzy autorami tych programów listów i publikacji graniczył niemal z zaciekłością, bo każdy z nich uważał, że jego pogląd na podstawy jest słuszny i że inni (w konsekwencji) są w błędzie.

Dziś natomiast łatwo możemy stwierdzić istnienie szerokiej współpracy pomiędzy matematykami wprowadzającymi teoriomnogościowe, algebraiczne bądź konstruktywne elementy do badań nad podstawami matematyki.

Każdy z tych kierunków wspiera pozostałe, przeplatają się one i przenikają wzajemnie, aby pełniej oświetlić i opisać swą wspólną dziedzinę. Niektóre najwyżej cenione twierdzenia i spostrzeżenia są właśnie twierdzeniami rzucającymi światło na związki różnych prądów w pracach nad podstawami.

W dalszej części niniejszego artykułu zajmiemy się pokazaniem, w jaki sposób można zmieścić w omówionych wyżej ramach cały szereg złożonych problemów, którymi zajmowali się „podstawowcy".

2. Algebraiczna strona podstaw. Ciągle przypomina mi się definicja algebry, którą podała mi moja nauczycielka gimnazjalna na samym początku naszych zajęć: „To tak jak w arytmetyce — powiedziała — tylko używamy liter zamiast liczb". Ci, którzy zgłębili ten przedmiot nieco gruntowniej niż tego wymaga się w szkole średniej, nie mogliby podać tak prostej definicji tego działu matematyki, choć zgodziliby się zapewne z tym, że użycie liter jako zmiennych w równaniach jest ważną cechą charakterystyczną tej dyscypliny.

Jedną z najbardziej znamiennych tendencji współczesnej matematyki jest rozwijanie algebraicznej strony różnych dyscyplin matematycznych — mamy więc np. topologię algebraiczną, geometrię algebraiczną, analizę funkcjonalną i, już zupełnie ostatnio, logikę algebraiczną. To wniknięcie algebry do innych działów jest przejawem, jak sądzę, poważnego wysiłku zmierzającego do zachowania jed-

ności matematyki, co uzyskuje się dzięki twemu, że rozwój bardziej wyspecjalizowanych jej działów jest równoważony przez te elementy, które ułatwiają komunikowanie się wszystkich matematyków między sobą.

Chociaż termin „logika algebraiczna" (ukuty przez Halmosa) ma niespełna dziewięć lat, sama idea jest wynikiem ciągłego rozwoju, który rozpoczął się od prac Boole'a w 1850 r. Punktem wyjścia tych badań było proste spostrzerzenie, że pewne klasyczne prawa logiki mogą być wyrażone za pomocą równości algebraicznych; na przykład prawo podwójnego przeczenia przyjmuje postać $--p=p$, podczas gdy prawo wyłączonego środka można wyrazić za pomocą równości $p+(-p)=1$.

To że można przejść od jednych praw do innych, stosując znane z algebry sposoby podstawiania za zmienne w tożsamościowych równościach i zamieniania „równych przez równe", posłużyło następnie do wykazania, że zarówno logika, jak i algebra liczb, mają to samo podłoże.

W dalszym ciągu badań Boole wzbogacił swą teorię, dodając drugą interpretację swych równań algebraicznych, zgodnie z którą zmienne mogą przedstawiać zbiory, a nie zdania, jak uprzednio.

Równanie $--p=p$ znaczy więc teraz, że uzupełnienie uzupełnienia danego zbioru jest z nim identyczne, a $p+(-p)=1$ wyraża fakt, że suma zbioru i jego uzupełnienia dają całą przestrzeń. Dopiero jednak Stone, około osiemdziesiąt lat później, uczynił dalszy zasadniczy krok, rozważając klasę wszystkich struktur spełniających rozważane przez Boole'a równania i nazwał je algebrami Boole'a, a następnie badał ich wzajemne związki za pomocą takich pojęć, jak homomorfizm, podalgebra i produkt prosty, które to pojęcia zostały utworzone dla potrzeb badań nad teorią grup i pierścieni.

W okresie między Boolem a Stonem działali jednakże i inni matematycy. Rachunek klas Boole'a spowodował gruntowne zbadanie przez Schroedera algebry relacji binarnych, Pierce uczynił szereg ważnych kroków na drodze do wprowadzenia kwantyfikatorów w obręb logiki wyrażalnej w terminach algebraicznych, Tarski zainicjował studia nad dedukcyjnie zamkniętymi systemami zdań, wyprzedzając wiele odkryć i metod Stone'a.

Użycie równań Boole'a do określania klasy algebr Boole'a, a także udowodnienie przez Stone'a centralnego dla tej teorii twierdzenia o reprezentacji, miało głęboki wpływ na dalszy rozwój logiki algebraicznej. Jednym z pierwszych jego przejawów było zbudowanie przez Tarskiego teorii relacji: wydzielił on pewną ilość odkrytych przez Schroedera w jego pracy o relacjach binarnych tożsamości i użył ich jako aksjomatów nowej klasy algebr. Następnie badał możliwości izomorficznego reprezentowania dowolnej algebry tej klasy przez jakąś relację binarną nad pewnym zbiorem. Badania te miały, jak się okaże, niezwykłą historię.

Rozważając zbiór wszystkich relacji binarnych nad jakimś zbiorem U wyróżniamy nie tylko relację pustą $\emptyset$ i pełną $U\times U$, lecz także relację identyczności I_u. Rozważamy także nie tylko operacje Boole'owskie $\cup$, $\cap$ i $\sim$ (uzupełnienie względem zbioru $U\times U$, ze względu na które rozważany zbiór relacji jest zamknięty),

lecz także operacje tworzenia relacji odwrotnej $R^{\cup}$ dla danego $R \subset U \times U$ i dwuargumentowej operacji tworzenia względnego produktu $R|S$ dla danych R i S tak, że dla danych $x, y \in U$ zachodzi $x(R|S)y$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli xRz i zSy dla jakiegoś $z \in U$. Tożsamości Boole'owskie tworzą zestaw zupełnie trywialnych twierdzeń takiej teorii. Jest także wiele prostych twierdzeń mówiących o I_u, $\cup$, i $|$, na przykład prawo łączności dla $|$, fakt, że I_u jest dwustronną jednością dla operacji $|$, prawo rozdzielności dla $\cup$ nad U, addytywność, tzn. że $(R_1 \cup R_2)|S = (R_1|S) \cup (R_2|S)$ i $R|(S_1 \cup S_2) = (R|S_1) \cup (R|S_2)$, a także prawo $(R|S)^{\cup} = S^{\cup}|R^{\cup}$. Z drugiej strony jednak, jest wiele równości zawierających te pojęcia, o których bardzo trudno orzec czy zachodzą tożsamościowo dla relacji nad dowolnym zbiorem U.

Istotnie, Tarski pokazał bowiem, że nie istnieje metoda, która pozwalałaby automatycznie rozstrzygnąć w skończonej ilości kroków, czy dana równość jest tożsamością. Wynik ten Tarski uzyskał pokazując, jak dowolne zdanie arytmetyki elementarnej (o której wiadomo, że jest nierozstrzygalna) może być przetłumaczone na równoważne zdanie, mające postać równości dla algebr relacyjnych.

Warto dla kontrastu dodać, że wiadomo, iż równość Boole'owska jest tożsamością w dowolnej algebrze Boole'a, jeżeli jest identycznością w algebrze podzbiorów zbioru jednoelementowego, co daje oczywiście prostą efektywną metodę wydzielania tożsamości spośród wszystkich równości Boole'owskich.

Po tym, jak Tarski wydzielił pewną ilość tożsamości dla teorii relacji i wziął je jako aksjomaty do zdefiniowania klasy algebr relacyjnych, Lyndon znalazł inne tożsamości, których nie można było z tych aksjomatów wyprowadzić.

Zdawać by się mogło, że wystarczy dodać te tożsamości, aby uzyskać system aksjomatów wystarczająco silny, by dało się za jego pomocą udowodnić wszystkie równości teorii relacji binarnych lub nawet taki, by dało się udowodnić, że każda struktura spełniająca aksjomaty musi być izomorficzna z algebrą relacji nad pewnym zbiorem. Lyndon jednak opublikował pracę, w której dowodził, że drugi cel nie jest możliwy do osiągnięcia, konstruując algebrę relacyjną, która nie jest izomorficzna z żadną algebrą relacji binarnych nad żadnym zbiorem, chociaż, jak się wydawało, algebra ta i algebra tego ostatniego rodzaju mają identyczne zbiory tożsamości. Później jednakże Tarski uzyskał wręcz przeciwny wynik: pokazał on, że każdy model spełniający zbiór wszystkich tożsamości, które zachodzą w każdej algebrze relacyjnej, musi być izomorficzny z taką algebrą. (Wynik ten Tarski uzyskał stosując twierdzenie G. Birkhoffa o algebrach równościowo definiowalnych pokazując, że klasa izomorficznych obrazów algebr relacji jest zamknięta ze względu na tworzenie podalgebr, obrazów homomorficznych i produktów prostych.) W końcu Dana Scott znalazł błąd w dowodzie Lyndona. Jeszcze później Monk pokazał, że żaden skończony system równości nie może scharakteryzować izomorficznych obrazów algebry relacji.

Ewerett i Ulam podeszli do problemów teorii binarnych relacji od innej strony, formułując pojęcie algebry rzutowej. Zamiast operacji tworzenie relacji odwrotnej

i produktu względnego rozważali oni rzuty P_0 i P_1 dowolnej relacji $R \subset U \times U$ na „proste" $\{e\} \times U$ i $U \times \{e\}$, gdzie e jest wyróżnionym elementem U. Operacje Boole'owskie są w tych strukturach zachowane. Tego rodzaju podejście umożliwia algebraizację o wiele bardziej ograniczonej części teorii relacji niż sposób Tarskiego, dzięki czemu autorzy byli w stanie podać twierdzenie o reprezentacji dla klasy algebr rzutowych. Udowodniono także, iż istnieje efektywny sposób rozstrzygania w skończonej liczbie kroków czy dana równość tej teorii zachodzi tożsamościowo dla wszystkich relacji binarnych (lub — równoważnie na mocy twierdzenia o reprezentacji — dla dowolnych elementów dowolnej algebry rzutowej).

Chociaż pojęcie algebry rzutowej prowadzi do bardzo ograniczonej teorii, zasugerowało ono Tarskiemu i jego uczniom Chinowi i Thompsonowi dokonanie pewnych modyfikacji, które doprowadziły do znacznie bogatszych rezultatów. Najbardziej istotna zmiana polegała na odrzuceniu założenia binarności relacji nad zbiorem U i rozważania dla dowolnego α relacji α-argumentowych nad U. Ponadto, zamiast rozważać rzut relacji na jakąś specjalną „prostą" (lub podprzestrzeń liniową dla wieloargumentowych relacji) wybrano jako podstawowe operacje cylindryfikacji $C_\varkappa$ dla dowolnego $\varkappa < \alpha$: dla dowolnej α-argumentowej relacji R nad U relacja $C_\varkappa R$ jest zbiorem wszystkich „punktów" $\langle x_0, \ldots, x_{\alpha-1}\rangle$ zbioru U^α takich, że

$$\langle x_0, \ldots, x_{\varkappa-1}, y, x_{\varkappa+1}, \ldots, x_{\alpha-1}\rangle \in R$$

dla pewnego $y \in U$. Ostatecznie, w przypadku $\alpha = 2$, tak jak w algebrach rzutowych, przyjęto relację identyczności jako element wyróżniony, w przypadku ogólnym wyróżniamy α-argumentowe „relacje przekątniowe" $D_{\varkappa\lambda}$ nad zbiorem U, określone jak następuje

$$\langle x_0, \ldots, x_{\alpha-1}\rangle \in D_{\varkappa\lambda} \Leftrightarrow x_\varkappa = x_\lambda \quad \text{(dla dowolnych } \varkappa, \lambda < \alpha).$$

Zbiór relacji α-argumentowych nad zbiorem U nazywany jest *ciałem cylindrycznym* wymiaru α, jeżeli zawiera relacje $\emptyset$, U^α i $D_{\varkappa\lambda}$ (dla wszystkich $\varkappa, \lambda < \alpha$) i jeżeli jest zamknięty ze względu na Boole'owskie operacje $\sim$ (uzupełnienie do U^α), $\cup$, $\cap$, a także wszystkie cylindryfikacje $C_\varkappa$ (dla $\varkappa < \alpha$). Pojęcie *algebry cylindrycznej* wymiaru α otrzymuje się przez abstrakcyjne ujęcie pojęcia cylindrycznego ciała relacji jako struktury postaci

$$\langle A, +, \cdot, -, 0, 1, d_{\varkappa\lambda}, C_\varkappa\rangle_{\varkappa,\lambda<\alpha},$$

gdzie $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ jest algebrą Boole'a, $d_{\varkappa\lambda} \in A$ i $c_\varkappa$ jest jednoargumentową operacją nad A dla dowolnych $\varkappa$ i $\lambda < \alpha$ i w której pewna ilość równości zachodzi tożsamościowo. Równości te, zgrupowane w siedem schematów aksjomatów są, rzecz jasna, wybrane spośród równości, o których wiadomo, że są tożsamościami w każdym ciele cylindrycznym. Możemy wymienić niektóre spośród nich.

AKSJOMAT C_3. $c_\varkappa(x \cdot c_\varkappa y) = c_\varkappa x \cdot c_\varkappa y$ dla dowolnych $x, y \in A$.

AKSJOMAT C_7. $c_\varkappa(d_{\varkappa\lambda} \cdot x) \cdot c_\varkappa(d_{\varkappa\lambda} \cdot -x) = 0$ dla dowolnego $x \in A$, gdzie $\varkappa, \lambda < \alpha$ i $\varkappa \neq \lambda$.

Specjalne znaczenie algebr cylindrycznych dla badań logicznych wynika z faktu, że związek między cylindryfikacjami $c_\varkappa$ a kwantyfikatorami egzystencjalnymi $(\exists\, v_\varkappa)$ rachunku predykatów jest taki sam jak Boole'owskich operacji $+, \cdot$ i $-$ do spójników $\vee$ (alternatywy), $\wedge$ (koniunkcji) i $\neg$ (negacji) rachunku zdań. Podobnie elementy przekątniowe $d_{\varkappa\lambda}$ odpowiadają algebraicznie równościom $v_\varkappa = v_\lambda$ logiki z równością. Tak więc badanie tych algebr umożliwia rozwiązywanie zagadnień rachunku predykatów metodami algebraicznymi. Zanim jednak zadowolimy się tym, że algebraiczna struktura może być adekwatna dla pełnej analizy logicznej, trzeba rozważyć kilka pytań.

W rachunku predykatów, odzwierciedlając potrzeby wielu działów matematyki, rozważamy zazwyczaj systemy, w których mogą występować relacje o różnych ilościach argumentów. Jak więc możemy stosować algebry cylindryczne wymiaru α, gdy mamy α dokładnie ustalone? Otóż bardzo prosto — przyjmujemy, że $\alpha = \omega$ (pierwsza nieskończona liczba porządkowa) i dla każdego $\varkappa$, relację $\varkappa$ argumentową jako relację ω-argumentową, która zależy jedynie od $\varkappa$ pierwszych współrzędnych. Jeżeli weźmiemy na przykład jako U zbiór liczb rzeczywistych i zapragniemy przedstawić binarną relację $<$ na U jako relację o ω argumentach, wtedy możemy skorzystać z relacji R takiej, że dla każdego nieskończonego ciągu $\langle x_0, x_1, \ldots\rangle$ liczb rzeczywistych zachodzi $\langle x_0, x_1, \ldots\rangle \in R \Leftrightarrow x_0 < x_1$.

Zauważmy, że w powyższym przykładzie jeżeli $\varkappa \geqslant 2$ i $\langle x_0, x_1, \ldots, x_\varkappa\rangle \in R$ dla pewnego ciągu $\langle x_0, x_1, \ldots\rangle$ liczb rzeczywistych, to zmieniając w jakikolwiek sposób współrzędną $x_\varkappa$ otrzymujemy ciąg, który znów należy do R, innymi słowy mamy $C_\varkappa R = R$. Ogólnie, jeżeli tylko reprezentujemy relację λ-argumentową jako relację R o ω argumentach, wtedy dla każdego $\varkappa \geqslant \lambda$ mamy $C_\varkappa R = R$. Tak więc, w dowolnej algebrze cylindrycznej A wymiaru ω, rozważając zbiór A wszystkich tych $x \in A$, dla których $c_\varkappa x = x$, jeśli $\varkappa \geqslant \lambda$ mamy w zasadzie do czynienia z algebraiczną wersją cylindrycznego ciała relacji rzędu λ; nic więc dziwnego, że zbiór A wraz z operacjami $c_0, \ldots, c_{\lambda-1}$ i elementami przekątniowymi o wskaźnikach $< \lambda$ tworzą algebrę cylindryczną wymiaru λ.

Są oczywiście relacje o ω argumentach, które nie zależą jedynie od skończonej ilości współrzędnych i które rzecz jasna nie odpowiadają żadnej relacji o skończonej liczbie argumentów. W zwykłej logice predykatów i w większej części matematyki mamy jednak do czynienia z relacjami skończenie argumentowymi. Tak więc, jeżeli chcemy rozważać algebrę cylindryczną, która odpowiadałaby dokładnie systemowi logiki predykatów, musimy nałożyć następujący warunek: dla każdego $x \in A$ istnieje takie $\lambda \in \omega$, że $c_\varkappa x = x$ dla wszystkich $\varkappa \geqslant \lambda$. Taką algebrę cylindryczną nazywamy *algebrą lokalnie skończoną*.

Rozważmy w końcu operację tworzenia relacji odwrotnej, która jest jednym z najbardziej podstawowych pojęć algebry relacyjnej. W logice predykatów odpowiadającą jej operacją jest podstawianie, które umożliwia przejście od formuły Gxy do formuły Gyx. W jaki sposób można otrzymać taką operację w teorii algebr cylindrycznych? Aby na to odpowiedzieć, rozważmy operację S_2^0 taką, że $S_2^0 R = C_0(D_{02} \cap R)$ dla dowolnego R. Jeśli R jest relacją rzędu ω, która reprezentuje

relację binarną, tak że $C_\varkappa R = R$ dla $\varkappa \geqslant 2$, wtedy mamy

$$\langle x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle \in S_2^0 R \Leftrightarrow \langle x_2, x_1, x_0, x_3, \ldots\rangle \in R.$$

Dla tak otrzymanej relacji zachodzi równość

$$C_\varkappa(S_2^0 R) = S_2^0 R \quad \text{dla } \varkappa = 0, 3, 4, 5, \ldots$$

Dalej stosując operację S_3^1 do $S_2^0 R$ (gdzie $S_3^1 T = C_1(D_{13} \cap T)$ dla dowolnego T), łatwo stwierdzimy, że

$$\langle x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle \in (S_3^1 S_2^0 R) \Leftrightarrow \langle x_0, x_3, x_2, x_1, \ldots\rangle \in S_2^0 R \Leftrightarrow \langle x_2, x_3, x_0, x_1, \ldots\rangle \in R$$

oraz

$$C_\varkappa(S_3^1 S_2^0 R) = S_3^1 S_2^0 R \quad \text{dla } \varkappa = 0, 1, 4, 5, 6, \ldots$$

Kontynuując w powyżej opisany sposób stosowanie operacji S_0^3 i S_1^2 otrzymamy ostatecznie relację $T = S_1^2 S_0^3 S_3^1 S_2^0 R$ taką, że $C_\varkappa T = T$ dla dowolnego $\varkappa \geqslant 2$ i taką, że

$$\langle x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle \in T \Leftrightarrow \langle x_1, x_0, x_2, x_3, \ldots\rangle \in R.$$

Jest więc widoczne, że T jest ω-argumentową relacją przedstawiającą binarną relację odwrotną do relacji reprezentowanej przez R.

Podobnie, w dowolnej algebrze cylindrycznej wymiaru α, możemy zdefiniować operację $S_\lambda^\varkappa$ dla dowolnych $\varkappa$, $\lambda < \alpha$ tak, aby $S_\lambda^\varkappa x = C_\varkappa(d_{\varkappa,\lambda} \cdot x)$, jeśli $\varkappa \neq \lambda$ i $S_\lambda^\varkappa \cdot x = x$. Jeżeli $\alpha = \omega$ i algebra jest lokalnie skończona, wtedy można tak dobrać skończony ciąg tych operacji $S_\lambda^\varkappa$, aby uzyskać dowolne zadane podstawienie dla relacji o danej liczbie argumentów.

Przypuśćmy, na przykład, że S' jest podstawieniem w relacji R takim, że

$$\langle x_0, x_1, x_2\rangle \in S'R \Leftrightarrow \langle x_2, x_0, x_0\rangle \in R$$

dla dowolnej trzyargumentowej relacji R. Wówczas S' odpowiada operacji $S_0^3 \cdot S_0^1 \cdot S_2^0 \cdot S_3^2$ w tym sensie, że dla dowolnej relacji R o ω argumentach, takiej że $R = R$ dla dowolnego $k \geqslant 3$ zachodzi $C(S_0^3 S_0^1 S_2^0 S_3^2 R) = (S_0^3 S_0^1 S_2^0 S_3^2 R)$ dla wszystkich $k \geqslant 3$ i ponadto

$$\langle x_0\, x_1\, x_2\, x_3 \ldots\rangle \in (S_0^3 S_1^0 S_2^0 S_3^2 R) \Leftrightarrow \langle x_2, x_0, x_0, x_3, \ldots\rangle \in R$$

dla dowolnego ciągu $\langle x_0, x_1, x_2, \ldots\rangle$.

Widzieliśmy już, jak lokalnie skończona algebra cylindryczna wymiaru ω może być stosowana do relacji dowolnego skończonego rzędu λ oraz w jaki sposób dowolne podstawienie może być uzyskane w wyniku kombinacji podstawowych w tej teorii operacji cylindryfikacji i elementów przekątniowych. Tak więc wszystkie elementy, z którymi możemy się zetknąć w logice predykatów pierwszego rzędu, mają swe algebraiczne odpowiedniki w algebrze cylindrycznej opisanego typu.

Dla klas lokalnie skończonych algebr cylindrycznych rzędu ω zachodzi następujące twierdzenie o reprezentacji: *Dla dowolnej takiej algebry A i dowolnego jej elementu $x \neq 0$ istnieje homomorfizm h algebry A w odpowiednie cylindryczne*

ciało relacji takie, że $hx \neq 0$. (Stosując ogólne algebraiczne metody można wykazać, że twierdzenie to jest równoważne stwierdzeniu, że każda algebra A rozważanej klasy jest izomorficzna z pewnym podprostym produktem ciał cylindrycznych.) To twierdzenie o reprezentacji można traktować jako algebraiczny odpowiednik twierdzenia o zupełności dla rachunku predykatów. Istotnie, oba twierdzenia są ściśle ze sobą związane — jedno wynika bezpośrednio z drugiego.

Dla klasy wszystkich algebr cylindrycznych wymiaru ω (bez założenia lokalnej skończoności) twierdzenie o reprezentacji nie zachodzi. Klasa dowolnych algebr cylindrycznych wymiaru ω zawiera bowiem cylindryczne ciało relacji rzędu ω, które nie reprezentuje żadnej relacji skończonego rzędu λ, tj. które nie spełnia żadnego warunku postaci $C_\varkappa R = R$ dla $\varkappa \geqslant \lambda$. Takie algebry odpowiadają systemom rachunków, predykatów w których formuły atomowe mogą składać się z symbolu predykatywnego poprzedzającego nieskończony ciąg symboli indywidualnych. Brak twierdzenia o reprezentacji dla klasy wszystkich ω-wymiarowych algebr cylindrycznych znaczy tyle, że istnieje taka algebra A, która nie jest izomorficzna z żadnym podprostym produktem ciał cylindrycznych, co pokazuje się przez podanie równości, która jest tożsamością w każdym cylindrycznym ciele wymiaru ω, lecz która nie zachodzi w A. W konsekwencji otrzymujemy w logice o nieskończonych predykatach (takiej, o jakiej była uprzednio mowa) istnienie pewnego zbioru formuł, który jest niesprzeczny ze względu na zwykłe reguły wnioskowania, ale który nie jest spełniony w żadnym modelu.

Możemy oczywiście rozważać klasę wszystkich algebr cylindrycznych dowolnego danego wymiaru α, skończonego lub nieskończonego. Dla dowolnego α możemy także rozważać ciało cylindryczne, którego elementami są relacje rzędu α nad pewnym zbiorem U, możemy więc pytać się, czy wszystkie α-wymiarowe algebry cylindryczne są reprezentowalne.

Okazuje się, że w każdym przypadku odpowiedź jest negatywna, z wyjątkiem $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$. Dla $\alpha = 2$ można podać dwie tożsamości charakteryzujące 2-wymiarowe reprezentowalne algebry cylindryczne, dla $\alpha > 3$ żaden skończony zbiór tożsamości nie charakteryzuje zbioru reprezentowalnych algebr cylindrycznych wymiaru α, chociaż dowolna algebra wymiaru α, w której są spełnione wszystkie tożsamości prawdziwe dla cylindrycznych ciał wymiaru α, jest zawsze reprezentowalna.

Istnieje uogólnione pojęcie algebry lokalnie skończonej: dla dowolnego α możemy rozpatrywać takie algebry cylinadryczne wymiaru α, że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi $c_\varkappa x = x$ dla przynajmniej jednego $\varkappa < \alpha$. O takiej algebrze mówimy, że jest *wymiarowo dopełniona* i okazuje się, że każda taka algebra jest reprezentowalna. A oto kilka innych klas algebr cylindrycznych, o których wiadomo, że są reprezentowalne dla dowolnego wymiaru α:

(i) Każda algebra, w której element jednostkowy można wyrazić jako skończoną sumę elementów przekątniowych $d_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa \neq \lambda)$.

(ii) Każda algebra generowana przez elementy monadyczne, tj. takie elementy x, że $C_\varkappa x = x$ dla dowolnego $\varkappa > 0$.

(iii) Każda algebra A wymiaru α, która może być zanurzona izomorficznie w algebrę B wymiaru $\alpha+\omega$ w taki sposób, że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi $C_\varkappa x = x$ dla $\varkappa = \alpha, \alpha+1, \alpha+2, \ldots$

Jest wiele otwartych pytań w teorii algebr cylindrycznych. Niektóre z nich mają czysto algebraiczny charakter; na przykład pytanie czy każda algebra skończenie generowana i prosta (tj. mająca tylko trywialny homomorfizm) może być generowana przez jeden element. Wiadomo, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna dla algebr cylindrycznych wymiaru skończonego, ale problem jest ciągle otwarty w przypadku wymiarów nieskończonych.

Inne otwarte problemy dotyczą związków algebr cylindrycznych z cylindrycznymi ciałami relacji. Dwa spośród nich zajmują centralną pozycję:

(i) Dla dowolnego α znaleźć wewnętrzną algebraiczną charakteryzację klasy wszystkich cylindrycznych ciał relacji wymiaru α.

(ii) Znaleźć operacje teoriomnogościowe o jasnym intuicyjnie geometrycznym znaczeniu, które przekształcałyby α-wymiarowe ciała cylindryczne w klasy systemów relacyjnych tak, by otrzymać izomorficzną reprezentację dowolnej algebry cylindrycznej wymiaru α.

Pytania te mają zupełnie podstawowe znaczenie, gdyż są one sformułowanymi w języku algebry problemami dotyczącymi szerokiej klasy systemów logicznych i ich interpretacji.

Aby niniejszy szkic logiki algebraicznej uczynić zupełnym, nadmienić jeszcze należy, że algebry cylindryczne to tylko jedna z kilku algebraicznych struktur, wprowadzonych w związku z systemami logicznymi. Pewne inne klasy uzyskuje się przez modyfikację praw Boole'a tak, by móc je stosować do logik „nieklasycznych". Spośród algebr używanych do badania logiki klasycznej obok algebr cylindrycznych najbardziej intensywnie były rozwijane badania algebr poliadycznych. Algebry te są to algebry Boole'a wzbogacone o operacje cylindryfikacji i podstawień (odpowiadających permutacjom i identyfikacjom symboli w logice predykatów). Klasa ω-wymiarowych lokalnie skończonych algebr poliadycznych daje algebraiczną teorię logiki predykatów bez równości; algebry tej klasy, które zawierają zbiór elementów przekątniowych są równoważne ω-wymiarowym lokalnie skończonym algebrom cylindrycznym. Dla skończonego α, lub dla α nieskończonego, ale bez warunku lokalnej skończoności, obie te klasy różnią się zasadniczo. W szczególności każda algebra poliadyczna wymiaru nieskończonego może być reprezentowana przez poliadyczne ciało relacji.

Opisaliśmy, niekiedy dość szczegółowo, rozwój logiki algebraicznej, gdyż na tym przykładzie najbardziej jest widoczny proces przenikania algebraicznych idei do badań w podstawach matematyki. Jednakże stosowanie metod algebraicznych do tych badań obejmuje wiele innych dziedzin podstaw matematyki. Omówimy tu trzy spośród nich.

1. Cały rozwój logiki dedukcyjnej może być rozpatrywany jako proces algebraizacji. Aby to zrozumieć, naszkicujemy wspólne elementy tworzenia niemal ka-

żdej teorii algebraicznej, jak np. teorii grup, pierścieni czy przestrzeni liniowych. (i) Punktem wyjścia jest jakiś wybrany zbiór obiektów i operacji nad nimi. (ii) Rozwijamy następnie jakiś język, aby móc mówić o tej strukturze i znajdujemy zdania z tego języka, które są w tej strukturze prawdziwe i które wydają się związane ze sobą pewnymi prostymi regułami przekształceń, np. możemy zająć się zdaniami mającymi postać równości i związanymi ze sobą regułami podstawiania i zmiany zmiennych. (iii) Następnie abstrahujemy od tej szczególnej dziedziny, którą interesowaliśmy się na początku, wybierając pewną ilość zdań prawdziwych wzmiankowanych w (ii) i używając ich jako aksjomatów badamy całą klasę struktur, w których te aksjomaty są spełnione. Jest to właśnie zasadnicze jądro procesu algebraizacji. (iv) W końcu szukamy twierdzeń o reprezentacji, które wiążą dowolny model naszych aksjomatów z tą strukturą, która legła u podłoża powstania całej teorii. Ten składający się z czterech części proces rozwoju można prześledzić w każdej dobrze rozwiniętej teorii algebraicznej.

Jak teraz można spojrzeć na logikę dedukcyjną z tego punktu widzenia?

(i) Najbardziej podstawowym obiektem badań logiki jest relacja implikacji. Jest to relacja, która wiąże jedno zdanie (wniosek) z danym zbiorem zdań (przesłankami). Aby mówić o tej relacji, musimy oczywiście mieć pewną strukturę gramatyczną L, zgodnie z którą budowane są wszystkie zdania składające się z listy symboli (dzielących się z kolei na zmienne, spójniki, nawiasy itp) oraz reguł zestawiania tych symboli w zespoły takie, jak termy, formuły i zdania. Gdy tylko gramatyka L jest ściśle określona, staje się konieczne opisanie sposobu w jaki jej składniki mogą być *interpretowane*, aby otrzymać język, w którym będziemy mówić o jakiejś zadanej strukturze (lub inaczej — rozważanej dziedzinie). Zgodnie z taką interpretacją każde zdanie z L przybiera ściśle określoną wartość logiczną prawdy lub fałszu. W końcu, mówimy o zdaniu, że jest *logicznie prawdziwe*, jeśli jest prawdziwe przy *każdej* interpretacji, zdanie φ jest *logiczną konsekwencją* zbioru zdań Γ (lub Γ *implikuje* φ), gdy φ jest prawdziwe *we wszystkich tych interpretacjach*, w których jest prawdziwe każde zdanie zbioru Γ.

(ii) Aby mówić o zbiorze zdań prawdziwych i relacji implikacji, wprowadzamy zmienne φ i ψ i inne, które przebiegają zdania z L, zmienne Γ, Δ itp., przebiegające zbiory tych zdań, a także specjalny symbol $\models$. Piszemy $\models\varphi$ aby zaznaczyć, że φ jest prawdziwe; natomiast $\Gamma\models\varphi$ oznacza, że Γ implikuje φ (to podwójne wykorzystywanie symbolu $\models$ jest zupełnie uzasadnione, jako że $\models\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\emptyset\models\varphi$)

Mamy także symbole na operacje tworzenia zdań bardziej złożonych ze zdań prostych lub formuł, takie jak znane oznaczenie $\varphi\rightarrow\psi$ na zdanie „jeżeli ... to" lub $\forall\vee\varphi$ oznaczające zdanie „dla wszystkich ..." Ostatecznie znajdujemy proste reguły przekształcania pozwalające przejść od pewnych wyrażeń postaci „$\Gamma\models\varphi$" prawdziwych dla implikacji, do innych. Na przykład reguła odrywania mówi, że jeśli mamy $\Gamma\models\varphi$ i $\Gamma\models\varphi\rightarrow\psi$, to możemy otrzymać $\Gamma\models\psi$; inna reguła pozwala przejść od $\Gamma\models\forall\times(\varphi\rightarrow\psi)$ do $\Gamma\models(\forall\times\varphi)\rightarrow(\forall\times\psi)$

(iii) Zamiast rozważania omówionej szczególnej relacji $\models$, możemy ogólniej

rozważać *dowolną* relację $\vdash$, mającą także własności, które jak się przekonaliśmy, ma relacja $\models$. Na przykład, gdybyśmy zauważyli, że $\models\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)$ dla dowolnych zdań φ i ψ z α, to moglibyśmy o naszej jeszcze nieokreślonej relacji $\vdash$ przyjąć aksjomat $\vdash\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)$ dla dowolnych φ i ψ z α. Podobnie możemy przyjąć regułę odrywania jako aksjomat o $\vdash$ wymagając, że jeżeli tylko $\Gamma\vdash\varphi$ i $\Gamma\vdash\varphi\rightarrow\psi$, to także $\Gamma\vdash\psi$... To przejście od teorii dla $\models$ do teorii dla $\vdash$ jest więc całkiem anologiczne do przejścia od badania addytywnych własności liczb całkowitych do badania klasy grup addytywnych. W tym jednak przypadku teoria relacji $\vdash$, do której właśnie doszliśmy, jest dokładnie tym samym, co nazywamy formalnym systemem dedukcyjnym. Te formuły Θ, dla których postulowaliśmy $\vdash\Theta$ są zwane *formalnymi aksjomatami* systemu dedukcyjnego; te natomiast postulaty o $\vdash$, które miały postać „jeśli tylko $\Gamma_1\vdash\Theta_1$ i $\Gamma_2\vdash\Theta_2$, to $\Gamma_3\vdash\Theta_3$" definiują to, co nazywamy *formalnymi regułami wnioskowania* systemu dedukcyjnego. Przez kombinacje formalnych aksjomatów i formalnych reguł wnioskowania otrzymujemy wprowadzenie zdań postaci $\vdash\Theta$, np. możemy wyprowadzić $\vdash\varphi\rightarrow\varphi$ dla wszystkich zdań φ z α; takie zdania Θ nazywamy *formalnymi twierdzeniami* i ciąg kroków prowadzących od aksjomatów i reguł do takiego formalnego twierdzenia zwany jest *formalnym dowodem*. Podobnie możemy wywieść zdania postaci „jeżeli $\Gamma_1\vdash\Theta_1$, to $\Gamma_2\vdash\Theta_2$", np. z formalnego aksjomatu i zwykłych reguł otrzymujemy, że jeśli $\Gamma\vdash\varphi$, to także $\Gamma\vdash\psi\rightarrow\varphi$. Takie stwierdzenia zwane są *pochodnymi regułami wnioskowania*. Wyprowadzenie takich reguł i twierdzeń formalnych tworzy elementarną część logiki dedukcyjnej. Jest to całkowicie analogiczne do wyprowadzania z aksjomatów teorii grup równości prawdziwych dla każdej grupy.

(iv) W końcu rozważamy ogół relacji $\vdash$ (zwanych formalnymi implikacjami) spełniającymi warunki opisujące formalne aksjomaty i reguły wnioskowania i staramy się znaleźć ich związki z relacją $\models$ logicznego wynikania, która była punktem wyjścia. W zwykłym systemie logiki elementarnej na przykład możemy pokazać, że $\models$ jest przecięciem wszystkich formalnych implikacji $\vdash$. Tę własność symbolu dedukcyjnego zwiemy pełnością, gdyż pozwala nam ona na stwierdzenie, że jeżeli tylko $\Gamma\models\varphi$, wtedy także $\Gamma\vdash\varphi$ dla każdej formalnej implikacji $\vdash$, a więc możemy stwierdzić, że $\Gamma\vdash\varphi$ stosując nasze formalne aksjomaty i formalne reguły wnioskowania. Jeżeli patrzeć na tworzenie systemu dedukcji jako na proces algebraizacji teorii logicznej implikacji, to stwierdzenie pełności systemu formalnej dedukcji należy traktować jako uzyskanie pewnego rodzaju twierdzenia o reprezentacji.

2. Inną dziedziną badań podstaw matematyki, w której aspekty algebraiczne odgrywają ważną rolę, jest teoria modeli. Chodzi w niej o szukanie związków między syntaktyczną postacią zdań danego zbioru a ogółem struktur, w których zdania te są prawdziwe, tj. struktur, które są modelami tego zbioru zdań. Dość typowe jest charakteryzowanie tej klasy modeli w terminach algebraicznych operacji na modelach, ze względu na które klasa ta jest zamknięta.

Jednym z najwcześniejszych i najważniejszych przykładów tego typu jest podana przez Garretta Birkhoffa charakteryzacja klas algebr równościowo definiowalnych.

Przypuśćmy, na przykład, że interesujemy się strukturami postaci $(A, \circ, f)$, gdzie A jest zbiorem zamkniętym ze względu na dwuargumentową operację $\circ$ i jednoargumentową operację f. (Ogół wszystkich takich struktur jest przykładem klasy struktur podobnych. Klasę tę będziemy oznaczali przez S.) Rozważmy prosty język L wyposażony w środki pozwalające na mówienie w nim o strukturze $(A, \circ, f) \in S$. Tak więc L powinien zawierać zmienne $x, y, z, \ldots$ przebiegające zbiór A, symbol $+$ oznaczający operację $\circ$ i symbol $-$ oznaczający operację f, a ponadto nawiasy i znak równości. Używając tych symboli możemy tworzyć rozmaite równości, jak np. $x+y = y+x$, $-(x+y) = -y$ itp. Mając daną równość i jakąś strukturę $(A, \circ, f) \in S$ możemy badać, czy równość ta zachodzi w tej strukturze tożsamościowo, czy też nie zachodzi przy przyjęciu jakichś elementów z A jako wartości zmiennych. W końcu, mając dany zbiór Γ równości możemy rozważać ogół S_Γ tych struktur z S, w których każda równość zachodzi tożsamościowo. Klasa struktur określona w ten sposób przez zbiór równości nazywana jest *klasą równościowo definiowalną*. Zagadnieniem należącym do teorii modeli jest scharakteryzowanie takich klas spośród wszystkich podklas S. Rozwiązanie podane przez Birkhoffa jest proste i eleganckie: *podklasa klasy S jest równościowo definiowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest zamknięta ze względu na operacje tworzenia podalgebr, obrazów homomorficznych i produktu prostego.*

Te trzy sposoby otrzymywania nowych struktur ze struktur danych stały się znane matematykom w związku z ich badaniami nad teorią grup i pierścieni. Okazało się wkrótce, że są one przydatne przy klasyfikacji innych rozmaitych struktur i w końcu uznano, że naturalnym dla nich miejscem jest ogólna teoria struktur algebraicznych (traktowana obecnie jako część podstaw matematyki). Chociaż różne starsze metody tworzenia nowych struktur algebraicznych udowodniły swą pełną przydatność dla teorii modeli, rozwój tej teorii doprowadził do powstania nowych metod wymyślonych specjalnie dla jej własnych potrzeb. Jedną z najbardziej użytecznych spośród nich jest tworzenie tzw. ultraproduktu danej rodziny struktur.

Przypuśćmy, że badamy znów klasę S struktur $(A, \circ, f)$ rozważaną już uprzednio i że skupiamy swoją uwagę na pewnej wybranej rodzinie $\{(A_i, \circ_i, f_i)\}_{i \in I}$ elementów tej klasy. Produkt prosty tej rodziny jest to, jak wiadomo, struktura $(B, \circ, f)$ określona jak następuje:

(a) B jest zbiorem wszystkich funkcji φ o dziedzinie I takich, że $\varphi_i \in A_i$ dla wszystkich $i \in I$,

(b) dla dowolnych $\varphi, \psi \in B$, element $\varphi \circ \psi$ zbioru B jest taki, że $(\varphi \circ \psi)_i = \varphi_i \circ_i \psi_i$ dla wszystkich $i \in I$,

(c) dla dowolnego $\varphi \in B$, element $f\varphi$ zbioru B jest taki, że $(f\varphi)_i = f_i \varphi_i$ dla wszystkich $i \in I$.

Ultraproduktem rodziny $\{(A_i, \circ_i, f)\}_{i \in I}$ jest homomorficzny obraz produktu prostego $(B, \circ, f)$ otrzymany w następujący sposób:

Rozważamy filtry na zbiorze I. Są to rodziny F podzbiorów zbioru I takie, że F jest zamknięte ze względu na $\cap$ i takie, że $X \in F$ i $X \subseteq Y \subseteq I$ pociąga za sobą

$Y \in F$. Jeśli jakiś filtr J jest właściwy, tzn. $\emptyset \in J$, to zawsze można go rozszerzyć do filtru J' takiego, że dla dowolnego $X \subseteq I$ albo X, albo uzupełnienie X jest w F, ale nie oba na raz. Tego rodzaju filtr J' nazywamy *ultrafiltrem*. Wybierając jakikolwiek ultrafiltr F na I możemy przejść od produktu prostego $(B, \circ, f)$ rodziny $\{(A_i, \circ_i, f_i)\}_{i \in I}$ do nowej struktury $(B/F, \circ/F, f/F)$ w następujący sposób. Rozważamy relację $\equiv_F$ na B taką, że dla dowolnych $\varphi, \psi \in B$ mamy $\varphi \equiv_F \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i : \varphi_i = \psi_i\} \in F$. Łatwo zauważyć, że jest to relacja równoważności i jako B/F bierzemy zbiór klas abstrakcji φ/F dla wszystkich $\varphi \in B$. Następnie stwierdzamy, że jeśli tylko $\varphi \equiv_F \psi$, wtedy także $(f\varphi) \equiv_F (f\psi)$, a więc f indukuje pewną operację f/F na B/F taką, że $(f/F)\ (\varphi/F) = (f\varphi)/F$ dla dowolnego $\varphi/F \in B/F$. Podobnie, jeśli tylko $\varphi_1 \equiv_F \psi_1$ i $\varphi_2 \equiv_F \psi_2$, wtedy także mamy $(\varphi_1 \circ \varphi_2) \equiv_F (\psi_1 \circ \psi_2)$, a więc otrzymujemy operację $\circ/F$ na B/F taką, że

$$(\varphi/F)\ (\circ/F)\ (\psi/F) = (\varphi \circ \varphi)/F$$

dla dowolnych φ/F, $\psi/F \in B/F$. Struktura $(B/F, \circ/F, f/F)$ otrzymana w ten sposób z produktu prostego $(B, \circ, f)$ i ultrafiltru F na I nazywa się *ultraproduktem rodziny* $\{(A_i, \circ_i, f_i)\}_{i \in I}$.

Ultraprodukty stają się dla teorii modeli interesujące, jeśli przejdziemy od równościowego języka L dobranego do naszej klasy S, do języka pierwszego rzędu L' dla S. W L' tworzymy zdania stosując (wielokrotnie) do równości z L spójniki $\neg$ (nie), $\wedge$ (i), $\vee$ (lub), $\rightarrow$ (jeśli ... to ...), $\leftrightarrow$ wtedy (i tylko wtedy) i poprzedzając tak uzyskaną formułę Q ciągiem kwantyfikatorów $\forall v$ (dla każdego v) lub $\exists v$ (dla pewnego v), po jednym dla każdej zmiennej v występującej w Q. Klasa S_σ składająca się ze wszystkich struktur $(A, \circ, f)$ z S, dla których pewne dane zdanie σ z L' jest prawdziwe, nazywa się *klasą elementarną*; klasą elementarną w szerszym sensie nazywa się podklasę S_Γ klasy S składającą się ze struktur spełniających jakiś zbiór Γ zdań z L'.

A oto podstawowe związki między ultraproduktami i zdaniami z L':

(1) *Dla dowolnego zdania σ z L', dowolnej rodziny $\{(A_i, \circ_i, f_i)\}_{i \in I}$ struktur z S i dowolnego ultrafiltru F na I, jest prawdziwe w ultraprodukcie $(B/F, \circ/F, f/F)$ tej rodziny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\{i \in I : \sigma \text{ jest prawdziwe w } (A_i, \circ_i, f_i)\} \in F.$$

(2) *Podklasa $T \subseteq S$ jest elementarna, jeżeli zarówno T, jak i $S \sim T$ są zamknięte ze względu na operację tworzenia ultraproduktu. T jest klasą elementarną w szerszym sensie, jeżeli T jest zamknięte ze względu na ultraprodukt i $S \sim T$ zawiera każdy ultraprodukt rodziny $\{(A_i, \circ_i, f_i)\}_{i \in I}$ takiej, że $(A_i, \circ_i, f_i) = (A, \circ, f)$ dla dowolnego $i \in I$, gdzie $(A, \circ, f) \in S \sim T$* (taki ultraprodukt nazywa się *ultrapotęgą* struktury $(A, \circ, f)$).

(3) *Dwie struktury $(A, \circ, f)$ i $(A', \circ', f')$ są elementarnie równoważne, jeśli nie istnieje takie zdanie σ' z L', które byłoby prawdziwe w jednej, a fałszywe w drugiej strukturze. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by dwie struktury były*

elementarnie równoważne, jest by istniała ultrapotęga jednej z nich, która byłaby izomorficzna z jakąś ultrapotęgą drugiej.

Twierdzenie (1) można łatwo udowodnić wprost z definicji ultraproduktu. Wyniki (2) i (3) zawdzięczamy J. Keislerowi, który w dowodach korzystał z uogólnionej Hipotezy Continuum. Jedynym z najwybitniejszych otwartych problemów teorii modeli jest zagadnienie, czy ta hipoteza może być z tego dowodu wyeliminowana(1).

3. Ostatnia dziedzina badań w podstawach matematyki, w której dominują algebraiczne aspekty i o której będziemy tu mówić, to zastosowanie wyników i metod „podstawościowych" do otrzymania specjalnych wyników w pewnych działach algebry. Jednym z działów algebry, w którym takie wyniki uzyskano, jest teoria ciał rzeczywisto-domkniętych. W 1948 r. Tarski opublikował efektywną metodę rozstrzygania w skończonej liczbie kroków, czy dane zdanie logiki pierwszego rzędu dla ciał uporządkowanych jest prawdziwe w dziedzinie liczb rzeczywistych. Metoda ta opiera się na lemacie mówiącym, że zdanie pierwszego rzędu jest prawdziwe w dziedzinie liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe w każdym ciele rzeczywisto-domkniętym. Tarski sam wskazał wiele zastosowań tego wyniku do szczegółowych problemów w algebrze, ale dopiero Abraham Robinson pokazał, jak pochodzące od Artina rozwiązanie siedemnastego problemu Hilberta może być prosto uzyskane z lematu Tarskiego: *Każdy dodatnio określony wielomian p* (przybiera tylko nieujemne wartości) *może być wyrażony jako suma kwadratów wymiernych funkcji, których współczynniki są w ciele generowanym przez współczynniki p.* Odwołując się do twierdzenia o pełności dla logiki pierwszego rzędu można było ten wynik wzmocnić pokazując, że ilość kwadratów potrzebna do przedstawienia danego wielomianu zależy tylko od jego stopnia i ilości zmiennych.

Najszerzej znanym zastosowaniem metod z podstaw matematyki do rozwiązania problemu algebraicznego jest wynik Axa i Kochena dotyczący ciał Q_p (p-adyczne uzupełnienie liczb wymiernych). Artin wysunął przypuszczenie, że każda forma stopnia d nad Q_p, w której ilość zmiennych przekracza d^2 ma nietrywialne zero w Q_p. Hipoteza ta została potwierdzona dla $d = 2$ i 3. Ax i Kochen pokazali, że przypuszczenie Artina było słuszne dla dowolnych d z wyjątkiem być może skończonego zbioru liczb pierwszych p (w zależności od d).

W dalszym ciągu stwierdzono, że pierwotne przypuszczenie nie jest w całej rozciągłości prawdziwe. Praca Axa i Kochena wykorzystuje ultraprodukty i bada klasy elementarne w klasie wszystkich pierścieni. Następnie Ax zastosował niektóre z tych technik do badań ciał skończonych, co pozwoliło mu na rozwiązanie wybitnego problemu o podstawowym charakterze — znalazł on mianowicie metodę pozwalającą efektywnie, automatycznie rozstrzygnąć w skończonej liczbie kroków czy dane zdanie pierwszego rzędu jest prawdziwe dla wszystkich ciał skończonych.

(1) Ostatnio S. Shelah podał dowód tego twierdzenia nie korzystający z uogólnionej Hipotezy Continuum (*Przyp. tłum.*).

3. Teoriomnogościowe aspekty podstaw. Badanie zbiorów w związku z podstawami matematyki zostało zapoczątkowane przez dwu ludzi — Cantora i Fregego, mniej więcej w tym samym czasie i miejscu, tj. w Niemczech w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Głównym osiągnięciem Cantora było rozwinięcie teorii mnogości jako podstawy do badania zbiorów nieskończonych, dzięki uogólnieniom pojęć liczby: kardynalnej i porządkowej. Frege, kierując się raczej „w dół" niż „w górę", starał się wyjaśnić teorię liczb naturalnych w terminach pojęć teorii mnogości.

Prace tych dwu ludzi zostały poważnie podważone przez paradoksy. Burali-Forti pokazał w 1897 r., że istnieje para nieporównywalnych liczb porządkowych, co zbiegło się w czasie z opublikowaniem przez Cantora dowodu czegoś wręcz przeciwnego. Podstawowe dzieło Fregego było w druku w 1902 r., kiedy otrzymał on list od Russella wskazujący, jak w jego systemie można dojść do sprzeczności przez rozważanie zbioru wszystkich zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami, i sprawdzanie czy taki zbiór jest swym własnym elementem.

Obydwa paradoksy, zarówno Burali-Fortiego, jak i Russella można odnieść do nieskrępowanego używania „zasady wyróżniania", która głosi, że z każdą własnością wyróżnioną przez formułę pierwszego rzędu $\sigma(x)$ o jednej zmiennej wolnej można związać zbiór G składający się ze wszytkich tych przedmiotów x, które tę formułę spełniają. Wzięcie jako $\sigma(x)$ formuły „x jest liczbą porządkową" prowadzi nas do paradoksu Burali-Forti, wzięcie natomiast jako $\sigma(x)$ formuły „x jest zbiorem, który nie jest swoim własnym elementem" prowadzi do paradoksu Russella.

Jak należy traktować te paradoksy? Mają one coś wspólnego ze szkolną zagadką: „Co się stanie, jeżeli nieodparta siła napotka nieporuszalne ciało". Oczywiście odpowiedź jest taka, że nie może być równocześnie nieporuszalnego ciała i nieodpartej siły: możemy to zawyrokować na podstawie znaczenia słów „nieodparty" i „nieporuszalny". Jednakże odpowiedź na pytanie, czy taka siła albo takie ciało istnieją, wymaga odwołania się bądź do badań empirycznych, bądź do jakiejś teorii fizycznej. W teorii mnogości mamy podobnie nieodparte siły, takie jak operacja przejścia od danego zbioru G do zbioru $G \cup \{G\}$, która wydaje się wskazywać na to, że każdy zbiór może być powiększony. Z drugiej strony, zbiór wszystkich zbiorów zachowuje się jak „nieporuszalne" ciało, gdyż nie można go rozszerzyć ze względu na jego pełny charakter. Jako że widać jasno, iż nie możemy mieć obu rzeczy na raz, pozostaje pytanie, co odrzucić?

Droga, na której tego rodzaju podstawowe decyzje były podejmowane, prowadziła przez formułowanie aksjomatycznych teorii mnogości. Najbardziej znana wersja została przedstawiona przez Zermelo w 1908 r. Według niej „nieodparta" siła jest wyraźnie „zabezpieczona", ponieważ każdy zbiór G może być rozszerzony do $G \cup \{H\}$, ale dla takich zbiorów H, które są podzbiorami G i dla których można dowieść, że $H \notin G$. Nieporuszalnych obiektywów nie ma, a rozumowania z paradoksu Russella używa się jako dowodu, że żaden zbiór nie może mieć wszystkich zbiorów jako swych elementów. Niemniej jednak teoria ta ma ambicje do pełnej ogólności jako że twierdzi, że jest teorią absolutnie wszystkich zbiorów. System Zermelo

był później przedstawiony jaśniej przez Skolema, następnie wzmocniony przez Fraenkela. Tak powstały system *ZF* jest szeroko używany.

W tym samym 1908 r. Russell opublikował swoją teorię typów. Teorię tę wysłowioną w języku logiki (funkcje zdaniowe, a nie zbiory są podstawowym obiektem badań) i skrępowaną hierarchiczną teorią rozgałęzionych typów z dodanym tajemniczym aksjomatem redukowalności, z trudem można było uznać za teorię zbiorów. Teoria ta jednakże, uproszczona przez Ramseya i Chwistka, stała się w końcu teorią zbiorów, chociaż o znacznie mniejszym zasięgu w porównaniu z teorią Zermelo. W swej najprostszej wersji dotyczy ona ciągu dziedzin $D_0, D_1, \ldots$, gdzie D_0 jest dziedziną „indywiduów" (przedmiotów nie będących zbiorami), a D_{n+1} jest dziedziną składającą się ze wszystkich podzbiorów zbioru D_n, dla dowolnego n naturalnego. Nie można rzecz jasna oczekiwać, że te dziedziny będą zawierały wszystkie zbiory, zawierają one jednakże dostateczną ich ilość, aby rozwijać teorie takie, jak klasyczna teoria liczb i przestrzeni geometrycznych, i w gruncie rzeczy niemal wszystkie działy matematyki z wyjątkiem pełnej teorii pozaskończonych liczb kardynalnych i porządkowych. Teoria typów, podobnie jak *ZF*, jakby przekładała „nieodpartą siłę" nad „nieporuszalne ciało", bo chociaż dla dowolnego zbioru w dziedzinie D_n zawsze możemy znaleźć większy w D_{n+1}, to jednak nie ma zbioru zawierającego wszystkie zbiory.

Zaksjomatyzowana teoria, w której dopuszcza się istnienie „nieporuszalnego ciała" odpornego na każdą próbę rozszerzenia, została po raz pierwszy wymyślona przez von Neumanna, a następnie przetworzona przez Bernayna, by w końcu uzyskać dzięki Gödlowi ostateczną postać. Teorię tę oznaczamy przez *vNBG*. Podstawowymi jej obiektami są klasy. Rozróżniamy dwa rodzaje klas: te które są elementami jakichś innych klas i te, które nie są. (Te pierwsze nazywamy zbiorami, zaś te drugie klasami właściwymi.) Tak więc istnieje klasa V wszystkich zbiorów, nie można jej jednak rozszerzyć do $V \cup \{V\}$, ponieważ V nie jest elementem żadnej klasy i z tego powodu nie możemy $\{V\}$ utworzyć.

Chociaż oba systemy, tj. *ZF* i *vNBG* były przedstawione jako systemy dotyczące wszystkich w ogóle zbiorów, z pewnego punktu widzenia jednakże dostarczają one, podobnie jak teoria typów, tylko opisu części naiwnego świata Cantora. Ten punkt widzenia uzyskuje się za pomocą pojęcia rangi.

Przypuśćmy, że relacja ϵ jest ufundowana. Intuicyjnie znaczy to, że nie ma nieskończonego ciągu zbiorów $\ldots x_3 \epsilon x_2 \epsilon x_1 \epsilon x_0$. W eleganckim sformułowaniu, które zawdzięczamy von Neumannowi, brzmi to jak następuje: każdy niepusty zbiór x ma element y nie mający wspólnego elementu $z \epsilon x$. Przy tym założeniu z każdym zbiorem x możemy związać pewną liczbą porządkową $r(x)$ — rangę x, za pomocą reguły rekurencyjnej mówiącej, że $r(x)$ jest najmniejszą liczbą porządkową większą od wszystkich $r(y)$ dla $y \epsilon x$. Jasne jest, że $r(\emptyset) = 0$, jeżeli przyjmiemy definicję von Neumanna liczb porządkowych, według której $\emptyset = 0$ i ogólniej, każda liczba porządkowa okazuje się zbiorem liczb porządkowych od niej mniejszych, skąd widać, że $r(x) = x$ dla każdej liczby porządkowej x.

Okazuje się teraz, że wszystkie aksjomaty *ZF* będą spełnione, jeśli będziemy

niezdefiniowane pojęcie „zbioru" interpretowali w tych aksjomatach jako dotyczące jedynie tych zbiorów x, dla których $r(x)$ jest mniejsze od pewnej liczby porządkowej Θ_1. Tą liczbą porządkową Θ_1 jest pierwsza niedefiniowalna liczba kardynalna, która jest ponadto „mocno nieosiągalna", tj. taka, że: (1) jeśli x jest dowolnym zbiorem, tzn. zarówno on sam, jak i każdy z jego elementów ma moc mniejszą od Θ_1, to suma wszystkich jego elementów ma moc mniejszą od Θ_1, (2) jeśli x jest dowolnym zbiorem mocy mniejszej niż Θ_1, to rodzina wszystkich jego podzbiorów ma też moc mniejszą niż Θ_1, i w końcu (3) nie ma liczby kardynalnej mniejszej od Θ_1 i różnej od ω, która miałaby własności (1) i (2). W wypadku systemu aksjomatycznego *vNBG* model spełniający wszystkie aksjomaty można otrzymać, używając jedynie zbiorów x rangi $r(x) \leqslant \Theta_1$, klasy właściwe tego systemu będą rangi Θ_1, zbiory będą miały rangę mniejszą.

Wewnątrz systemu *ZF* nie można oczywiście (jeśli tylko jest niesprzeczny) dowieść, że *istnieje* nieprzeliczalna nieosiągalna liczba kardynalna. Większość matematyków pracujących w teorii mnogości można by jednakże nazwać neokantorystami, gdyż wierzą, że bez względu na to, jaki zestaw liczb kardynalnych uda im się opisać, zawsze jest liczba kardynalna następna, większa. Jeśli przyjmiemy (co przy założeniu niesprzeczności także nie może być udowodnione), że *nie ma* nieprzeliczalnej nieosiągalnej liczby kardynalnej wśród liczb porządkowych uniwersum *ZF*, wtedy „następna większa liczba porządkowa" będzie silnie nieosiągalna.

Z perspektywy, którą zawdzięczamy pojęciu rangi, teoria typów, system *ZF* i system *vNBG* nie przedstawiają się jako współzawodnicy do tytułu „prawidłowej" formalizacji teorii mnogości, ale jako opisy różnej grubości warstw ([3]) uniwersum Cantora, zbyt obszernego, aby mogło być w całości opisane. Z chwilą, gdy zgodzimy się z tym faktem, pojawia się rzecz jasna naturalny impuls do opisywania coraz to większych warstw nieopisywalnej całości i znaczna część prowadzonych ostatnio prac szła właśnie w tym kierunku. Jedna z najbardziej interesujących prób była związana z pojęciem liczby mierzalnej, które pokrótce opiszemy.

Chociaż podróże do odległych liczb porządkowych mogą się wydawać wielu matematykom równie niepraktyczne, jak transgalaktyczne wyprawy, niemniej jednak wiemy, że w zasadzie dostarczają one pewnych „praktycznych" korzyści. Wszystkie omawiane wyżej teorie mnogości, a także i inne, których aksjomaty można mechanicznie ponumerować mają (jak wiadomo z twierdzenia Gödla o niezupełności) zdania, które są prawdziwe, ale których nie można wywieść z tych aksjomatów. Co więcej, te zdania mają bardzo prostą postać — jak wiadomo z podanego niedawno przez Matiasevicza rozwiązania dziesiątego problemu Hilberta, mogą one być zapisane w postaci zdań stwierdzających nieistnienie rozwiązania pewnego równania diofantycznego. Jeżeli jednakże przejdziemy od danej teorii

([3]) Chociaż *ZF* opisuje „warstwę" uniwersum Cantora składającą się ze wszystkich zbiorów o randze mniejszej od najmniejszej liczby nieosiągalnej Θ_1, Montague i Vaught wykazyli, że istnieje liczba porządkowa $\alpha < \Theta_1$ taka, że *ZF* opisuje też „warstwę" składającą się ze wszystkich zbiorów rangi $< \alpha$.

zbiorów do innej ze zbiorami wyższej rangi, wtedy na ogół możemy dowieść pewnych zdań diofantycznych, których nie można udowodnić w systemie wyjściowym.

Chociaż zdania diofantyczne mają stosunkowo prostą postać, stają się one jednak mniej interesujące, kiedy zawierają 50 lub 60 zmiennych. Istnieją jednak pewne całkiem krótkie zdania, o których wiadomo, że są nierozstrzygalne w żadnym z omawianych systemów (teoria typów, *ZF*, *vNBG*), a mianowicie pewnik wyboru i hipoteza continuum, których niesprzeczność została udowodniona przez Gödla w 1936 r., a niezależność przez Cohena w 1963 r. Kilku matematyków udowodniło, że dodanie aksjomatów postulujących istnienie dużych liczb porządkowych nie daje w wyniku systemów, w których te aksjomaty stałyby się rozstrzygalne (nawiasem mówiąc, wyniki Cohena dotyczące niezależności zostały przerobione przez Scotta i Solovaya, stosujących pojęcie modelu Boole'owskiego, w którym w piękny sposób przeplatają się metody algebry i teorii mnogości).

Jak dotąd, omawialiśmy tylko aksjomatyczne teorie zbiorów, ale nie jest to w żadnym razie jedyna część badań podstaw matematyki, którą chcielibyśmy zaklasyfikować do „teoriomnogościowych aspektów". Wymienimy więc dwa inne.

1. Teoria mnogości i logika są ściśle ze sobą powiązane. Opisaliśmy już, w jaki sposób logikę dedukcyjną można traktować jako algebraizację pojęcia konsekwencji logicznej. Jak jednak relacja ta jest w gruncie rzeczy definiowana? Ponieważ $\Gamma \models \sigma$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie σ jest prawdziwe w każdej strukturze, która spełnia wszystkie zdania z Γ, zmuszeni więc jesteśmy do zbadania, jakie warunki muszą być spełnione, by dane zdanie było w danej strukturze prawdziwe. Jak pokazał w 1934 r. Tarski, na pytanie to nie ma ścisłej odpowiedzi, przynajmniej dla zdań z języka naturalnego, co jest wynikiem istotnie paradoksalnym. Dał on jednak ścisłą definicję prawdziwości zdań sformalizowanego matematycznego języka za pomocą podstawowych pojęć teorii mnogości. Definicja ta, a także ogólniejsze pojęcie spełniania formuły zdaniowej przez ciąg elementów danej struktury, odegrały ważną rolę w wielu późniejszych badaniach dotyczących teorii nierozstrzygalnych, dowodach względnej niesprzeczności i porównywania siły dwu danych teorii.

Podstawą każdego języka jest gramatyka *G*, dysponująca różnymi rodzajami symboli, za pomocą których budujemy zdania i inne kategorie semantyczne. Operacje syntaktyczne na formułach z *G* pozwalają nam na traktowanie gramatyki jako pewnej struktury algebraicznej. Struktury takie są „wolne" w swej klasie podobieństw. Kiedy interpretujemy gramatykę *G* za pomocą struktury *S*, dokonujemy w gruncie rzeczy odwzorowania homomorficznego struktury *G* — nie w samo *S*, ale w ciało cylindryczne relacji nad *S*, które jest generowane przez podstawowe operacje i relacje z *S*. Tak więc, teoriomnogościowe pojęcia uwikłane w cylindrycznych ciałach relacji oraz te, które potrzebne są do tego, by można było stosować w strukturach wolnych definicje rekurencyjne, są ścisle związane z pojęciem prawdziwości, a więc także i z podstawowym w logice pojęciem konsekwencji. Chociaż dla języków pierwszego rzędu te zdefiniowane semantycznie relacje są, jak można

pokazać, równoważne syntaktycznie zdefiniowanemu pojęciu wyprowadzalności, to jednak, jak wiadomo z wyników Gödla dotyczących niezupełności, nie można przenieść tej dwoistości na języki wyższych rzędów. Tak więc, tkwiące korzeniami w teorii mnogości pojęcia semantyczne dają nam jedyny sposób podejścia do logik wyższych rzędów.

2. W 1959 r. odbyło się w Warszawie międzynarodowe sympozjum poświęcone metodom infinitystycznym w logice. Kilka lat przedtem logicy zaczęli badać języki formalne różniące się zdecydowanie od języków naturalnych tym, że zawierały one zdania nieskończenie długie. Zdania tych języków mogły być nieskończenie długie z trzech powodów:

(i) zdania atomowe mogły zawierać symbole relacyjne nieskończonego rzędu, po których następowały pozaskończone ciągi zmiennych,

(ii) z nieskończonego zbioru zdań można było utrworzyć jedno bądź przez koniunkcję $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \ldots$, bądź przez alternatywę $\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \sigma_3 \vee \ldots$,

(iii) operację kwantyfikacji można przeprowadzić dla nieskończenie wielu zmiennych, i to w dowolnym porządku, np.

$$\ldots \forall v_6 \exists v_4 \forall v_2 \exists v_1 \forall v_3 \exists v_5 \ldots \varphi(v_1, v_2, \ldots).$$

Z początku języki te były traktowane jako pewne dziwolągi, ale w 1960 r. Tarski i Hanf zastosowali je do rozwiązania starego i trudnego problemu teorii mnogości — otwierając tym samym całą nową falę badań opartych na aksjomatach nieskończoności, które zaprowadziły o wiele dalej w pozaskończoność niż jakiekolwiek uprzednie.

Problem dotyczył istnienia miary na zbiorach rozmaitych mocy. Będziemy się zajmowali miarami $\mathfrak{m}$ określonymi na wszystkich podzbiorach zbioru A i przyjmującymi tylko wartości 0 i 1 oraz takimi, że $\mathfrak{m}(A) = 1$ i $\mathfrak{m}(X) = 0$ dla każdego jednoelementowego zbioru $X \subseteq A$. Niech $\varkappa$ będzie liczbą kardynalną, wtedy $\mathfrak{m}$ nazywamy $\varkappa$-addytywną miarą jeżeli $\mathfrak{m}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \sum_{i \in I} \mathfrak{m}(X_i)$ gdy tylko rodzina $\{X_i\}_{i \in I}$ podzbiorów A ma moc $< \varkappa$. Jeżeli A jest przeliczalne, tj. mocy ω, to rzecz jasna ma miarę $\varkappa$-addytywną dla wszystkich $\varkappa \leqslant \omega$. Wiadomą rzeczą było, że dla wszystkich nieprzeliczalnych α mniejszych niż Θ_1 (pierwsza nieosiągalna liczba kardynalna), zbiór A mocy α nie może mieć $\varkappa$-addytywnej miary z wyjątkiem przypadku, gdy $\varkappa \leqslant \omega$ (w szczególności nie istnieje więc miara przeliczalnie addytywna). Istniało podejrzenie, że Θ_1 będzie przypominało najmniejszą liczbę nieosiągalną w tym sensie, że też będzie miało miarę $\varkappa$-addytywną dla $\varkappa \leqslant \Theta_1$. Tarski jednakże, używając wyników Hanfa dotyczących pewnych języków nieskończonych, był w stanie dowieść, że zbiory mocy Θ_1 mogą mieć miarę $\varkappa$-addytywną jedynie dla $\varkappa \leqslant \omega$, a więc nie mają miar przeliczalnie addytywnych.

Wynik Hanfa dotyczy zagadnienia zwartości dla logiki. Dla zwykłych języków pierwszego rzędu, o zdaniach skończonej długości, twierdzenie o zwartości mówi, że *jeśli Γ jest zbiorem zdań takim, że zdania z każdego skończonego podzbioru Γ są prawdziwe w jakiejś strukturze, to wtedy istnieje model, w którym każde zdanie z Γ*

jest prawdziwe. Hanf rozważał dla każdej liczby kardynalnej α język L_α, w którym można tworzyć koniunkcje dowolnego zbioru zdań, jeśli jego moc jest $< \alpha$, a także kwantyfikować równocześnie cały zbiór zmiennych, byle tylko jego moc była $< \alpha$. Dowiódł on, że dla każdego α takiego, że $\omega < \alpha \leqslant \Theta_1$, istnieje zbiór Γ zdań z L_α taki, że Γ ma moc α, zdania każdego podzbioru Γ mocy $< \alpha$ są prawdziwe w jakiejś strukturze, ale nie istnieje struktura, w której wszystkie zdania Γ byłyby prawdziwe.

Hanf rozszerzył ten wynik daleko w pozaskończoność. Na przykład, jeśli Θ_0, $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\xi, \ldots$ jest ciągiem wszystkich nieosiągalnych liczb kardynalnych, to Θ_1 w powyższym twierdzeniu może być zastąpione dowolnym Θ_ξ dla $\xi < \Theta_\xi$. Dla dowolnego α mniejszego od takiego Θ_ξ wynik Tarskiego także daje się uogólnić — zbiór mocy α nie ma przeliczalnie addytywnej zero-jedynkowej miary określonej na wszystkich podzbiorach.

Wydaje się, że te metody dowodu nie dają nadziei na rozszerzenie tego wyniku na wszystkie liczby kardynalne $\alpha < \omega$. W związku z tym różni matematycy zaczęli badać konsekwencje założenia, że istnieje mierzalna liczba $\alpha > \omega$, tj. taka, że istnieje na niej α-addytywna miara, co jest rodzajem bardzo silnego aksjomatu nieskończoności. Na przykład Scott wykrył, że istnienie takiej mierzalnej liczby jest sprzeczne z aksjomatem konstruowalności Gödla.

4. Konstruktywne aspekty podstaw. Na ogół uważa się intuicjonizm za najbardziej radykalnie konstruktywne stanowisko w podstawach matematyki. Jego radykalizm polega na odrzuceniu znacznej części matematyki, uznawanej przez większość matematyków. I tak np. prawo wyłączonego środka, pozwalające nam na twierdzenie, że dla każdego zdania p: albo p, albo nie p, musi zachodzić, jest odrzucane w wypadku, gdy zdanie p dotyczy nieskończenie wielu obiektów, chyba że dysponujemy metodą pozwalającą na rozstrzygnięcie czy p, czy też nie p zachodzi. Podobnie nie uznaje intuicjonizm stwierdzeń postaci „istnieje p takie, że $\sigma(p)$", jeżeli nie jest ono poparte dowodem, który pozwala na uzyskanie w pewien specjalny sposób takiego konkretnego p, które ma własność $\sigma(p)$.

Nie jest trudno przypisać te ograniczenia chęciom bardziej konstruktywnego podejścia do matematyki, wydaje się jednak, że te radykalne zmiany, ku którym dążą intuicjoniści, mają także inne motywacje. Jedna z nich jest związana z samą nazwą „intuicjonizm" i dotyczy podstawowego problemu, jakim jest znaczenie rozważań matematycznych. Dla matematyka „klasycznego" takie rozważania służą komunikowaniu „faktów" dotyczących pewnych abstrakcyjnych obiektów, takich jak liczby, zbiory czy punkty. Dla intuicjonisty jednakże celem matematyki jest „umysłowa matematyczna konstrukcja", a rozważania są skierowane na komunikowanie jedynie o tego rodzaju intuicyjnym doznaniu. Tego rodzaju zasadnicza różnica co do celu rozważań matematycznych uwidacznia się także jaskrawo w następującym sporze matematyków na temat postawy intuicjonistycznej: czy pewne zdanie matematyczne, np. dotyczące istnienia liczby o pewnych własnościach arytmetycznych, może być w pewnym momencie prawdziwe, a w innych nie, lub też prawdziwe tylko dla części matematyków, a nie dla wszystkich. Sam osobiście nie jestem pewny czy intuicjoniści sami zgadzają się co do tego sporu — być może,

że część zgadza się, a część nie ... W każdym razie jest pewne, że intuicjonista i matematyk klasyczny używają języka w bardzo odmienny sposób i z tego faktu wynika chyba jasno, że nie należy oczekiwać, żeby się mogli łatwo porozumieć, chyba że ustalą zadowalający sposób tłumaczenia z języka jednego z nich na język drugiego.

Jednym z zarzutów stawianych intuicjonizmowi przez matematyków klasycznych jest zwrócenie uwagi na niechęć intuicjonistów do jasnego określenia kryteriów badania poprawności rozumowań matematycznych, co można byłoby zrobić przez podanie dokładnej listy aksjomatów i reguł wnioskowania, a więc przez określenie formalnego dedukcyjnego systemu. W 1930 r. Heyting — po śmierci Brouwera czołowy przedstawiciel intuicjonizmu — wykonał gest w kierunku poprawy wzajemnego zrozumienia publikując pracę, w której przedstawił formalne reguły intuicjonistycznego rachunku zdań. Wszystkie one są zawarte w logice klasycznej, wiele jednak reguł tej ostatniej nie daje się w systemie Heytinga wyprowadzić. Na przykład $p \to \neg\neg p$ jest w nim, ale reguły $\neg\neg p \to p$ w nim nie ma. Heyting podkreślał jednakże, że chociaż reguły jego systemu można ustalić intuicjonistycznie, to jednak o żadnym systemie formalnym nie można dowieść, że wyczerpuje wszystkie reguły, które mogą być ustalone w toku dalszych intuicjonistycznych konstrukcji. Należy także dodać, że o ile klasycznie rzecz biorąc prawa logiki są pierwsze w tym sensie, że są one używane w rozwijaniu innych działów matematyki, o tyle intuicjonista zaczyna od arytmetyki, od konstrukcji liczb całkowitych, a prawa logiki otrzymuje na drodze uogólnienia uniwersalnie prawdziwych metod konstrukcji arytmetycznych.

Podany przez Heytinga system intuicjonistycznego rachunku zdań stał się przedmiotem licznych badań prowadzonych za pomocą metod matematyki klasycznej. I tak Gödel wykazał, że choć system Heytinga jest z pozoru słabszy od klasycznej logiki zdań, to można jednak z każdym zdaniem σ związać inne zdanie σ' w taki sposób, że σ jest prawdziwe w klasycznym sensie wtedy i tylko wtedy, gdy σ' można dowieść w systemie Heytinga.

Tarski z kolei znalazł dla systemu Heytinga teoriomnogościową interpretację. Każdej formule σ rachunku zdań możemy przyporządkować funkcję σ_c kilku zmiennych przebiegających podzbiory dowolnego zbioru U (funkcja σ_c jest określona rekurencyjnie — np. dla dowolnie zadanych argumentów, wartość $(\neg\sigma_c)$ jest uzupełnieniem wartości σ_c do zbioru U). Formuła σ będzie klasycznie prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy σ_c jest funkcją stałą o wartości U. W interpretacji Tarskiego natomiast każdej formule σ jest przyporządkowana funkcja σ_i, której argumenty i wartości przebiegają podzbiory otwarte dowolnej przestrzeni topologicznej U. (Np. wartość dla dowolnych argumentów $(\neg\sigma)_i$ jest wnętrzem uzupełnienia wartości σ_i.) Okazuje się, że formuły, które można udowodnić w systemie Heytinga, są dokładnie tymi formułami, których wartość jest stała i wynosi U na płaszczyźnie Euklidesa.

Najważniejsze analizy metodologiczne matematyki intuicjonistycznej były przeprowadzone przez Kleenego metodami klasycznymi. Środki, jakie zastosował, to funkcje rekurencyjne, rozwijane pierwotnie dla celów dowodów twierdzeń o roz-

strzygalności jako ścisłe matematyczne ujęcie funkcji, której wartości można mechanicznie obliczać. Za pomocą tej klasy funkcji Kleene zdefiniował pojęcie realizowalności zdań arytmetyki i zaproponował je jako intuicjonistyczny odpowiednik klasycznego pojęcia prawdy. Udało mu się wykazać, że zdania realizowalne przez jakąś liczbę to dokładnie te zdania, które można udowodnić w intuicjonistycznej arytmetyce Heytinga. Jednakże wysiłki zmierzające do rozszerzenia tego podejścia na całą logikę intuicjonistyczną okazały się o wiele mniej owocne.

Funkcji rekurencyjnych używano na wiele sposobów, aby uzyskać konstruktywne alternatywy różnych fragmentów matematyki — alternatywy całkowicie różne od tych, których dostarczał intuicjonizm. Była taką np. *rekurencyjna analiza*. Podstawowymi jej obiektami są liczby rzeczywiste traktowane jako nieskończone rozwinięcia dziesiętne, dopuszcza się jednak tylko takie liczby, dla których istnieje sposób, aby rekurencyjnie, tj. mechanicznie obliczać n-tą cyfrę rozwinięcia dziesiętnego dla dowolnego zadanego n. Rozwój tego typu teorii, bardzo żywy kilka lat temu, stracił ostatnio na rozpędzie, kiedy odkryto, że jest kilka równie przekonywających, choć nie równoważnych sposobów ograniczenia przez warunki efektywności ilości dopuszczalnych funkcji.

Istnieje także rekurencyjna teoria mnogości. W zwykłej teorii mnogości dwa zbiory mają tę samą moc, gdy istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie jednego z nich na drugi. W rekurencyjnej wersji mamy do czynienia jedynie ze zbiorami liczb naturalnych i ograniczamy się jedynie do takich wzajemnie jednoznacznych odwzorowań, które są (częściowo) rekurencyjne. Otrzymywane w wyniku takich ograniczeń „liczby kardynalne" nazwane zostały *izolami*, a ich arytmetyka była intensywnie badana. Inna część rekurencyjnej teorii mnogości dotyczy rekurencyjnych stopni nierozstrzygalności. Dla zbiorów A i B liczb naturalnych mówimy, że A jest rekurencyjne w B, jeżeli pytanie czy dana liczba jest w A może być w rekurencyjny sposób zredukowane do skończonej liczby pytań dotyczących przynależności pewnych liczb do zbioru B. A jest *rekurencyjnie równoważne* B, jeśli każdy z tych zbiorów jest rekurencyjny w drugim; odpowiadające klasy równoważności zwane są stopniami rozstrzygalności, a częściowy porządek przez nie wyznaczony przez relację „A jest rekurencyjne w B" wyznacza półstrukturę, która była obszernie badana.

Jest rzeczą interesującą, że choć rozważanie, a także stosowanie funkcji obliczalnych sięga swymi korzeniami finistycznego podejścia do matematyki, to w ostatnich pracach widać tendencje do rozszerzenia tego pojęcia z funkcji liczb naturalnych na funkcje o dziedzinach będących pozaskończonymi liczbami porządkowymi. Jeśli tę teorię dostatecznie daleko posunąć, zaczyna się ona stykać z universum zbiorów konstruowalnych, które skonstruował Gödel dla dowodu niesprzeczności Hipotezy Continuum, a więc dziedziny daleko odsuniętej od finitystyczności.

5. Uwagi końcowe. Chociaż na samym początku stwierdziliśmy, że będziemy starali się pisać o całości problematyki podstaw matematyki, należy wyraźnie stwier-

dzić, że nie usiłowaliśmy wyczerpać tego zagadnienia. Cały szereg ważnych dziedzin nie zostało nawet wzmiankowanych, że zacytujemy np. teorię kategorii, teorię hierarchii, zagadnienia rozstrzygalności, teorie automatów itp. Usiłowaliśmy jednakże chociażby pobieżnie zetknąć czytelnika z dostatecznie szerokim wachlarzem zagadnień, by mu pozwolić na odczucie rozległości przedmiotu, a w szczególności by zilustrować tezę, że cała ta problematyka może być z grubsza podzielona na algebraiczne, teoriomnogościowe i konstruktywistyczne aspekty przedmiotu. Aspekty te nie konkurują ze sobą, ale wzajemnie się uzupełniają w celu lepszego oświetlenia podstawowych problemów z różnych punktów. Istnieje wiele wzajemnych powiązań między wymienionymi zagadnieniami, tylko o kilku z nich mogliśmy wyraźnie napisać, częściowo ze względu na niewiedzę autora, częściowo zaś ze względu na to, że związki te nie są jeszcze dokładnie zrozumiane. Mamy nadzieję, że niektórzy czytelnicy z różnymi zainteresowaniami matematycznymi mogą zostać zachęceni do wyjaśnienia niektórych pytań tego typu.

Omawiając tak wiele problemów byłoby łatwo dołączyć ogromną bibliografię związanych z naszym tematem prac. Czytelnik pragnący zobaczyć taką listę może ją znaleźć w 26 tomie *Journal of Symbolic Logic*, poświęconym całkowicie bibliografii prac z dziedziny podstaw, które się ukazały w ciągu ostatnich 25 lat. Zamiast tego podajemy małą listę prac, w których nie będący specjalistą czytelnik może znaleźć więcej szczegółów odnośnie do omawianych przez nas tu zagadnień. Zamieszczone w tych pracach bibliografie umożliwią zainteresowanym uzyskanie dalszych informacji na interesujący ich temat.

Bibliografia

[1] J. W. Addison, L. Henkin and A. Tarski, *International symposium on the theory of models*, University of California, 1963 (North-Holland, Amsterdam 1965).

[2] J. Ax and S. Kochen, *Diophantine problems over local fields*; I. Amer. J. Math. 87 (1965), str. 605–630; II, ibidem, vol. 87 (1965), str. 631–648; III, Ann. Math. 83 (1965) str. 437–456.

[3] Paul Benacerraf and Hilary Putnam, *Philosophy of mathematics selected readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1964.

[4] Paul J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjamin, New York 1966.

[5] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, fourth printing*, Princeton University Press, Princeton 1958.

[6] Paul Halmos, *Algebraic logic*, Chelsea, New York 1962.

[7] L. Henkin, D. Monk and A. Tarski, *Cylindric algebras*, vol. I, North-Holland, Amsterdam (Forthcoming).

[8] A. Heyting, *Intuitionism, an introduction*, Studies in logic, North-Holland, Amsterdam 1956.

[9] Carol R. Karp, *Languages with expressions of infinite length*, Studies in logic, North-Holland, Amsterdam 1964.

[10] H. J. Keisle and A. Tarski, *From accessible to inaccessible cardinals, results holding for all accessible cardinal numbers and the problem of their extension to inaccessible ones*, Fund. Math. 53 (1964), str. 225–308.

[11] S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1952.

[12] A. Lévy and R. Solovay, *Measurable and the continuum hypothesis*, Israel J. Math. 5 (1967), str. 234–248.

[13] R. Montague and R. L. Vaught, *Natural models of set theories*, Fund. Math. 47 (1959), str. 219–242.

[14] Andrzej Mostowski, *Thirty years of foundational studies, lectures on the development of mathematical logic and the study of the foundations of mathematics in 1930–1964*, Acta Philos. Fenn. 17 (1956), str. 1–180.

[15] Abraham Robinson, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, Studies in logic, North-Holland, Amsterdam 1963.

[16] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, University of California Press, Berkeley, 2nd ed., 1951.

[17] — *Logic, semantics, metamathematics*, Papers from 1923 to 1938. (Translated by J. H. Woodger.) Clarendon Press, Oxford 1956.

[18] von Heijenoort, *From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1967.

[19] *Infinitistic methods*, Proceedings of the symposium on foundations of mathematics, Warsaw 1959, Pergamon Press, New York 1961.

[20] *Le raisonnement en mathématiques et en sciences expérimentales*, Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, vol. LXX (1958).

[21] *Summaries of the talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic*, Cornell University, 1957. Second edition, I. D. A., 1960.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
BERKELEY

Prof. Leon Henkin otrzymał stopień doktora w Princeton University w 1947 r. Jego praca pisana pod kierunkiem Alonzo Churcha zawierała dowód twierdzenia Gödla dla rachunku predykatów, który stał się standardowym dowodem przedstawianym niemalże w każdej książce czy wykładzie na temat logiki matematycznej. Poza tym, prof. Henkin rozwinął teorię algebr cylindrycznych, która jest algebraicznym sformułowaniem teorii kwantyfikatorów. Główną dziedziną jego pracy są podstawy matematyki i logika matematyczna. Opublikował on wiele prac na te tematy i jest uznanym autorytetem w dziedzinie podstaw matematyki. W 1964 r. otrzymał nagrodę Chauveneta za pracę *Czy logika i matematyka są identyczne?*, opublikowaną w Science 1962 (vol. 138).

Prof. Henkin miał tytuły Fine Instructor, a także Jewett Fellow w Princeton w okresie 1947–1949, pracując przez poprzednie cztery lata w przymyśle jako matematyk. W latach 1954–1955 był stypendystą Fullbrighta w Amsterdamie, Visiting Professor w Dartmouth w latach 1960–1961 Guggenheim Fellow i członkiem *Institute for Advanced Study* (1961–1962), a także Visiting Fellow w *All Souls' College* w Oxfordzie (1968–1969). Wykładał ponadto na University of Southern California i pracował na wydziale matematyki Uniwersytetu w Berkeley, którego był dwukrotnie dziekanem. Był też redaktorem pisma Journal od Symbolic Logic i przez trzy lata pełnił obowiązki Przewodniczącego Association of Symbolic Logic. Ponadto był członkiem Rady American Mathematical Society, udzielając się także aktywnie w CUPH. Poza pracami z podstaw matematyki opublikował książkę *Retracing elementary mathematics*, Macmillan 1962, co wskazuje na jego żywe zainteresowania problemami nauczania matematyki.

J. C. Abbott