wmptm 1897 109

Dydaktyka jest niebezpieczna, jeśli jej siłą napędową i celem nie jest reakcja uczniów, kiedy pretenduje do dominującej roli w kształtowaniu nauczycieli.

W państwie scentralizowanym, w jakim się znajdujemy, oto co wydaje się coraz bardziej potrzebne: każda trudność hamująca uczniów inteligentnych, nauczycieli lub przyszłych nauczycieli powinna być sygnalizowana wysoko kwalifikowanym matematykom, którzy jedyni są zdolni do głębokiej analizy tej trudności; ich odpowiedź powinna być przekazana autorowi podręcznika lub zestawu ćwiczeń; gdyby on nie wziął tego pod uwagę, stanowisko jego powinno być zakomunikowane wszystkim nauczycielom; gdyby zaś odmówił natychmiastowego poprawienia jawnego błędu naukowego, powinno się zaalarmować stowarzyszenia rodziców uczniów. Taka działalność mogłaby wpłynąć na zmianę programu bądź oficjalnych instrukcji. Praca ta powinna być główną czynnością I.R.E.M.-ów, które dopiero wtedy będą w stanie oddać się jej we właściwy sposób, gdy osoby wchodzące w ich skład będą często zmieniane i wybierane kompetentnie. I.R.E.M.-y będą mogły wówczas przyczynić się do sukcesu, obecnie bardzo niepewnego, zadekretowanej reformy([18]).

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Prace cytowane

René Thom, *Les mathématiques „modernes": une erreur pédagogique et philosophique?*, L'âge de la science, t. 3, nr 3 (1970), str. 225–242.

Jean Leray, *L'initiation aux mathématiques*, L'enseignement mathématique, t. 12, nr 3 (1966), str. 235–241.

JEAN LERAY (Paryż)

O reformie nauczania matematyki w szkołach średnich we Francji

(Raport z sesji Komisji Nauczania Paryskiej Akademii Nauk z dnia 21 lutego 1972)

Przeprowadzanie tej reformy trwa już cztery lata. Dopiero jednak spóźnione opublikowanie komentarza do programów dwóch środkowych klas szkoły średniej([1]), które weszły w życie odpowiednio we wrześniu 1971 i we wrześniu 1972

([18]) Na zakończenie oryginału znajduje się zastrzeżenie: *reprodukcja częściowa wzbroniona; reprodukcja bez skrótów autoryzowana (przyp. red.).*

([1]) Klasy 4 i 3 według nomenklatury francuskiej; we Francji szkoła podstawowa (école primaire) liczy sześć klas: od klasy 12 do 7 i kończy się egzaminem dającym świadectwo *„Certificat de fin d'études primaires"*. Szkoła średnia liczy również sześć klas: od 6 do 1 i dzieli się na dwa etapy (cycles), z których pierwszy (klasy od 6 do 3) kończy się egzaminem zwanym *Brevet de fin d'études du premier cycle* (B. E. P. C.), a drugi egzaminem zwanym Baccalaureat (matura) odbywającym się po klasie 1 *(przyp. tłum.).*

ujawnia rzeczywisty charakter tej reformy (cf. Bulletin Officiel de l'Education Nationale; 29. XII. 1971, str. 1872–1878). Ton tego komentarza tłumaczy wypaczenia podręczników powodujące rozterkę uczniów i nauczycieli, której nie może zapobiec żadne przestawianie porządku materiału.

Wstęp. O potrzebie reformy. Rosnące znaczenie języków: logicznego i mnogościowego, analizy kombinatorycznej (tzn. zastosowanie teorii zbiorów skończonych do teorii zbiorów), statystyki, rachunku prawdopodobieństwa, rachunku różniczkowego i całkowego oraz przestrzeni wektorowych zmusza do unowocześnienia i wprowadzenia różnych kierunków nauczania.

Z drugiej strony, wykład geometrii metodą Euklidesa jest nie do przyjęcia; wykład ten zaczyna się od rozumowań błędnych; skorygowanie go przez wyłożenie *explicité* wszystkich potrzebnych aksjomatów jest bezcelowe, gdyż nie przygotowywałoby to definicji innej geometrii poza Euklidesową, jedno-, dwu-, lub trójwymiarową. Otóż poznanie tych innych geometrii jest ważne; konstruuje się je, wychodząc z pewnego ciała, które, w szkole średniej, będzie ciałem R liczb rzeczywistych. Właśnie tę konstrukcję należy wyjaśnić.

Mimo że różne geometrie konstruuje się biorąc za punkt wyjścia algebrę, jednak intuicja geometryczna inspiruje algebraika i analityka, którzy często używają języka geometrycznego. Podobnie w logice matematycznej trudno jest pojąć istnienie kilku teorii mnogości nie wiedząc o istnieniu kilku geometrii (euklidesowa, sferyczna, Łobaczewskiego, Riemanna).

Szkolnictwo średnie musi więc uprościć nauczanie geometrii bez umniejszania jej roli, rozszerzyć i urozmaicić nauczanie matematyki. Wiadome jest to we wszystkich krajach. W państwach o niescentralizowanym systemie nauczania wprowadza się jednocześnie kilka możliwości do wyboru. Podzielimy je schematycznie na trzy grupy.

1. Metoda pragmatyczna. Polega ona na postulowaniu własności pojęć, którymi się operuje, bez obawy wprowadzenia zbyt obszernego układu postulatów. Nie ma konieczności definiowania tych pojęć i wyprowadzania ich własności podstawowych z aksjomatów, które leżą aktualnie u podstaw matematyki (aksjomaty teorii mnogości). Jednak nie zaniedbuje się tych czynności lub mówi się krótko, jak można je wykonać, gdy tylko opanuje się do tego odpowiednie środki.

W ten sposób następuje rozwój matematyki, za cenę błędów prowadzących do sprzeczności, których nauczyciel musi unikać, i które musi analizować, gdy je uczeń popełnia.

Takie nauczanie szybko wyposaża ucznia w bogate struktury i pożyteczne narzędzia. Pozwala mu ono stopniowo zrozumieć użyteczność struktur ogólnych, które syntetyzują definicje nabytych pojęć i dowody ich własności.

Szkolnictwo wyższe posługuje się czasami takim pragmatyzmem: na ogół postuluje ono wszystkie własności zbiorów (na przykład odwołując się nie do „Teorii mnogości" Bourbakiego, lecz tylko do jego „Zeszytu rezultatów").

Nowe programy przyjmują ten pragmatyzm w dwóch najniższych klasach szkoły

średniej. Zarówno komentarz oficjalny, jak i nieoficjalny odradzają to kategorycznie, począwszy od trzeciego roku nauczania w szkole średniej.

2. Metoda algebraiczna. Rozwiązanie to, którego dziś już nikt nie poleca, jest ważne z logicznego i historycznego punktu widzenia. W przeciwieństwie do poprzedniego nie zadowala się ono uświadomieniem uczniowi pod koniec nauczania, że wszystko, co zostało wyłożone można wyprowadzić z aksjomatyki liczb naturalnych, lecz przedstawia efektywnie tę konstrukcję.

Metoda algebraiczna zakłada znajomość teorii zbiorów skończonych; używa języka teorio-mnogościowego w zakresie języka potocznego, pod kontrolą zdrowego rozsądku; wiadomo przy tym jednak, że szkoła średnia może tylko empirycznie mówić o zbiorach skończonych.

Oto jak rozwiązanie algebraiczne definiuje przestrzeń euklidesową E^n z chwilą, gdy zostały zdefiniowane zbiory: zbiór R liczb rzeczywistych oraz iloczyn kartezjański $R^n = R\times \ldots \times R$: określa się na R^n grupę przekształceń euklidesowych, a E^n definiuje się jako przestrzeń jednorodną, na której działa ta grupa.

Przestrzeń E^n jest wyznaczona jednoznacznie, tak jak ciało R; jej rozmaitości płaskie są to te podzbiory, na których indukuje ona strukturę euklidesową.

Przestrzeń E^3 jest tą przestrzenią, którą posługują się fizyka i technika.

Jednakże korzyści naukowe płynące z tej definicji są obecnie wyczerpane; ponadto przedstawia ona trudności dydaktyczne.

Nowe programy definicję tę wyłączają przez stwierdzenie, że w trzecim roku nauczania w szkole średniej pojęcie grupy nie wchodzi do programu.

3. Metoda mnogościowa.

3.1. Matematyka współczesna nazywa przestrzenią danego typu każdy zbiór wyposażony w pewien typ struktury. Definicja ta *opiera się zatem na teorii mnogości.*

Na przykład klasyczna teoria przestrzeni Banacha używa pewnika wyboru; zakłada ona więc, że ta przestrzeń jest zbiorem w pewnym systemie teorii mnogości, w którym spełniony jest pewnik wyboru (cf. „Traktat" Bourbakiego, którego „Księgą I" jest „Teoria mnogości").

3.2. Metoda mnogościowa w szkole średniej polega na zdefiniowaniu przestrzeni euklidesowej tą samą drogą: prostą nazywa się każdy zbiór wyposażony w strukturę określoną przez odpowiednio dobraną rodzinę bijekcji. Definicja ta nie ma jednak sensu dla ucznia, gdyż zakłada ona znajomość pojęcia zbioru nieskończonego (przeliczalnego lub nie); uczeń poznaje to pojęcie doświadczalnie podczas swoich studiów matematycznych, a nie spontanicznie na ich początku.

3.3. Spójrzmy, czego wymaga się w trzecim roku nauczania w szkole średniej od ucznia, który właśnie poznał definicję ciała liczb rzeczywistych R.

Chce się wyposażyć zbiór elementów R w nową strukturę: strukturę prostej; w tym celu wymaga się, aby trzynastoletni uczeń wyobraził sobie ten zbiór pozba-

wiony struktury, tzn. aby zrozumiał spontanicznie pojęcie ogólne zbioru nieskończonego (nieprzeliczalnego).

Kazano mu tyle bawić się, gdy był dzieckiem, zbiorami skończonymi i ich bijekcjami, później, w arytmetyce, kilkoma zbiorami przeliczalnymi, że nie zawaha się, nieostrożnie, mówić o zbiorach nieprzeliczalnych i ich bijekcjach. Ale zna on tylko bijekcje afiniczne $x \to ax+b$ zbioru R na zbiór R; nie wie nawet, że $x \to x^3$ jest również bijekcją.

Obciąża się więc pamięć ucznia „jeszcze jednym bagażem więcej, wprowadzone pojęcia pozostają zawieszone w dziedzinie metafizycznej; uczeń nie może ich przyswoić i używać". Zacytowaliśmy tu C. Chevalleya, któremu matematyka i traktat Bourbakiego dużo zawdzięczają; ale nie jest to krytyka nauczania średniego geometrii: C. Chevalley tak wyraża się o nauczaniu średnim algebry([2]).

Uczniowie, tak nieostrożnie wtajemniczeni w trudną sztukę operowania nieskończonością, będą bardzo źle przygotowani do unikania absurdów, które język mnogościowy pozwala łatwo formułować (jednym z nich jest zbiór wszystkich zbiorów); zaczyna się od łamania zasady, którą szkoła średnia musi sobie narzucić, aby uniknąć sprzeczności: mówić tylko o zbiorach, które są podzbiorami pewnego zbioru zdefiniowanego *explicité* (zbioru odniesienia).

Zamiast postawić problem (zdefiniowania prostej wychodząc od R) i, jeśli to możliwe, przeanalizować ten problem i rozwiązać, rozprawiano w sposób utopijnie ogólny.

Reasumując, błąd naukowy, o którym mówi nr 3.2 implikuje bardzo poważne błędy dydaktyczne. Zaskakują one ucznia zabiegami myślowymi, których nie jest w stanie śledzić; dają mu one upokarzające i fałszywe przekonanie, że aby opanować matematykę, trzeba mieć specjalny talent, którego on nie ma.

3.4. Definicja mnogościowa nazywa prostą D każdy zbiór E wyposażony w strukturę prostej. Każdy zbiór E mocy continuum jest więc nośnikiem takiej prostej D: płaszczyzna, przestrzeń krzywe, powierzchnie, wszystkie ich podzbiory nieprzeliczalne, zbiór Cantora są — w tym sensie — nośnikami prostej. Uczeń musi rozróżniać te proste od prostych na płaszczyźnie i w przestrzeni (które są podzbiorami o strukturze indukowanej przez strukturę prostej). Posługuje się on więc w mate-

---

([2]) Wstęp C. Chevalleya do pracy A. Warusfela, profesora Matematyki Wyższej w Liceum Louis-le-Grand: *Struktury algebraiczne skończone* (Hachette 1971). Zacytujmy dokładnie początek tego wstępu: „Poparcie, jakim cieszy się aktualnie Matematyka Nowoczesna, nie jest w stanie ukryć jej dwuznaczności i, niestety, zbyt często kończy się na zrobieniu z niej jeszcze jednego obciążenia dla pamięci uczniów i studentów, podczas gdy powinna ona wyzwolić ich od frazesów matematyki klasycznej; w dziedzinie np. algebry, powtarzanie rok po roku definicji grupy nie służy chyba rozbudzeniu umysłów".

„Fakt, że nauczanie to pozostaje często obce naszym studentom, wynika prawdopodobnie z przekonania ucznia, że wprowadzone pojęcia pozostają zawieszone w dziedzinie metafizycznej i że nie jest on w stanie ani przyswoić ich sobie, ani posługiwać się nimi."

„Praca A. Warusfela, która wskazuje, na prostych przykładach, możliwości zastosowania obiektów algebraicznych, wypełnia więc bezsprzeczną lukę" (*przyp. autora*).

matyce językiem tajemnym, niezgodnym z językiem innych dyscyplin naukowych i technicznych i niezgodnym z językiem potocznym.

3.5. Aby znaleźć miejsce w programie na definicję mnogościową, trzeba było usunąć z niego wiele własności, które rozbudzały inteligencję uczniów i miały zastosowania. Liczne ubogie struktury, które składają się na nowe nauczanie średnie matematyki, a o użyteczności których uczeń musi wątpić, mają rację bytu tylko dzięki temu, że pozwalają zbudować struktury bogate, lecz bardzo specjalne. Te bogactwa nie powinny być przywilejem nauczania wyższego. Jest rzeczą niezbędną, by nauczyciel szkoły średniej miał swobodę i środki na pokazanie niektórych z nich, wziętych według uznania z rachunku prawdopodobieństwa, teorii gier lub z arytmetyki, algebry czy też geometrii. Jego rola nie powinna ograniczać się do zdefiniowania wszystkich pojęć, których inni będą używać. Jego misją jest rozbudzenie umysłu ucznia, ćwicząc go w odkrywaniu i posługiwaniu się podstawowymi pojęciami matematyki.

Wniosek: *obecna reforma jest w niebezpieczeństwie.*

W szkolnictwie średnim mnogościowe ujęcie geometrii jest zatem niebezpieczną utopią. Aktualnie opublikowane programy nie narzucają jej, ale komentarz oficjalny do porgramów trzeciego i czwartego roku nauczania szkoły średniej zalecał właśnie to ujęcie. Terminologia naukowa, której musieliśmy użyć, aby komentarz ten przeanalizować, dowodzi, jak dalece reforma ta nie docenia zdolności i potrzeb intelektualnych uczniów klas średnich.

Obecna reforma stawia w niebezpieczeństwie przyszłość ekonomiczną, techniczną i naukową naszego kraju.

RÉNÉ THOM (Bures-sur-Yvette)

Matematyka „nowoczesna": pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?(1)

W odczuciu większości współczesnych ludzi tak zwana "nowoczesna" matematyka cieszy się wielkim poważaniem. Matematyka razem z cybernetyką i informatyką została wrzucona do worka ze sztukami magicznymi, zachwalanymi przez zwodniczą reklamę jako coś istotnego dla współczesnej techniki, narzędzie niezbędne dla przyszłego rozwoju wiedzy naukowej. Co więcej, z chwilą modernizacji programów nauczania „nowoczesna" matematyka wtargnęła do życia domowego.

---

(1) Tłumaczenie artykułu *Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique* opublikowanego w L'Age de la Science 3, zeszyt 3, str. 225–245; wersja angielska opublikowana została w The American Scientist 59 (1971), str. 695–699 (*przyp. red.*).