ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVIII (1974)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

JEAN LERAY (Paryż)

Matematyka nowoczesna(1) (2)

O matematyce „nowoczesnej" mówi się od przedszkola (3) po ostatnie klasy szkoły średniej. Otóż matematyka najdawniejsza i dzisiejsza uzupełniają się jak narządy każdego żywego organizmu; nauka nie wie, czym jest ta matematyka „nowoczesna". Otwórzmy książki naszych dzieci, aby się o tym przekonać.

* * *

Zacznijmy skromnie od klasy maturalnej (nie matematyczno-przyrodniczej), wybierzmy „Matematykę" Revuza, absolwenta École Normale Supérieure(4), profesora na Wydziale Nauk Ścisłych w Paryżu, zajmującego się aktywnie reformą szkolnictwa i wpływowego członka Komisji Lichnerowicza do spraw reformy programów: jesteśmy u dobrego źródła informacji, czym jest w matematyce „nowoczesnej" pojęcie zbioru skończonego, który jest odtąd podstawą nauczania w klasie maturalnej; cytujemy z tomu 1, str. 38–39:

Zbiorem skończonym (niepustym) E nazywamy obraz odcinka [1, *a*] *zbioru IN liczb naturalnych dany przez odwzorowanie bijektywne.*

Dwa zbiory skończone mają tę samą liczbę kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja odwzorowująca jeden zbiór na drugi.

Dowodzi się przechodniości relacji $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Dalej:

---

(1) Jest to uporządkowany zapis ustnej improwizacji z 25 lutego 1971 r. w Instytucie Henri Poincarégo, podczas której nie potrafiłem znaleźć w jednym z cytowanych tu podręczników błędu, który on rzeczywiście zawiera (*przyp. autora*).

(2) Tłumaczenie artykułu *Les mathématiques „modernes"*, opublikowanego w „Gazette des Mathématiciens" (wychodzącej w Nicei), numer G4, październik 1971 (*przyp. red.*).

(3) Autor użył tu słowa „maternelle", przymiotnika używanego coraz częściej w formie rzeczownika. W oryginale jest notka, w której autor przeprasza miłośników języka francuskiego za użycie tego „nowoczesnego" terminu (*przyp. red.*).

(4) Uczelnia w Paryżu, znana ze swego bardzo wysokiego poziomu, kształcąca przyszłych nauczycieli (*przyp. red.*).

DEFINICJA. *Liczba a jest liczbą kardynalną odcinka*([5]) [1, *a*] *zbioru IN liczb naturalnych.*

Nauczyciele wykładający tę nowość czynią to pospiesznie; jedni uczniowie nauczą się jej na pamięć, inni, tzn. uczniowie inteligentni, będą żądać wyjaśnień. Z tego właśnie powodu musiałem przeczytać te dwie strony. Stwierdziłem, że zawierają one wyłącznie zdania prawdziwe; jednak zdania te zaniepokoiły mnie: nie wykorzystują one żadnej własności ani zbiorów skończonych, ani liczb całkowitych; stosują się więc równie dobrze do odcinków prostej *IR* liczb rzeczywistych i do zbiorów nieskończonych; „dowodzą" one więc tego, że odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między dwoma odcinkami prostej ma miejsce tylko wtedy, gdy odcinki te są tej samej długości. Zdanie to jest w zasadzie równoważne następującemu absurdowi: każda mapa Francji ma te same wymiary co Francja (1 000×1 000 km), gdyż między zbiorem punktów mapy Francji a zbiorem punktów Francji istnieje bijekcja! Taka jest ta „nowoczesna" matematyka!

Jeśli te dwie przeanalizowane strony zawierają tylko zdania prawdziwe, to jednak dokładna lektura pozwala odkryć w nich jedno błędne słowo, które jest czymś absurdalnym: słowo „*definicja*" przed zdaniem: „*a* jest liczbą kardynalną odcinka [1, *a*] "; w nowoczesnym żargonie zdanie to powinno być wypowiedziane w sposób następujący: „odwzorowanie $a \to \mathrm{Card}([1, a])$ jest bijekcją" i powinno być wyprowadzone z następującego aksjomatu: zbiór skończony nie może być odwzorowany bijektywnie na żaden ze swoich podzbiorów. Wtedy zdanie to stosowałoby się do *IN*, ale nie do *IR*.

Takie rozważania wykraczają poza program: A. Lichnerowicz ma zdrową i jasną myśl: pragnie on, by postulowano to, co uczniowi wydaje się oczywiste; by fizycy, chemicy i biologowie posługiwali się językiem matematycznym. Nie wymaga on na pewno od nich, by mówili: „liczba kardynalna zbioru stóp katetometru jest trzy", „czworonoga jest cztery". A. Revuz jest matematykiem bardzo kompetentnym, pełnym poświęcenia i dobrej woli; stał się on jednak ofiarą ducha matematyki „nowoczesnej", gdy kontrasygnował ten galimatias kawałków rozumowań badających zbiory skończone za pomocą aksjomatów liczb całkowitych i rozumowań badających liczby całkowite za pomocą aksjomatów zbiorów skończonych; galimatias, który nie powołuje się ani na pierwszy, ani na drugi z tych systemów aksjomatów.

*

* *

Matematyka „nowoczesna" jest zatem zbiorowiskiem definicji pojęć, których charakterystycznych własności (tzn. aksjomatów) nie wypowiada się, których żadna godna uwagi własność nie jest stwierdzona; nie można zatem ani logicznie operować tymi pojęciami, ani też zainteresować się nimi. Nauczenie się ich jest ćwiczeniem pamięciowym, szkodliwym dla umysłu.

([5]) W tekście tym nie mówi się nigdy o „odcinku" *IN*, lecz zawsze o „odcinku domkniętym" *IN*. Jeśli pojęcie „odcinka domkniętego" ma pewien sens, to pojęcie „odcinka" *IN* powinno mieć sens ogólniejszy. Tak jednak nie jest. Ten, kto zna francuski, nie może zrozumieć! (*przyp. autora*).

Autorzy programów nie pragnęli niczego takiego we Francji; zażądali oni od nauczycieli, by używali zgodnie ze zdrowym rozsądkiem terminów współczesnego języka naukowego, zanim jeszcze ich sens naukowy może być ściśle zdefiniowany poprzez system aksjomatów; niektórzy nauczyciele zrozumieli to właściwie. Inni od całkowitej ignorancji współczesnego języka matematycznego przeszli do przesady w przeciwnym kierunku: do frazeologii używającej terminologii matematycznej w sposób wadliwy i nieużyteczny([6]).

*
* *

Potwierdzimy tę diagnozę przechodząc do lektury([7]) strony pierwszej tomu pierwszego *Matematyki elementarnej* Cagnaca i Thiberge'a, inspektorów generalnych([8]) (wydawca Masson, 1963). Mówi się tam o pojęciu zbioru, skończonego lub nieskończonego. Czy termin ten będzie służył tylko do wyrażenia prawd zgodnych ze zdrowym rozsądkiem? O nie! Jest to termin naukowy; „należy" więc ćwiczyć się w używaniu go z maksimum ogólności!

Pierwszym przykładem zbioru, jaki się podaje, jest przykład„ zbioru zbiorów"([9]).

([6]) Uprawianiem „matematyki nowoczesnej" jest ćwiczenie dzieci w wyrażaniu faktu, że wieprze nie mają skrzydeł w następujący sposób: „Zbiór uskrzydlonych wieprzy jest pusty". Czy wolno zapytać autora tego ćwiczenia o moc zbioru uskrzydlonych koni? Czy Pegaz się liczy?

Uskrzydlone wieprze odnajdujemy w „Zaprogramowanym wprowadzeniu do teorii zbiorów" J. Clarke'a i M. A. Touyarota (wydawca Nathan, 1969); jest ono zaadresowane do „nauczycieli, uczniów kursów poglądowych, do rodziców, do tych wszystkich, którzy pragną nawiązać kontakt z nowoczesnym nauczaniem teorii zbiorów" (str. 3); wprowadzenie to proponuje następujące „testy"

— „Przedstawić, za pomocą poznanych znaków, zbiór prosiąt, które mają skrzydła" (str. 32).

— „Który z następujących zbiorów jest zbiorem pustym: zbiór zwierząt czworonogich; zbiór kobiet, które były Prezydentem Republiki francuskiej?" (str. 27).

— „Napiszcie następujące zdanie używając symboli matematycznych: Pasteur należy do zbioru ludzi, którzy odkryli szczepionkę przeciwko wściekliźnie" (str. 17).

„Prawidłowe" odpowiedzi na te absurdalne testy są następujące (str. 58–59–60):

— „Prosięta, które mają skrzydła": Ø lub [ ].

— „zbiór kobiet «Prezydent Republiki francuskiej»".

— „Pasteur" $\in$ [Pasteur].

Zatem w tej „teorii" zbiorów, każdy człowiek, który odkrył szczepionkę przeciwko wściekliźnie nazywa się z definicji Pasteur i żaden zbiór zwierząt czworonogich nie jest pusty, nawet zbiór much o czterech łapach!

Zaznaczmy jeszcze, że w tym wprowadzeniu mówi się, że „zbiór jest skończony, jeśli można utworzyć listę jego elementów", a pierwszym przykładem zbioru nieskończonego jest „ciąg części dziesiętnych otrzymanych przez podzielenie 1 przez 3" (str. 21). Czy powiedzieć, że te części dziesiętne są równe 3 nie jest „utworzeniem ich listy"? (*przyp. autora*).

([7]) W celu uniknięcia nieporozumień: wybieramy teraz tekst wcześniejszy od Komisji Lichnerowicza (*przyp. autora*).

([8]) Praca zredagowana przez pewnego profesora o otwartym umyśle i miłym obejściu: krytyka, która następuje, nie obraziła go, lecz zainteresowała; jestem mu za to wdzięczny. Mam wiele szacunku dla panów Cagnaca i Thiberge'a (*przyp. autora*).

([9]) Autor zwraca uwagę, że w cytowanym tekście użyto wyrażenia „ensemble des collections" (po polsku: zbiór zbiorów) i mówi, że jest ono synonimem wyrażenia „ensemble des ensembles" (po polsku również: zbiór zbiorów) (*przyp. tłum.*).

Otóż jest to niebezpieczne: pojęcie zbioru wszystkich zbiorów jest absurdalne i aby uniknąć takich nonsensów trzeba zdefiniować pojęcie zbioru za pomocą trudnej aksjomatyki! Wróćmy do naszego tekstu: następnym przykładem, który czytamy jest: „zbiór własności pewnego przedmiotu". Jaki matematyk użył tego pojęcia? Jaki jest zbiór własności punktu? Przedmiot ma dużo własności P. Bądźmy skromni: utwórzmy klasy C, z których każda zawiera wszystkie własności P przedmiotu O równoważne między sobą; rozważmy tylko zbiór $\{C\}$ klas C. Klasa C charakteryzuje się zbiorem E przedmiotów, które mają własności równoważne tym własnościom P, które składają się na klasę C; E jest dowolnym zbiorem zawierającym przedmiot O, $\{C\}$ jest zatem we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości ze zbiorem $\{E\}$ zbiorów E zawierających O; jeśli oznaczymy $e = E \setminus O$, to $\{C\}$ jest również we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości ze zbiorem $\{e\}$ zbiorów e nie zawierających O. „Zbiór własności pewnego przedmiotu" jest zatem pojęciem równoważnym z pojęciem absurdalnym zbioru wszystkich zbiorów([10]).

Odwróćmy stronę pierwszą; co za rozczarowanie! Od tej chwili nie będzie się rozważało innych zbiorów poza podzbiorami pewnego raz na zawsze ustalonego zbioru. Czytelnik, upojony szalonymi perspektywami strony pierwszej, nie daje się bez protestu zamknąć w tak wąskich ramach, które autorytatywnie narzuca mu strona druga! Jeśli do mnie przyjdzie z tą skargą, to powiem mu, że robi się to w celu uniknięcia niebezpieczeństw, którymi grozi błędna gadatliwość strony pierwszej; czytelnik powie mi wówczas, że nie rozumie „nowoczesnej" matematyki; zgodzę się z tym wyznaniem, choć „stracę przez to twarz".

*

* *

Przedmiotem dumy „matematyki nowoczesnej" jest nauczanie „teorii mnogości". Otóż tak jak dysponujemy kilkoma geometriami, dzięki Paul Cohenowi dysponujemy również kilkoma „teoriami mnogości"; gdyby jedna z nich była sprzeczna, wszystkie byłyby sprzeczne. Teorie te różnią się między sobą wyborem aksjomatów, które, choć różne, wszystkie są dozwolone.

„Postulat Euklidesa" nie jest „własnością, której niestety nie potrafi się udowodnić"; jest on właśnie definicją geometrii euklidesowej, która jest często wygodna w zastosowaniach; jednakże nawet do badania pewnych struktur geometrii euklidesowej wygodne jest często dostosowywanie ich do struktur geometrii sferycznej, geometrii Łobaczewskiego, itd.

Różnorodność teorii mnogości jest analogiczna do różnorodności geometrii. Oczywiście Bourbaki przyjmuje teorie mnogości zdefiniowane przez pewnik wyboru; implikują one zasadnicze własności przestrzeni Banacha. Jednak pewien bardzo znany analityk chcąc, by każdy zbiór punktów zbioru R^n był mierzalny, przyjmuje inne teorie, w których pewnik wyboru stosuje się tylko do zbiorów prze-

---

([10]) Niech Ω będzie zbiorem wszystkich zbiorów; wtedy istniałaby bijekcja między zbiorem jego podzbiorów a jednym z jego podzbiorów, co przeczy jednemu z twierdzeń Cantora (*przyp. autora*).

liczalnych. Ma on prawo przyjąć ten punkt widzenia, który był również punktem widzenia Lebesgue'a. Naszym zadaniem jest nie popełniać błędów przy stosowaniu ich różnych rezultatów.

Kiedy Paul Cohen zamierzał wyłożyć w Collège de France swoje, wówczas świeże, odkrycia, chciałem rozreklamować ten wykład wśród promotorów „nowoczesnej matematyki"; słuchawka telefoniczna była pośpiesznie odkładana: nie można ich więcej niczego nauczyć!

W szkołach wyższych będzie się musiało w dalszym ciągu mówić znacznej liczbie studentów: „Zapomnijcie najpierw wszystko to, co słyszeliście w liceum".

Albowiem unowocześnienie nauczania matematyki jest niezbędne, ale nauczanie „matematyki nowoczesnej" jest iluzją.

Trzeba stawić czoło tym, którzy tę iluzję propagują.

Ludzie, co swą nauką chodzą jak pijani,
Biegli tylko w łatwości pustego paplania,
Do niczego niezdatni, bez sądu, bez zdania
I którzy przez swą śmieszność posiedli tę sztukę,
By każdemu obrzydzić wiedzę i naukę!

(Molier, *Uczone białogłowy*. Akt IV, sc. 3, przekład Boya).

Rzeczywiście, pseudouczeni zawsze knowali; 11 miesięcy przed śmiercią Molier miał odwagę ich odmalować — miejmy odwagę ich rozpoznać.

*

* *

Koledzy nasi nauczający w szkolnictwie początkowym i średnim, z niewieloma wyjątkami, lubią swój zawód, pragną dobrze go znać i wykonywać, ale niedobra reklama reformy przekonała ich, że muszą wszystko zapomnieć, aby wszystkiego nauczyć się od nowa, że zmienił się przedmiot i cel ich nauczania: zastanawiają się z niepokojem nad jego celowością. Zdarza się nawet, że przesadna frazeologia nie pozostawia im już czasu na nauczanie nawet tych podstaw, które przy użyciu lepiej dobranych terminów byłyby bardziej zrozumiałe. Bywa, że systematyczne używanie kwantyfikatorów zniekształca prostotę pojęć podstawowych.

Nauczyciele współczują swoim uczniom; ale grozi im niebezpieczeństwo nagradzania kujonów. Zdają sobie oni z tego niebezpieczeństwa sprawę wolniej niż nauczyciele innych przedmiotów, uczniowie i rodzice, których to drażni([11]).

Ministrowie zatwierdzają programy bez nadzorowania ich wykonania. Nauczyciele, mniej lub bardziej wykształceni i łatwo urzeczeni nowościami, muszą nauczać przedmiotów, których nie znają; niezdolni do interpretacji programów instrukcji oficjalnych, „przerabiają" podręczniki. Otóż podręczniki, pośpieszniej

([11]) Patrz niedawny artykuł w „Le Figaro" (9 lutego 1971) A. Kastlera, ostro atakujący obecny sposób nauczania matematyki (*przyp. autora*).

niż kiedykolwiek redagowane([12]), zawierają więcej niż kiedykolwiek błędów; niektóre z nich utrudniają nawet dostęp do matematyki inteligentnym uczniom. Poza dziedziną intelektualną architekt jest przecież odpowiedzialny za wykonanie swoich projektów.

Komitety rodziców uczniów([13]) są bierne; tolerują one, mimo kosztów, fakt że podręczniki są zbyt grube i bez przerwy zmieniane, przy tym błędne i mierne. Jednak każda, z wyjątkiem pokarmu intelektualnego, niepełnowartościowa żywność jest wymieniana lub zwraca się za nią pieniądze bez dyskusji.

Trudno jest wykryć błędy w podręcznikach: kompetencja i dokładne czytanie nie wystarczają. Często dopiero wątpliwości inteligentnych uczniów oraz nauczycieli umiejących krytykować konstrukcję matematyczną wyjawiają te błędy.

Obecnie podręczniki nie biorą wcale pod uwagę bardzo rzeczowej krytyki, którą kieruje się pod ich adresem w momencie przygotowywania się([14]) do egzaminu na nauczyciela liceum lub wykładowcę pewnych wydziałów uniwersyteckich i do C.A.P.E.S.([15]), I.R.E.M.-y([16]), jeśli nie są szkodliwe, to rola ich nie jest dostatecznie pożyteczna; w przeciwnym przypadku sytuacja byłaby zdrowa.

*

* *

Szkolnictwo każdego państwa o scentralizowanym nauczaniu może być ofiarą, „nowoczesnej matematyki". Dowodzi tego bardzo bliski przykład.

Stany Zjednoczone pierwsze zwątpiły w nasze tradycyjne nauczanie, tak nasiąknięte reminiscencjami śródziemnomorskimi. Każda szkoła tam decyduje o swoim nauczaniu, ale rodzice i nauczyciele często wspólnie dyskutują nad reakcjami uczniów; 25% szkół na poziomie licealnym([17]) obecnie unowocześniło nauczanie matematyki: sytuacja nie jest niezdrowa.

W Związku Radzieckim naucza się skutecznie matematyki dającej się stosować; A. Kołmogorow, który jest jednym z najgłębszych i najpłodniejszych matematyków radzieckich, często przeprowadza rozmowy z uczniami, aby ulepszyć i kontrolować tę reformę.

*

* *

([12]) Pierwszy z cytowanych podręczników „prowadzi do myślenia", że każda funkcja jest różniczkowalna (str. 137), że ciągłość jest to nieobecność skoku (str. 105), że obraz ciągły zbioru otwartego jest otwarty (str. 106, rysunek) (*przyp. autora*).

([13]) Jeśli chodzi o „Obronę młodzieży szkolnej", to mimo swojego zapału, swojej bezinteresowności i kilku bardzo przedwczesnych ostrzeżeń, zaczyna ona dopiero okazywać zdziwienie. (List informacyjny 32, marzec 1971) (*przyp. autora*).

([14]) Promotorzy „matematyki nowoczesnej" knują obecnie, aby odebrać zasługi tego przygotowania tym, którzy podejmowali się go ze znajomością rzeczy i osiągali sukcesy.

([15]) Certificat d'Aptitude Pédagogique a l'Enseignement Scientifique — tytuł niższego nauczyciela (*przyp. tłum.*).

([16]) Institut de Recherche de l'Enseignement de Mathématiques, odpowiedniki naszych ośrodków metodycznych, tworzone jednak nie przy kuratoriach, a przy uniwersytetach (*przyp. tłum.*).

([17]) High Schools (*przyp. tłum.*).

Dydaktyka jest niebezpieczna, jeśli jej siłą napędową i celem nie jest reakcja uczniów, kiedy pretenduje do dominującej roli w kształtowaniu nauczycieli.

W państwie scentralizowanym, w jakim się znajdujemy, oto co wydaje się coraz bardziej potrzebne: każda trudność hamująca uczniów inteligentnych, nauczycieli lub przyszłych nauczycieli powinna być sygnalizowana wysoko kwalifikowanym matematykom, którzy jedyni są zdolni do głębokiej analizy tej trudności; ich odpowiedź powinna być przekazana autorowi podręcznika lub zestawu ćwiczeń; gdyby on nie wziął tego pod uwagę, stanowisko jego powinno być zakomunikowane wszystkim nauczycielom; gdyby zaś odmówił natychmiastowego poprawienia jawnego błędu naukowego, powinno się zaalarmować stowarzyszenia rodziców uczniów. Taka działalność mogłaby wpłynąć na zmianę programu bądź oficjalnych instrukcji. Praca ta powinna być główną czynnością I.R.E.M.-ów, które dopiero wtedy będą w stanie oddać się jej we właściwy sposób, gdy osoby wchodzące w ich skład będą często zmieniane i wybierane kompetentnie. I.R.E.M.-y będą mogły wówczas przyczynić się do sukcesu, obecnie bardzo niepewnego, zadekretowanej reformy([18]).

Prace cytowane

René Thom, *Les mathématiques „modernes": une erreur pédagogique et philosophique?*, L'âge de la science, t. 3, nr 3 (1970), str. 225–242.

Jean Leray, *L'initiation aux mathématiques*, L'enseignement mathématique, t. 12, nr 3 (1966), str. 235–241.

JEAN LERAY (Paryż)

O reformie nauczania matematyki w szkołach średnich we Francji

(Raport z sesji Komisji Nauczania Paryskiej Akademii Nauk z dnia 21 lutego 1972)

Przeprowadzanie tej reformy trwa już cztery lata. Dopiero jednak spóźnione opublikowanie komentarza do programów dwóch środkowych klas szkoły średniej([1]), które weszły w życie odpowiednio we wrześniu 1971 i we wrześniu 1972

([18]) Na zakończenie oryginału znajduje się zastrzeżenie: *reprodukcja częściowa wzbroniona; reprodukcja bez skrótów autoryzowana (przyp. red.)*.

([1]) Klasy 4 i 3 według nomenklatury francuskiej; we Francji szkoła podstawowa (école primaire) liczy sześć klas: od klasy 12 do 7 i kończy się egzaminem dającym świadectwo „*Certificat de fin d'études primaires*". Szkoła średnia liczy również sześć klas: od 6 do 1 i dzieli się na dwa etapy (cycles), z których pierwszy (klasy od 6 do 3) kończy się egzaminem zwanym *Brevet de fin d'études du premier cycle* (B. E. P. C.), a drugi egzaminem zwanym Baccalaureat (matura) odbywającym się po klasie 1 (*przyp. tłum.*).